بسم الله الرحمن الرحيم

معر   معادلات ديفرانسيل و مشتقات جزئي:

اگر معادله اي شامل چند متغ   و مشتقات آ ا باشد، آن معادله يك معادله ديفرانسيل ناميده مـي شود.معادله ديفراسيل با مشتقات جزئي معادله اي است كه شامل يك تابع و مـتغ   هـاي آن و مشتقات جزئي مربوط مي باشد.فرم كلي معادلات ديفرانسيل با مشتقات جزئي به صورت رابطه

(۱)مي باشد:

رابطه (۱):

$$G(u,u_x,u_{xx},.......,u_x^{(n)},u_y,u_{yy},......,u_y^{(m)},u_{xy}^{(i+j)},......)=0$$

كه در آن

$$u_x=\frac{\partial y}{\partial x}\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=u_y\qquad u_{xy}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$$

مثال:

$$\begin{cases} u_{xxx}(x,y)+u_{yyy}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3}=0 \end{cases}$$

موعه معادلات PDE يك   موعه معادلات نا دود مي باشد.ازب   اين   موعه تنها   ش كوچكي داراي كاربردهاي خاص مي باشد.

غالب مسائلي كه در كاربردهاي PDE مطرح مي شوند داراي فرمهاي   اسيا   (رابطه (۲))

مي باشند.كه در آن G ,....., B , A ضرايب معادله PDEهستند.

رابطه (۲): $Au_{xx}(x,y)+Bu_{xy}+Cu_{yy}(x,y)+Du_{x}(x,y)+Eu_{y}(x,y)+Fu(x,y)+G=0$

اين معادله را فرم استاندارد معادله درجه ۲ از مشتقات جزئي مي نامند.

چنانچه G ,....., B , A توابعي از x , y باشند، معادله ي درجه ۲ خطي ناميده مي شود و چنانچه G ,....., B , A تابعي از U باشد ،معادله ي غ خطي ناميده مي شود.

مثال: معادله غ خطي درجه دو $u_{xx}+(\sin u)_{uy}=0$

مثال: معادله خطي درجه دو $zu_{xx}(x,y)+xy^{2}u_{yy}(x,y)+e^{x}u(x,y)=10$

معادله ديفرانسيل با مشتقات جزئي خطي درجه ۲ در حوزه ي $u(x,y,z)$

معادلات ديفرانسيل با مشتقات جزئي روي خط ، صفحه و يا فضا تعريف مي شوند.در بسياري از كاربردها ،مقاد تغ Uر در مرز ناحيه يا فضايا روي خط معلوم مي باشد.نيزدر برخي كاربردها مقدار تابع U در نقطه شروع زمان و مكان معلوم مي باشد.مسـائل گـروه اول Boundary value Problems (مسائل با مقادر مرزي) و مسائل گروه دوم را Initional Value Problems ميناميم.حالـت تركي از مقادير مرزي و اوليه نيز وجود دارد. يك معادله ديفرانسيل،خطي ناميده مي شود وقـ كه معادله و شرايط اوليه يا مقاديرمرزي آن خطي باشد.

معادله ديفرانسيل PDE گن يا Homogenus ناميده مي شود وق معادله و شرايط آن گن باشند براي روش هايي كه در اين درس ارائه مي شود ،خطي و گن بودن يك معادلـه , در وجـود جواب معادله نقش اساسي دارد.براي توضيح اينكه به چه دليل به حل معادلات مشتقات جزئـي نيازمند . مثا ائي را در فيزيك مطرح مي كنيم كه حل دقيق آ ا به حل يك معادله PDE نيازمند است.به عبارت ديگر بيشتر كاربرد اين درس براي حل مسائلي است كه در زير ـونه هائي ازآن آورده شده است.

حل مسأله سيم نوسان كننده :

فرض مي كنيم سيمي به طول L در دو نقطه Fix شده باشد .سيم را باريك و داراي چگا جرم طو يكنواخت فرض مي كنيم.

سيم داراي حركت در راستاي y با سرعت $v(x+\Delta x.t)$است.

از آ ا كه در راستاي x حركت ندار بنابراين:

$$H(v,t)=H(x+\Delta x,t)\rightarrow H(x,t)=cte \qquad \forall t \qquad 0<x<l$$

$$\tan\alpha=\frac{v(x+\Delta x,t)}{H} \qquad \tan\beta=\frac{-v(x,t)}{-H}$$

$$\tan\alpha = y_x(x+\Delta x,t) \qquad \tan\beta = y_x(x,-t)$$

باقرار دادن معادله ن و $\Delta F = ma$ براي يك ا ان طول سيم و در راستاي y دار

$$\Rightarrow v(x+\Delta x,t) - v(x,t) = \delta.\Delta s.y_{tt}(x,t)$$

كه در ان Δs كمان ا اد شده توسط ا ان در نظر گرفته شده مي باشد و در صور كه

$$\Delta x = \Delta s \Rightarrow \frac{v(x+\Delta x,t) - v(x,t)}{\Delta x} = \delta\, y_{tt}(x,t)$$

$$H\left(\frac{y_x(x+\Delta x,t) - y_x(x,t)}{\Delta x}\right) = \delta\, y_{tt}(x,t)$$

رابطه (٤): $$Hy_{XX}(x,t) = \delta\, y_{tt}(x,t) \Rightarrow H/\delta\, y_{xx}(x,t) = y_{tt}(x,t)$$

δ, H مقادير ثاب هستند δ جرم واحد طول سيم و H كشش سيم مي باشد.

نشان داد كه معادله ديفرانسيل حاكم بر سيم نوسان كننده به فرم:

$$y_{tt}(x,t) = H/\delta\, y_{xx}(x,t)$$

كه در آن y(x,t) ا راف سيم در راستاي y و در نقطه x و زمان t باشد چنا ه ن ويي بر سيم وارد ائيم معادله ن و بصورت رابطه (٥) خواهد بود:

رابطه (٥): $$\delta\,\Delta x y_{tt}(x,t) = H(y_x(x+\Delta x),t) - y_x(x,t) + F\Delta x$$

اين رابطه از جايگزين كردن رابطه (٣)بدست مي آيد.

بنابراين:

$$y_{tt}(x,t) = H/\delta\left(\frac{y_x(x+\Delta x,t) - y_x(x,t)}{\Delta x}\right) + f/\delta$$

بنابراين:

$$y_{tt}(x,y) = H/\delta\, y_{XX}(x,t) + f/\delta$$

با در نظر گر مسأله وزن خواهيم داشت:

$$\delta\,\Delta x y_{tt}(x,t) = H(y_x(x+\Delta x,t) - y_x(x,t)) - g\,\Delta x$$

$$y_{tt}(x,y) = H/\delta\, y_{xx}(x,t) - g$$

براي حال كه سيم در يط داراي اصطكاك باشد; مي دانيم كه ن وي اصطكاك اجسام متحـرك در هوا، گازها و سيالات با سرعت حركت هم متناسب است.رابطه(٦)

رابطه(٦): b :ضريب اصطكاك $f == -by_t(x,t)$

بنابراين: $y_{tt}(x,t) = H/\delta\, y_{xx}(x,t) - by_t(x,t)$

معادلات ديفرانسيل بدون شرايط اوليه يا مرزي به صورت كامل قابل حل نيستند بنابراين وقـ كامل است كه شرايط اوليه يا مرزي آن نيز مشخص باشد.

شرايط مرزي سيم نوسان كننده:

حالـ كه سيم داراي ا ـراف اوليه است و ـت ا ـراف اوليه رها مي شود.

$$y(0,t) = 0$$
$$y(l,t) = 0$$
$$y(x,0) = f(x) \quad 0 < x < \ell$$

آنگاه دار :

كه در آن f(x) منحـ ا ـراف اوليه است.

شرايط مرزي سري دوم:وقـ كه سيم ـت يك ضربه داراي سرعت اوليه مي شود:

$$y(0,t) = 0$$
$$y(\ell,t) = 0$$
$$y(x,0) = 0$$
$$y_t(x,0) = g(x)$$

كه در ان g(x) سرعت نقطه x در ـظه صفر مي باشد.

مدلسازيهاي مربوط به مسايل نوسان با يكي از دو صورت فوق ا ـام مي شود.

مسأله ميله نوسان كننده

يك ميله قابل ار ـاع كه ـت يك نـ و قرار دارد در نظر بگـ يد.y(x,t)را تابعي در نظربگـ يدكه ميزان جا ـايي نقطه X را در زمان t نسبت به مكان اوليه ـاسبه مي كند.ميزان جا ـايي نقطه $X + \Delta X$ برابر با مكان اوليه نقطه $X + \Delta X$ مي باشد.نـ وي وارده بر ميله F(X,t) مد نظر مي گـ كه نـ وي وارد بر واحد طول مي باشد.

از روي قانون هوك و با توجه به روابط تنش ميزان تغير طول با رابطه (v)مشخص مـي شـود

$$F = \quad y(x+\Delta x) - y(x,t)$$

بدست مي آيد:

A :سطح مقطع ميله

B:مدول الاستيسيته(يانگ)رابطه (v)

$$F(x,t) = \frac{E}{\Delta x}\left(y(x+\Delta x,t) - y(x,t)\right)$$

$$F(x,t) = AEy_x(x,t)$$

مقدار ن و به صور است كه ميله از حالت الاستيك خارج نشود.

پس:

براي نقطه xدار

$$F(x,t) = -Ey_x(x,t)$$

$$F(x+\Delta x,t) = AEy_x(x+\Delta x.t)$$

معادله ن و براي يك ا ان طو ازميله به صورت رابطه (۸) است:

$$F(x+\Delta x,t) - F(x,t) = \delta A \Delta x y_{tt}(x,t)$$

A:سطح مقطع رابطه (۸)

Δ:طول

δجرم واحد طول

$$\Rightarrow y_{tt}(x,t) = \frac{AE}{\delta A}\left(\frac{y(x+\Delta x,t) - y(x,t)}{\Delta x}\right)$$

رابطه (۹):معادله ميله نوسان كننده

$$y_{tt}(x,t) = \frac{E}{\delta} y_{xx}(x,t)$$

براي يك صفحه نوسان كننده دار :

$$Z_{tt}(x,y,t) = H\!\!\diagup_{\delta}\left(Z_{xx}(x,y,t) + Z_{yy}(x,y,t)\right)$$

كه در آن Z_{tt} ميزان ا راف نقطه xوyدر ظه t ميباشد.

مسأله انتقال حرارت:

براي يك حجم R (u(x,y,z,t را در دماي نقطه x,y در ظه t در نظربگ يد.مي خواهيم بـا استفاده از قوان ترمو ديناميك معادله ديفرانسيل براي هر نقطه را به صورت تابعي اززمان بدست اور .

انطور كه ميدانيم شار حرار كه از يك ا ان صفحه عبور مي كند با رابطه زير مشخص مـي شود.كه nبردار عمود بر سطح ا ان صفحه مورد نظر مي باشد

$$\phi = -K\frac{du}{dn}$$

ϕ :شار   k:رسانايي   n:بردار عمود بر سطح

مثلاً حرارت انتقا در راستاي ورهاي xوyوzبه صورت روابط (۱۰) بدست مي ايد :

$$\phi_1 = -K\frac{du}{dx}$$

و حرارت انتقا   در راستاي   ور y: روابط (۱۰)

$$\phi_2 = -K\frac{du}{dy}$$

$$\phi_3 = -K\frac{du}{dt}$$

جريان حرار   y را به به صورت   ع شارها معر   مي كنيم.

$$J = \phi_1\ \hat{I} + \phi_2\ \hat{J} + \phi_3\ \hat{K}$$

$$J = -k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\hat{I} + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{J} + \frac{\partial u}{\partial z}\hat{K}\right)$$

$$J = -k(\Delta u)$$

به اين صورت ϕ در هر راستا به صورت $\phi = J.n$ بدست مي ايد

مثال :شار عبوري ازصفحه yz :   .

$$\phi = j \quad j = -k\frac{du}{dx}$$

اگر I_1 برابر كل تغي ات حرار   جسم مورد نظر بگ   ، I_1 با رابطه زير مشخص مي شود:

شار حرار   (و   حرار) $I_1 = \iiint_{R_0} \delta u dv$

از طر   شاري كه از سطح ناحيه خارج مي شود باعث تغي   انرژي حرار   ناحيه ميگردد.

كل شار حرار   خارج شده ازناحيه انتگرال زير مشخص مي شود:

$$I_1 = \iint_R J.dA$$

بنابراين:(از رياضيات   دار):

$$I_2 = \iiint_R (divj)dv = \iiint_R \nabla(J)dV$$

$$I_2 = \iiint_R -k\nabla.Jdv = \iiint -k\nabla^2 udV$$

از آ   ايي كه اين روابط براي هر حجم برقرار مي باشد بنابراين

باملاحظه فيزيك مسأله دار   (وق   در داخل ناحيه منبع حرار   ندار) : $I_1 = I_2$

$$I_1 - I_2 = 0 \Rightarrow \iiint_R (\delta(u_t) - ku(vu))dv = 0$$

چون اين معادله براي هر ناحيه ي R برقرار است و U كمي   پيوسته است ، بنابراين لازم است .

$$\delta u_t = ku(v_u) = 0 \Rightarrow \Delta U_t = k\nabla^2 u$$

$$\nabla u(x,y,t,z)vu = \frac{\partial u}{\partial x}i^{\wedge} + \frac{\partial u}{\partial y}j^{\wedge} + \frac{\partial u}{\partial z}k^{\wedge}$$

$$u_1 = M_1 \hat{i} + M_2 \hat{j} + M_3 \hat{k}$$

$$U_M = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \right) . \left(M_1 \hat{i} + M_2 \hat{j} + M_3 \hat{k} \right) = \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial y} + \frac{\partial M_3}{\partial z}$$

با تركيب موارد فوق $\bar{u} = Uu$ دار :

پس:

$$K\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \delta u_t (x, y, z, t)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (x,y,z,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x,t,z,t)}{\partial z^2} = \frac{\partial}{k} \frac{\partial u}{\partial t} (x, y, z, t)$$

معادله انتقال حرارت

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \frac{\delta}{k} u_t$$

هدف از ث هاي ارائه شده اين است كه نشان دهيم مسائل و رفتارهايي در فيزيك و واقعيـت وجود دارند كه مي توان آ ا را به فرم معادلات PDE ايش دادو حل آ ا احتياج به روشهاي PDE دارد E

درمسأله انتقال حرارت ديد كه رابطه كلي انتقال حرارت در هر ناحيه بوسيله رابطه P D E زير مشخص مي شد.

$$? \nabla^2 u = \frac{\partial}{k} u_t \qquad \nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x^2}$$

بررسي شرايط مرزي در معادله انتقال حرارت :

چنانچه از يك مرز ناحيه شار ثابت حرار وارد شود، در اين صورت:

$$k \frac{du}{dn} \Big| = \phi_0$$

اگر مز عايق باشد داراي شرايط مرزي به صورت زير است كه:

$$\frac{du}{dx} = 0$$

اگر عايق باشد شرط مرزي صفر است

چنانچه مرز به يك دماي ثابت متصل باشد آنگاه انتقال رارت بصورت زير مي باشد:

اگر يط رسانا باشد انتقال حرارت به صورت رسانايي مي باشد و دار

$$k \frac{du}{dn} = h(T_0 - u)$$

-يك ورق فلزي به صورت زير در نظر مي گ .مطلوب است معادلات انتقال حرار روي هر نقطه از ورق:

$$\nabla^2 u = \frac{\delta}{k}\frac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\delta}{k}\frac{\partial u}{\partial t}$$

معادله براي هر نقطه از نوار فلزي

حال بايد شرايط مرزي را اعمال كنيم.براي حل معادله نياز به شرايط مرزي دار .(روي ورق)

۱) مرز۱ $k\left.\frac{du}{dx}\right| = o \qquad u_x(x,o,t) = 0 \qquad 0 < x < l$

$o < x < l, \quad y = 0$

۲) مرز۲ $k\frac{du}{dx}| = \phi_0 \qquad Ku_x(o,y,t) = \phi_0 \qquad y > 0$

$x = 0, \quad y > 0$

۳) مرز ۳ $k\frac{du}{dx}| = h(o,u) \qquad KUx(0,y,t) = -h(u) \qquad y > o)$

$x = e, \quad y > 0$

دماي اوليه صفحه را نيز بصورت u(x,y,0)=f(x) در نظر مي گ

معاىله نوسان $\nabla^2 u = \partial^2 u / \partial t^2$

معادلات بر فرم $\nabla^2 u = \delta(u,x,y,z,t)$ را معادلات لاپلاس مي گوئيم و uتابع ت لاپلاسـ را تابع هارمونيك

مي نامند.كاربرد اين معادلات در مباحث سيالات ، ترموديناميك ، الكترو مغناطيس ،موج ، آكوستيك ، وم ،ارتعاشات ، بيولوژي و ..

اگر u_2, u_1 دو تابع و c_2, c_1دو ضريب در R باشند ، آنگاه $c_1u_1 - c_2u_2$را تركيب خطي u_1 و u_2 مي ناميم.

e- را يك اپراتور خطي مي ناميم وة $e\{c_1u_1 + c_2u_2\} = c_1e\{u_1\} + c_2e\{u_2\}$

براي مثال انتگرال گ يك اپراتور خطي است:

$$e\{u\} = \int u dt \to e\{c_1u_1 + c_2u_2\} = \int (c_1u_1 + c_2u_2)du =$$

$$\int c_1 u_1 du + \int c_2 u_2 du = c_1 \int u_1 du + c_2 \int u_2 du$$

خواص اپراتور خطي:

$$e\{0\} = 0$$

$$e\left\{\sum_{k=1}^{n} c_k u_k\right\} = \sum_{k=1}^{n} c_k e\{u_k\}$$

اگر M نيز يك اپراتور خطي باشد، در اين صورت:

$$e\{M\{u\}\} = M\{e\{u\}\} = eM\{u\}$$

$$(e+M)\{u\} = e\{u\} + M\{u\}$$

انطور كه قبلاً ث شد، معادلات مورد توجه فرم:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial xy} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu(x,y) = G(x,y)$$

مي باشد.

از ب ،اين معادلات گن كه در آن G=0 است ، مبا حل معادلات مي باشد.حال اپراتور e را بصورت زير تعريف مي كنيم:

$$e = A\frac{\partial^2}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2}{\partial xy} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial}{\partial x} + E\frac{\partial}{\partial y} + F$$

حال بيان معادله گن با اپراتور e بصورت

$$e\{u\} = 0$$

مي باشد.(u برابر است با والتاژ، دما،مكان ،پتانسيل،فشار يك سيال)

حال مي توان نشان داد كه معادله غ گن به صورت $e\{u\} = G$ خواهد بودو مي توان نشان داد چنانچه u_1, u_2 جوا ا معادله گن باشد:يع $e\{u_1\} = 0 \quad e\{u_2\} = 0$

در اين صورت $c_1 e\{u_1\} + c_2 e\{u_2\} = e\{c_1 u_1 + c_2 u_2\} = 0$

نتيجه: اگر u_1, u_2 جوا اي معادله گن باشند،هر تركيب خطي آ ا جواب معادله گن است.كا - آن در يك ضرب شود. ايت جواب بدست خواهد آمد.

اگر u_1 جواب معادله گن باشد و u_2 جواب معادله نا گن ، در اين صورت.

$$e\{u_1\} = 0 \qquad e\{u_2\} = G$$

در اين صورت هر تابع u كه $u = cu_1 + u_2$ جواب معادله غ گن خواهد بود.

$$e\{cu_1 + u_2\} = ce\{u_1\} + e\{u_2\} = G$$

مثال: مسأله سيم مرتعش زير را در نظر بگ يد

$$u_t(x,t) = Ku_{xx}(x,t)$$

شرايط مرزي اين است:

$$u_x(o,t)=0$$
$$u_x(c,t)=0$$

در اين صورت جواب معادله گن به فرم

$$u_0(x,t)=\tfrac{1}{2} \qquad U_n(x,t)=\exp\left(-\frac{n^2\pi^2k}{c^2}t\right)\cos\frac{n\pi x}{c} \qquad n=1,2,......$$

مشتق تابع نسبت به t

$$u_t(x,t)=\left(\frac{-n^2\pi^2k}{c^2}\right)\exp\left(\frac{-n^2\pi^2k}{c^2}t\right)\cos\frac{n\pi x}{c}$$

تفاوتشان در k است

$$u_{xx}=\left(\frac{-n^2\pi^2}{c^2}\right)\exp\left(\frac{-n^2\pi^2}{c^2}kt\right)\cos\frac{n\pi x}{c}$$

سپس $ku_{xx}=u(x,t)$

مي توان نتيجه گرفت كه

$$u=c_ou_o+c_1u_1+.....+c_nu_n$$

نيز جواب معادله فوق خواهد بود.

معادلات به فرم

$$Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu=G$$

خطي درجه ۲ هستند وA تا F تابعي از x , y , t باشند

چنانچه ضرايب F-A عدد ثاب باشند،معادله را معادله خطي درجه ۲با ضريب ثابت مي ناميم.

حال اگر $B^2-4Ac>0$ معادله هذلو يا H yperbolic گوئيم و اگر $B^2-4Ac=0$ باشد معادله را بيضوي يا Ecllipite گويند واگر $B^2-4Ac>0$ باشد سهمي گوئيم.(Parabolic).

انواع معادلات لاپلاس:

مسأله لاپلاس را مسأله ديريشله يا نوع اول گويند اگر در شرايط مرزي مفدار u روي مرز دانسه شود.

مسأله لاپلاس نوع را نيومن گوينداگر مقدار مشتق u روي شي از مرز داده شده باشد.

مسأله ي لاپلاس را نوع سوم گويند اگر روي مرز مقدار $Ku+\frac{du}{dn}$ داده شده باشد.

مسأله لاپلاس را نوع چهارم (كوشي) گويند اگر معادله لاپلاس شامل ترمهاي u_{tt},u_t باشد و مقدار u يا u_t در ظه صفر دانسته شده باشد.

بيان تصا ا:

كارترين به استوانه اي

$$\begin{cases} x=p\cos\phi \\ y=p\sin\phi \\ z=z \end{cases} \qquad \begin{cases} p=\sqrt{x^2+y^2} \\ \phi=Arc\ \tan\left(\frac{y}{x}\right) \\ z=z \end{cases}$$

استوانه اي ➔ كروي

$$r = \sqrt{p^2 + z} \qquad \theta = Arc\tan\left(p/z\right)$$

$$\phi = \phi$$

كروي ➔ دكار

$$\begin{cases} x = rSin\ \theta Cos\ \phi \\ y = rSin\ \theta Sin\ \phi \\ z = rCos\ \theta \end{cases}$$

كروي ➔ استوانه اي

$$\begin{cases} p = rSin\ \theta \\ \phi = \phi \\ z = rCos\ \theta \end{cases}$$

كارتزين➔ كروي

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\phi = ArcTan\, y/x$$

$$z = ArcTan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right)$$

بيان معادله لاپلاس در تصات استوانه اي :

$$\nabla^2 u = 0 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

در اينصورت تابع u بصورت $u(p,\phi,z)$ خواهد بود.

حل:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \phi}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial p}\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\partial u}{\partial \phi}.\left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{\partial u}{\partial p}.\frac{x}{p} - \frac{Sin\phi}{p}\frac{\partial u}{\partial \phi} = Cos\phi\frac{\partial u}{\partial p} - \frac{Sin\phi}{p}\frac{\partial u}{\partial \phi} \ *$$

به جاي u در عبارت * قرار مي دهيم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x} = Cos\,\phi\left(\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right) - \frac{Sin\,\phi}{p}\left(\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)$$

$$\frac{\partial^2 `u}{\partial x^2} = Cos\left(\frac{\partial}{\partial p}\left(Coc\phi\frac{\partial u}{\partial p} - \frac{Sin\phi}{p}\frac{\partial u}{\partial \phi}\right)\right) - \frac{Sin\phi}{p}\left(\frac{\partial}{\partial \phi}Cos\phi\frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{Sin\phi}{p}\frac{\partial u}{\partial \phi}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = Cos\,\phi\left(Cos\,\phi\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} + \frac{Sin\,\phi}{p^2}\frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{Sin\,\Im}{p}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi \partial p}\right) -$$

$$\frac{Sin\phi}{p}\left(-Sin\phi\frac{\partial u}{\partial p} + Cos\phi\frac{\partial^2 u}{\partial u \partial \phi} - \frac{Cos\phi}{p}\frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{Sin\phi}{p}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}\right)$$

$$= Cos^2\phi\frac{\partial^2 u}{\partial p} + \frac{Cos\phi Sin\phi}{p^2}\frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{Cos\phi Sin\phi}{p}\frac{\partial^u u}{\partial \phi \partial p} + \frac{Sin^2\phi}{p}\frac{\partial u}{\partial p} -$$

$$\frac{Sin\,\phi Cos\,\phi}{p}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi \partial p} + \frac{Sin\,\phi Cos\,\phi}{p^2}\frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{Sin^2\phi}{p}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \Rightarrow$$

$$Cos^2\phi\frac{\partial^2 p}{\partial p^2} + \frac{2Sin\phi Cos\phi}{p^2}\frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{2Cos\phi Sin\phi}{p}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi \partial p} + \frac{Sin^2\phi}{p}\frac{\partial u}{\partial p} + \frac{Sin^2\phi}{p^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}$$

اسبه ي: $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Sin\phi\frac{\partial u}{\partial p} + \frac{Cos\phi}{p}\frac{\partial u}{\partial \phi} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = Sin\phi\,{}^{\partial}\!/_{\partial p}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{Cos\phi}{p}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

در ایت:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = Sin^2\phi\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} + \frac{2Sin\phi Cos\phi}{p}\frac{\partial^2 u}{\partial p \partial \phi} + \frac{Cos^2\phi}{p^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{Cos^2\phi}{p}\frac{\partial u}{\partial p}$$

$$-\frac{2\sin\phi Cos\phi}{p^2}\frac{\partial u}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2(x,y,z)}{\partial z^2} \qquad \nabla^2 u = 0$$

$$\nabla^2 u = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} + {}^{1}\!/_{p}\frac{\partial u}{\partial p} + {}^{1}\!/_{p^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

بيان معادله لاپلاس در تصات استوانه اي:

$$P^2\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}+p\frac{\partial u}{\partial p}+\frac{\partial^2 p}{\partial\phi^2}\,p^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

اگر مسأله در راستاي Z ثابت باشد:

$$P^2\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}+p\frac{\partial u}{\partial p}+\frac{\partial^2 p}{\partial\phi^2}\,p^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \qquad p\quad\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

معادله زير يك معادله لاپلاس در تصات استوانه اي است:

$$x^2\frac{\partial u}{\partial x^{2+}}+x\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad \begin{array}{l} o<x<\infty \\ 0<y<2\pi \end{array}$$

رين:معادله لاپلاس را به معادله كروي تبديل ائيد.(معادله لاپلاس در فرم كروي)

در ايت: $$\nabla^2 u=0\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2 Sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}+\frac{Cos\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}=0$$

روش ديگر ايش:

$$\nabla^2 u={}^1\!/_r\,(ru)_{rr}+\frac{1}{r^2 Sin^2\theta}u_{\phi\phi}+\frac{1}{r^2 Sin\theta}(u\theta Sin\theta)_\theta$$

$$(u+ru_r)\rightarrow(u_r+u_r+ru_{rr})$$

روش ديگر ايش:

$$\nabla^2 u=\frac{1}{r^2}(r^2ur)_r+\frac{1}{r^2 Sin^2\theta}u_{\phi\phi}+\frac{1}{r^2 Sin\theta}(u_\theta Sin\theta)_\theta$$

اگر مسأله مستقل از ϕباشد:

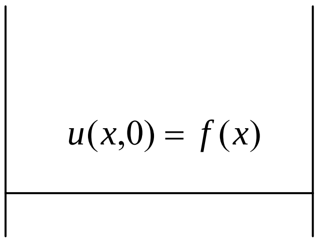
$$r\frac{1}{r^2}(r^2u_r)_r+\frac{1}{r^2 Sin\theta}(u_\theta Sin\theta)_\theta=\nabla^2 u$$

فصل دوم:حل معادله $\nabla^2 u=G$

روش حل معادله به وسيله معادله گن و بدست آوردن يك جواب اختصاصي براي مساله مـي باشد.يك روش كاربردي براي حل معادلات لاپلاس ،روش جداسازي متغ ها ميباشد. (Sepration of Vauiable)

بري توضيح اين روش از يك مثال استفاده مي كنيم:

$$Ku_{xx}(x,t)=u_t(x,t) \qquad 0<x<c \quad t>0$$



شرايط مرزي

$$\begin{cases} Ku_{xx}(x,t)=u_t(x,t) \\ u_x(0,t)=0 \\ u_x(c,t)=0 \\ u(x,0)=f(x) \end{cases}$$

در ايت به متوسط يع f(x) خواهيم رسيد.

قضيه ۱): اگر u_1 .... u_n جواب هاي معادله فوق باشند $u=\sum c_k u_k$ نيز جوا ب‍راي مسأله است.

قضيه ۲): اگر u پيوسته و گراي يكنواخت باشد سري جواب به ازاي $n=\infty$ گرا واهد بود.

قضيه ۳): جوا كه در حالت كلي بدست مي آيد يكتاست.

$u(x,t)$ را مي خواهيم.

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

روش جداسازي متغ ها

تابعي از كان =تابعي از زمان

$$KX''(x)T(t)=X(x)T'(t)\rightarrow \frac{KX''(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)}{T(t)}$$

اين تساوي در صور برقرار است كه نسبت كسرها ثابت باشد .

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{1}{K}\frac{T'(t)}{T(t)}=\lambda \rightarrow$$ عدد ثابت

$$\frac{X'(x)}{X(x)}=\lambda \qquad \frac{T'(t)}{KT(t)}=\lambda$$

$$X''(x)-\lambda X(x)=0$$ معادله 1 ←

$$T'(t)-\lambda KT(t)=0$$ معادله۲ ←

با حل معادلات ۱و۲ جواب بدست خواهد آمد.به معادلات ۱،۲ معادلات اشتروم ليوويل گويند.

وي اعمال شرايط مرزي:

$$1 \qquad X'(o)T(t) = X'(c)T(t) = 0$$

$$\Rightarrow T(t) \neq 0, X'(o) = o_1 X'(c) = 0$$

$$\begin{cases} X'(x) - \lambda x(x) = 0 \\ X(o) = 0 \\ X'(c) = 0 \end{cases} \qquad T'(t) - k\lambda t(t) = 0 \Rightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = k\lambda \Rightarrow CosT(t) = k\lambda t + CosA$$

$$\Rightarrow Cos\frac{T(t)}{A} = k\lambda t \Rightarrow \frac{T(t)}{A} = e^{k\lambda t} \Rightarrow T(t) = Ae^{k\lambda t}$$

وي حل معادله :سه حالت در نظر مي گ :

$$1)\lambda > 0 \qquad X''(x) - \lambda X(x) = 0 \Rightarrow X(x) = a_1 e^{\sqrt{\lambda x}} + a_2 e^{-\sqrt{\lambda x}} \qquad \lambda > 0$$

فرض $\lambda = a^2 \Rightarrow X''(x) = a^2 \times (x) \Rightarrow X(x) = Ae^{ax} + Be^{-ax}$

$$X(x) = Aae^{ax} - Bae^{-ax}$$

$$\begin{cases} X'(o) = 0 \Rightarrow A - B = 0 \\ X'(c) = 0 \Rightarrow Ae^{ac} - Be^{-ac} = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow A = 0, B = 0$$

اگر X(x) صفر باشد u (x,t) صفر است پس $\lambda > 0$ جوا ا اد ي كند.

$$2)\lambda = 0 \qquad X''(x) = 0 \Rightarrow X(x) = Ax + B$$

$$X'(o) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$X'(c) = 0 \Rightarrow A = 0$$

در اين حالت

$$X(x) = B \qquad T(t) = A \qquad u(x,t) = X(x)T(t) - A.B$$

$$u(x,o) = f(x) \Rightarrow AB = f(x)$$

پس اگر f (x) ثابت باشد در اين صورت $u(x,t) = f$ واضح است.

$$3)\lambda < 0 \qquad X''(x) = -a^2 X(x) \Rightarrow X(x) = ACosax + BSinax$$

$$\lambda = -a^2$$

$$X'(o) = 0 \Rightarrow -AaSinac + aBCosax = 0\Big|_{x=0} \qquad B = 0$$

$$X'(o)=0 \Rightarrow -AaSinac=0 \Rightarrow Sinac=0 \rightarrow ac=n\pi \Rightarrow a=\frac{n\pi}{c}$$

$$X(x)=Cos\left(\frac{n\pi}{c}x\right) \qquad n=0,1,......$$

$$T(t)=e^{k\lambda t}=e^{-ka^2t}=e^{-k}\left(\frac{n^2\pi^2}{c^2}\right)t \qquad n=0,1,...$$

امي u_n ها در معادله ي $ku_{xx}=u_t$ و شرايط مرزي اش صدق مي كند.پس سري زيــر نيــز در معادله ي شرايط مرزي صدق مي كند:

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}a_n u_n(x,t)$$

$$u(x,t)=X(x)T(t)=e^{-k}\frac{n^2\pi^2}{c^2}+Cos\frac{n\pi x}{c}$$

$$u_n(x,t)=e\frac{-kn^2\pi^2}{c^2}Cos\left(\frac{n\pi x}{c}\right) \qquad n=0,1,.....$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{\frac{-n^2\pi^2}{c^2}kt}Cos\frac{n\pi x}{c}$$

پس نقط كا ضرايب a_n را بدست آوريد:

اسبه ضرايب با استفاده از شرط مرزي $u(x,0)=f(x)$

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n Cos\frac{n\pi x}{c}=f(x)$$

سري $\sum a_n Cos\frac{n\eta x}{c}$ بايسد به f (x) گرا باشد.

براي اسبه a_n به موارد زير توجه بشود:

$$\int_0^c Cos\frac{n\pi x}{c}dx=\frac{c}{n\pi}Sin\frac{n\pi x}{c}=0 \qquad \begin{cases} o & n=1.2,........ \\ c & n=0 \end{cases}$$

$$\int_0^c Cos\frac{n\pi x}{c}Cos\frac{m\pi x}{c}dx={}^1\!/_2\int_0^c\left(Cos(n+m)\frac{\pi x}{c}+Cos(n-m)\frac{n\pi}{c}\right)dx$$

$\Rightarrow$ طبيعي اند n,mn,m فرض كنيم $n=1,2,......$ $m=1,2,.....$ $\begin{cases} 0 & \forall m,n|m\neq n \\ {}^c\!/_2 & n=0 \end{cases}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n Cos\frac{n\pi x}{c}=f(x)=a_0+a_1Cos\frac{n\pi x}{c}+a_2Cos\frac{2\pi x}{c}+.........+a_nCos\frac{n\pi x}{c}=f(x)$$

براي اسبه كا از دو طرف انتگرال از 0 تا c بگ .درااینصورت:

$$a_0\int_0^c dx + a_1\int_0^c Cos\frac{nx}{c}dx + ... + ... = \int_0^c f(x)dx$$

$$a_0 c = \int_0^c f(x)dx \Rightarrow a_0 = \frac{1}{c}\int_0^c f(x)dx$$

براي اسبه a_1 در $Cos\frac{nx}{c}$ (ضريب خودش)ضرب كرده و انتگرال مي گ .

$$a_0\int_0^c Cos\frac{nx}{c}dx + a_1\int_0^c Cos\frac{nx}{c}Cos\frac{nx}{c}dx + ...$$

$$= \int Cos\frac{nx}{c}f(x)dx = a_i\, c/2 = \int f(x)cCos\frac{\eta x}{c}dx$$

به ترتيب:

$$a_1 = \frac{2}{c}\int_0^c f(x)Cos\frac{2\eta x}{c}dx$$

$$a_n = \frac{2}{c}\int_0^c f(x)Cos\frac{n\eta x}{c}dx \qquad \forall n = 1,2,.......$$

$Ku_{xx} = u_t$ مسآله انتقال حرارت $u_x(0,t) = 0$ $u_x(c,t) = 0$

دماي اوليه نقطه: $u(x,0) = ?$

مثال:فرض كنيد كه f (x) تابعي بصورت زير باشد. $f(x) = 10x$ $c = 10x$

جواب هر معادله را بدست آوريد.

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{c^2}kt} Cos\frac{n\eta x}{c}$$

$$k = \frac{\text{ظرفيت حرارتي واحد حجم}}{\text{جرم واحد حجم}}$$

$$a_0 = \frac{1}{10}\int_0^C 10x\,dx \qquad a_n = \frac{2}{10}\int_0^c f(x)Cos\frac{n\pi x}{c}dx$$

$$a_0 = 50 \text{ متوسط} \qquad a_n = \frac{2}{10}\int_0^{10} 10xCos\frac{n\pi x}{c}dx$$

$$a_n = \frac{2}{10}\int_0^c xCos\frac{n\pi}{10}x\,dx = \frac{2}{10}\left(\frac{u10}{n\pi}Sin\frac{n\pi x}{c}\Big|_0^{10} - \frac{10}{n\pi}\int_0^{10} Sin\frac{n\pi x}{c}dx\right)$$

$$\begin{cases} \text{زوج} & a_n = 0 \\ \text{فرد} & a_n = -\dfrac{400}{n^2\pi^2} \end{cases} \quad \text{يا} \quad a_n = \frac{200}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$a_n = \frac{2}{10}\left(\left(\frac{10}{n\pi}\right)^2 Cos\frac{n\pi x}{10}\Big|_0^{10}\right) \Rightarrow a_n = \frac{200}{n^2\pi^2}(Cosn\pi - 1)$$

$$u(x,t) = 50 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{200}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right)e\frac{-n^2\pi^2 k}{10}t\,Cos\frac{n\pi x}{10}$$

جواب مسأله انتقا حرارت با شرایط اولیه f (x)

روش Sepration od Voualley ترین روش براي حل معادلات با مشتقات جزئي مي باشد.
با روش فوق الذكر ، جوا براي معدلا لاپلاس ارائه ود .سوا كه مطرح است اين است كه آيا جواب بدست آمده يكتاست يا خ ؟
فصل ۱۵ كتاب چرچيل ،اثبات يكتايي جواب پيشنهادي به اين روش است.

روش هاي ديگر حل معادلات PDE:

برخي از مسائل PDE را مي توان با روش هاي مبتكرانه حل ود.اين روش ها صرفاً براي حـالا خاص برقرارند.

مثال:

$$u_{xx}(x,y) = 0 \qquad u(0,y) = y^2 \qquad u(1,y) = 1$$
$$0 < x < 1 \quad -\infty < y < \infty$$

$u_{xx}(x,y) = 0 \Rightarrow u_x(x,y) = \phi(y)$ كن است ثابت باشد و $\Rightarrow u(x,y) = \phi(y)x + h_y$

$$u(0,y) = y^2 \Rightarrow h(y) \;= y^2 \qquad (\phi(y)\times 0)$$

$$u(1,y) = \phi(y) + h(y) = 1 \Rightarrow \phi(y) = 1 - y^2$$

$$u(x,y) = (1 - y^2)x + y^2$$

روش ديگر

براي مثال:

$$a^2 y_{xx}(x,t) = y_{tt}(x,t)$$

$$y(x,0) = h(x) \qquad -\infty < x < \infty$$
$$y_t(x,o) = 0 \qquad t > 0$$

حل:براي حل معادله از تبديل زير استفاده مي كنيم: ←

$$\begin{cases} u = x + at \\ v = x - at \end{cases}$$

يع مغ ها را مي توان برحسب (v , u) يا (x , t) نوشت

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} \qquad y(x,t) \to y(u,v)$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}.a + \frac{\partial u}{\partial v}.(-a) = a\frac{\partial y}{\partial u} - a\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a\frac{\partial}{\partial u}\left(a\frac{\partial y}{\partial u} - a\frac{\partial y}{\partial v}\right) - a\frac{\partial}{\partial v}\left(a\frac{\partial y}{\partial u} - a\frac{\partial y}{\partial v}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} - a^2\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v} - a^2\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v} + a^2\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$$

$$\Rightarrow a^2\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} - 2a^2\frac{\partial^2}{\partial u\partial v} + a^2\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$$

با جاگذاري در معادله PDE

$$a^2\left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\right) = a^2\left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\right)$$

$$4\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v} = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_n(u,v) = h(u) \\ y_v(u,v) = q(v) \end{cases}$$

يك تابع پيشنهادي بصورت زير است:

$$g(u,v) = f(u) + g(v) \qquad f'(u) \to 0$$

پس جواب به صورت

$$y(u,v) = f(u) + g(v)$$

است و جایگذاري
$$x + at = u$$
$$x - at = v$$

از شرایط مرزي دار :

$$y(x,t) = f(x,at) + g(x - at)$$

$$af'(x) - ag(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = g'(x)$$

$$f(x) = g(x) + k \quad \text{یا} \quad c$$

$$2f(x) = h(x) + c \Rightarrow f(x) = \tfrac{1}{2}(h(x) + c)$$

$$2g(x) = h(x) - c \Rightarrow g(x) = \tfrac{1}{2}(h(x) - c)$$

پس $y(x,t) = f(x,at) + g(x - at) = \tfrac{1}{2}(h(a + at) + h(x - at))$

سایر روش هاي مورد استفده عبارتند از :

۱)تبدیل لاپلاس ۳)تبدیل انتگرا فوریه

۲)تبدیل فوریه ٤)نگاشت کانتورمال

مثال:معادله لاپلاس زیر را حل کنید؟

$$y_{tt}(x,t) = a^2 y_{xx}(x,t)$$

$$y(o,t) = y(c,t) = 0 \qquad 1$$

$$y(x,0) = f(x) \qquad y_t(x,0) = 0 \qquad 3$$

انطور که مي دانیم این معادله نوسان تامسر نقش است.طول تار c , a ضریب است که به جنس تار و جرم واحد طول بستگي دارد.

روش حل:جداساري متغ ها

$$y(x,t) = X(x)T(t)$$

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \begin{cases} \lambda^2 \\ 0 \\ -\lambda^2 \end{cases}$$

الف
$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda^2 \Rightarrow x''(X) = \lambda^2 X(X)$$
$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda^2 \to T''(t) = a^2\lambda^2 T(t)$$

$$\begin{cases} X(t) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x} \\ T(t) = Ce^{a\lambda t} + De^{-a\lambda t} \end{cases}$$

$1 \Rightarrow X(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0 \qquad \Rightarrow A = 0, B = 0$

$X(c) = 0 \Rightarrow Ae^{\lambda c} + Be^{-\lambda t} = 0$ غ‌ق‌ق

ب) $\lambda = 0 \Rightarrow \begin{matrix} X''(x) = 0 \\ T''(t) = 0 \end{matrix} \begin{cases} X(x) = Ax + B \\ T(t) = Ct + D \end{cases}$

شرايط مرزي $\begin{cases} X(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \\ X(c) = 0 \Rightarrow A = 0 \end{cases}$

ج) $\lambda < 0 \qquad \begin{cases} X''(x) = -\lambda^2 X(x) \Rightarrow X(x) = B\,Sin\lambda x + A\,Cos\lambda x \\ T''(t) = -a^2\lambda^2 T(t) \Rightarrow T(t) = C\,Sina\lambda + +D\,Cos\lambda t \end{cases}$

$1 \rightarrow X(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \qquad X_n(x) = Sin\dfrac{n\lambda}{c}x$

$X(c) = 0 \Rightarrow BSin\lambda c = 0 \Rightarrow \lambda c = n\pi \Rightarrow \lambda = \dfrac{n\pi}{c} \qquad \forall_n = 0,1,.....$

پس ايت جواب دار :

$T_n(t) = CSin\dfrac{an\pi}{c} + +DCos\dfrac{an\pi}{c} + *$

$3: \quad X(x)T'(0) = 0$

$* = 0 \Rightarrow T_n'(0) = 0 \Rightarrow C$

بايد صفرباشد

$Tn(t) = Cos\dfrac{an\pi C}{T}$

بنابراين : $X_n(x) = Sin\dfrac{n\pi x}{c} \quad , \quad T_n(t) = Cos\dfrac{a\pi x}{c}t$

پس $Y_n(x,t) = Sin\dfrac{n\pi x}{c}Cos\dfrac{a\pi x}{c}t$

اين تركيب خطي جواب است . پس $y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n Sin\dfrac{n\pi x}{c}Cos\dfrac{a\pi x}{c}t$

فقط بايد b_n را بدست آور $\sum_{n=1}^{\infty} b_n Cos\dfrac{n\pi x}{c}$

برنامه اي اسبه اي دقيق y(x,t) لازم است كه ضـرايب اسـبه شـوند.از شـرط اوليـه g(x,0)=f(x) استفاده مي كنيم.كه f(x) ا راف اوليه تاراست.(به جاي t صفر مي گزار)

$$y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n Sin\frac{n\pi x}{c} = f(x)$$

$$\int_0^c Sin\frac{n\pi x}{c}dx = -\frac{c}{n\pi}Cos\frac{n\pi x}{c}\Big|_0^c = -\frac{c}{n\pi}(Cosn\pi - 1) = \frac{c}{n\pi}\left((-1)^{n+1} + 1\right) = \frac{c}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right)$$

$$\int_0^c Sin\frac{n\pi x}{c}Sin\frac{m\pi x}{c}dx=\begin{cases}0 & n\neq m\\ c/2 & n=m\end{cases}$$

با ضرب رابطه $\sum b_n Sin\frac{n\pi x}{c}=f(x)$ در $Sin\frac{n\pi x}{c}$ و گرف انتگرال دار :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_o^c b_n Sin\frac{n\pi x}{c}Sin\frac{m\pi x}{c}dx=\int_0^c f(x)Sin\frac{m\pi x}{c}dx$$

$$c/2\, b_m=\int_0^c f(x)Sin\frac{m\pi x}{c}\Rightarrow b_m=2/c\int_0^c f(x)Sin\frac{m\pi x}{c}dx$$

مثال f(x) تابع روبرو باشد:

$$\begin{cases}f(x)=0.2x & 0<x<10\\ f(x)=-0.2x+4 & 10<x<20\end{cases}$$

$$=2/20\left(2/10\left(-x\frac{20}{n\pi}Cos\frac{n\pi x}{20}\Big|_0^{10}+\frac{20}{n\pi}\int_0^{10}Cos\frac{n\pi x}{20}dx\right)\right)$$

$$b_n=2/20\int_0^{20}f(x)Sin\frac{n\pi x}{20}dx=2/20\left[\int_o^{10}2/10\,x\,Sin\frac{n\pi x}{20}dx+\int_{10}^{20}\left(-2/20+4\right)Sin\frac{n\pi x}{20}dx\right.$$

$$+\left(\left(\left(-2/20\,x+4\right)\left(\frac{-20}{n\pi}Cos\frac{c\pi x}{20}\Big|_0^{20}+\frac{20}{n\pi}\int_{10}^{20}\left(\frac{-2}{10}Cos\frac{n\pi x}{c}dx\right)\right)\right)\right)$$

$$.......+\int_{10}^{20}\frac{-2}{20}xSin\frac{n\pi x}{20}dx+\int_{10}^{20}4Sin\frac{n\pi x}{20}dx$$

$$=2/20\int_{10}^{20}xSin\frac{n\pi x}{20}dx+\frac{4\times 20}{n\pi}\left(-Cos\frac{n\pi x}{20}\right)\Big|_{10}^{20}=.........$$

فصل سوم سري هاي فوريه:

معر توابع قطعه اي پيوسته:

اگر تابع f(x) در فاصله[a,b] به جز چند نقطه اي دود قابل ارش پيوسته باشد،به آن تابع ،

تابع قطعه اي پيوسته مي گويند.

نقاط ناپيوستگي $x_1, x_2, ...x_n$ که

$$a < x_1 < x_2 .... < x_n < b$$

نيز لازم است تا حدود زير موجود باشند

$$f\left(x_1^-\right)f\left(x_1^+\right), f\left(x_2^-\right), f\left(x_2^+\right), ..., f\left(x_n^-\right), f\left(x_n^+\right)$$

مثال:

$$f(x)=\begin{cases}-1 & -1Mx<-0.5\\ a & -0.5<x<0.5\\ 1 & 0.5\le x<1\end{cases}$$

انتگرال تابع قطعه اي پيوسته را در فاصله (c,d) که $(c,d)\subset(a,b)$ بصورت زير تعريـف مـي شود:

$$\int_c^d f(x)dx=\int_c^{x_M} f(x)dx+\int_{x_M}^{x_{M+1}} f(x)dx+........+\int_{x_{r-1}}^{d} f(x)dx$$

توابع پيوسته حالت خاصي از توابع قطعه اي پيوسته اند.

فوريه براي تقريب توابع در يك بازه از سري هاي سينوسي و كسينوسي استفاده كرد كه مي توان با تقريب مناسب از هر دقت د واه كه واهيم تـابع f (x) اي را كـه قطعـه پيوسـته است،(در فاصله [a,b] ،توسط سري هاي سينوسي و كسينوسي تقريب زد و دو سري ارائه كرد كه به سري هاي سينوسي فوريه و كوسينوسي فوريه معروف هستند.

سري كسينوسي فوريه: پيشنهاد فوريه براي بسط كسينوسي بصورت روبرو است

$$f(x)={a_o}/{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n Cos\frac{n\pi x}{c}$$

از اين سري براي تقريب توابع f(x) قطه اي پيوسته در فاصله 0 تاC استفاده مي شود.

مثال:تابع f(x) كه $0<x<\eta$ را توسط سري كسينوسي تقريب بزنيد.

$$f(x)\approx{a_o}/{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n Cos\frac{n\pi x}{\pi}$$

براي اسبه ضريب a_n دار :

$${a_o}/{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n Cosnx= f(x)\Rightarrow {a_o}/{2}\int_0^{\eta}dx+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_0^{\eta}Cos\,nx\,dx=\int_0^{\eta}f(x)dx$$

$$= {a_o}\!\big/_{2} \times \pi + o = \int_o^{\eta} f(x)dx \Rightarrow a_o = {2}\!\big/_{\pi}\int_o^{\eta} f(x)dx$$

$$ {a_o}\!\big/_{2}\int_o^{\eta} Cos\, mx\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_o^{\eta} Cos\, nx\, Cos\, mx\, dx = \int_o^{\eta} f(x) Cos\, mx\, dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ {1}\!\big/_{2}\left[\int_o^{\eta}(Cos(n-m)x - Cos(nn+m)x)dx = \int_o^{\eta} f(x) Cos\, mx\, dx\right.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ {1}\!\big/_{2}\left[\int_o^{\eta}(Cos(n-m)x - Cos(nn+m)x)dx = \int_o^{\eta} f(x) Cos\, mx\, dx\right.$$

بنابراین در کل

$$a_n = {2}\!\big/_{\pi}\int_o^{\eta} f(x) Cos\, nx\, dx$$

بسط سري سينوسي:

اگر f(x) يك تابع در فاصله [0,c] باشد و بصورت قطعه اي پيوسته باشد .مي توان f(x) را توسط يك سري سينوسي فوريه تقريب زد.

$$f(x) \cong \sum_{n=1}^{\infty} b_n Sin \frac{n\pi x}{c}$$

چنانچه n به ايت ميل كند ،تقريب تا حدود د واه دقيق مي شود.

$$f(x) \cong \sum_{n=1}^{\infty} b_n Sin \frac{n\pi x}{c}$$

مطلوب است b_n ها:

براي اسبه f(x) توجه شود كه :

$$\int_o^{c} Sin\frac{n\pi x}{c} Sin\frac{m\pi x}{c} dx = \int_o^{c} f(x) Sin\frac{m\pi x}{c} dx$$

پس با ضريب طرف در سينوس $\frac{m\pi x}{c}$ و انتگرال جواهيم داشت

$$b_m\, {c}\!\big/_{2} = \int_o^{c} f(x) Sin\frac{m\pi x}{c} dx \Rightarrow b_m = {2}\!\big/_{c}\int_o^{c} f(x) Sin\frac{m\pi x}{c} dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_o^{c} Sin\frac{n\pi x}{c} Sin\frac{m\pi x}{c} dx = \int_o^{c} f(x) Sin\frac{m\pi x}{c} dx$$

مثال:تابع f(x)=x را در فاصله (o,π) با بسط سينوسي فوريه ثقريب بزنيد:

$$f(x) \cong \sum_{n=1}^{\infty} b_n Sin\frac{n\pi x}{c} \Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n Sin\, \pi x$$

$$b_n = {2}\!\big/_{\pi}\int_o^{\pi} x Sin\, nx\, dx = \frac{-x}{n} Cos\, nx \Big|_o^{\pi} + {1}\!\big/_{n}\int_o^{\pi} Cos\, nx\, dx$$

$$= {2}\!\big/_{\pi}\left({\pi}\!\big/_{n}(-1)^{n+1} - o + {1}\!\big/_{n^2} Sinx\Big|_o^{\pi} \right) = \left(\frac{(-1)^{n+1}\times \pi}{n}\right) \times {2}\!\big/_{\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\times 2}{n} Sin\, nx = 2SinX - Sin2x + {2}\!\big/_{3} Sin3x...........$$

در خارج ازاين فاصه بسط سينوسي اولاً داراي پريور است.و نيز به دليل

اينكه $Sin\,nx$ فرد است بنابراين $\sum_{n=1}^{\infty} b_n Sin\,nx$ هم فرد است.

شكل روبرو بسط تابع $f(x)$ و خود تابع را مشخص مي كند.

$f(x)=x \qquad [0,\pi]$ $\qquad \sum b_n Sin\,nx$

البته اگر تابع را توسط كسينوسي فوريه بيان مي كرد داراي خواص زير بود

$$f(x)=\frac{a_o}{2}+\sum an\,Cosnx$$

خواص:١-بسط داراي پريور 2π (ك،م،م)

٢-بسط به دليل اينكه از لات كسينوسي تشكيل شده زوج است.

نكته:پريود يك تابع ثابت هر عددي مي تواند باشد .

فرض كنيد كه $f(x)$ يك تابع قطعه اي پيوسته در فاصله ي (-c،c) انطور كه مي دانيم هر تابع را مي توان بصورت ع در تابع زوج و فرد نوشت.

$$f(x)=h(x)+g(x) \qquad \text{كه} \qquad g(-x)=-g(x) \quad , \quad h(-x)=h(x)$$

$$h(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2} \qquad g(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

تابع $h(x)$ يك تابع زوج است بنابراين چنانچه $h(x)$ را درفاصله (٠،c) با بسط كسينوسي تقريب بزنيم ،تابع $h(x)$ در ناحيه(-c،c) تقريب زده خواهد شد.

$$h(x)=\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n Cos\frac{n\pi x}{c} \qquad a_n=\frac{2}{c}\int_o^c h(x)Cos\frac{n\pi x}{c}\,dx$$

$$f(x)=h(x)+g(x) \qquad (-c,c)$$

پس

$$f(x)=\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n Cos\frac{n\pi x}{c}+\sum_{n=1}^{\infty} b_n Sin\frac{n\pi x}{c} \qquad \text{كه} \qquad x\in(-c,c)$$

كه اين بسط تابع فوريه $f(x)$ در فاصله (-c،c) مي باشد.حال بايد ضرايب را پيدا ائيم.

$$a_n=\frac{2}{c}\int_o^c \frac{f(x)+f(-x)}{2}Cos\frac{n\pi x}{c}\,dx=\frac{1}{c}\left[\int_o^c f(x)Cos\frac{n\pi x}{c}\,dxt\int_o^c f(-x)Cos\frac{n\pi x}{c}\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{c}\left[\int_o^c f(x)Cos\frac{n\pi x}{c}\,dx+\int_{-c}^o f(x)Cos\frac{n\pi x}{c}\,dx\right]=\frac{1}{c}\int_{-c}^c f(x)Cos\frac{n\pi x}{c}\,dx$$

بنابراین $f(x)$ در فاصله $(-c,c)$ با بسط زیر مشخص مي شود.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \, Cos \, \frac{n\pi x}{c} + b_n \, Sin \, \frac{n\pi x}{c} \right)$$

$$a_n = \frac{1}{c} \int_{-c}^{c} f(x) Cos \, \frac{n\pi x}{c} \, dx \qquad b_n = \frac{1}{c} \int_{-c}^{c} f(x) Sin \, \frac{n\pi x}{c} \, dx$$

مثال: تابع زير را بسط فوريه بدهيد: $x \leftarrow (-\pi,\pi)$

$$f(x) \begin{cases} 0 & -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ 1 & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \, Cos \, nx + b_n \, Sin \, nx \right)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) Cos \, nx \, dx \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) Sin \, \frac{n\pi x}{\pi} \, dx$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi} 1 \times Cos nx \, dx = \frac{1}{n\pi} Sin nx \int_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{n\pi} \left(Sin \frac{n\pi}{2} + Sin \frac{n\pi}{2} \right) = \frac{1}{n\pi} \times 2 Sin \frac{n\pi}{2}$$

حال $\qquad b_n : \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} Sin \, nx \, dx = 0$

بنابراين

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi} Sin \frac{n\eta}{2} \right) Cos \, nx$$

a_o را اسبه مي كنيم $\qquad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 dx = 1$

يا مقدار متوسط =

قضيه:اگر تابع $f(x)$ يك تابع قطعه اي پيوسته در فاصله ي $(-\pi,\pi)$ باشد و $f(x)$ بسط فوريه $f(x)$ باشد،خواهيم داشت.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n Cos \, nx \, dx + b_n Sin \, nx \right)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) Cos nx \, dx \quad , \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) Sin \, nx \, dx$$

حال چنانچه یك نقطه ناپیوستگي تابع $f(x)$ باشد و با توجه به این كه تابع $f(x)$ پیوسته است.

مقدار $f(x_\circ)$ بوسیله رابط زیر مشخص مي شود:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}Sin\,nx$$

كه به قضیه متوسط جام موسوم است.

این قضیه دو ریاضي اثبات مي شود.

مثال : تابع $f(x) = x$ در فاصله (π,π) بسط داده و قضیه متوسط آن را تست كنید.

$$f(x)=x \qquad f(x)=a_\circ/1 + \quad a_n\,Cosnx+ \quad b_n\,Sinnx$$

$$a_n = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(x)Cos\ \ nx\ dx \qquad b_n = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(x)Cos\ \ nx\ dx$$

$f(x)$ یك تابع فرد است پس: $a_n=0$

$$b_n = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} x\ Sin\ \ x\ dx = 2/\pi \int_{o}^{\pi} Sin\ \ nx\ dx = 2/\pi \left(\frac{-x}{\pi}Cosx \int_{o}^{\pi} +\right)$$

$$+ 1/\pi \int_{o}^{\pi} Cos\ nx\ dx = 2/\eta \int \frac{-\pi(-1)^n}{\pi} + o + 1/n^2\ Sin\ nx\begin{bmatrix}\pi\\ o\end{bmatrix} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

پس

$$f(x) \cong \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}Sin\ \ nx$$

$$f(x) \cong \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}Sin\ \ nx$$

پس

$$= 2\left(Sinx - 1/2\ Sin2x + 1/3\ Sin3x - 1/4\ Sin4x + ...\right)$$

$f(x)=f(x)$ وق x نقطه پیوستگي f باشد در غ اینصورت در نقطه ناپیوستگي متوسط تابع f مي شود.

$$F(-\pi) = 0 \qquad F(\pi) = 0$$

نقاط ناپیوستگي $-\pi,\pi : f$

كه این با متوسط مقادیر جام برابر است.

خواص ضرايب سري فوريه :

اگر $S_N(x)={a_o}/{2}+\sum_{n=1}^{N}a_n\,Cosnx$ آنگاه دار :

$$2/\pi\int_o^\pi S_N(x)Cos\ nx=a_n$$

$$S_N(x)={a_0}/{2}+\sum_{n=1}^{N}a_nCosnx$$

نيز انتگرال به صورت زير اسبه مي شود:

$$2/\pi\int_o^\pi (S_N(x))^2dx$$

$$2/\pi\int_o^\pi({a_o}/{2}+\sum a_n\,Codnx)S_N(x)dx=2/\pi\int_o^\pi {a_0}/{2}\,S_N(x)dx+2/\pi\sum a_n\int_o^\pi S_N(x)Cosnxdx$$

$$=2/\pi\,\frac{a_o^2}{4}\int_o^\pi dx+2/\pi\sum_{n=1}^{N}a_n^2\times\pi/2=\left(\frac{a_o^2}{2}+\sum_{n=1}^{N}a_n^2\right)$$

حال براي حالت سينوسي دار :

$$S_N(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\,Sin\ nx$$

دار

$$2/\pi\int_0^\pi S_N(X)Sinmxdx=b_m$$

لذا

$$2/\pi\int_0^\pi[S_N(X)]^2dx=\sum_{n=1}^{N}2/\pi\int_0^\pi S_N(X)b_nSinnxdx$$

$$=\sum_{n=1}^{N}b_n\times2/\pi\int_0^\pi S_N(X)Sinnxdx=\sum_{n=1}^{N}(b_n)^2$$

براي هر دو حالت دار :

$$E=2/\pi\int_0^\pi(f(x)-S_N(X))^2dx\geq0$$

به اين صورت مي نويسيم $2/\pi\int_0^\pi f^2(x)dx\quad 4/\eta\int_0^\pi f(x)S_N(x)+2/\eta\int_0^\pi(S_N(x))^2dx$

از آ ا كه f تابعي قطعه اي پيوسه است كه به صورت سنوسي يا كسينوسي بسط فوريه داده مي شود و با توجه به اينكه تابع $f(x)$ در فاصله $(0,\pi)$ دود است ، لذا عبارت از 0 تا η :

اسبه مقدار عبارت: $\int_0^\pi f^2(x)dx$

(قطعه اي است دود)

$$2/\pi\int_0^\pi f(x)S_N(x)dx$$

براي حالت كسينوسي دار :

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\left(\frac{a_o}{2}+ \quad a_n Cosnx\right)dx=\frac{2}{\pi}\times\frac{a_0}{2}\int_{0}^{\pi} f(x)dx+ \quad 1\sum_{n=1}^{N} a_n \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)Cosnxd$$

$$=\frac{a_0^2}{2}+ \quad \sum_{n=1}^{N} a_n^2$$

براي حالت سينوسي دار :

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\left(\int_{0}^{\pi} \quad b_n Sinnx\right)dx= \quad \sum_{n=1}^{N} bn\times\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)Sinnxdx= \quad \sum_{n=1}^{N} b_n^{2}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f^2(x)dx=\frac{a_o^2}{2}+ \quad \sum_{n=1}^{\pi}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$ قضيه پارسوال

در حالت كسينوسي براي حالت نامساوي دار :

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f^2(x)dx \geq \left(\frac{a_o}{2}+ \quad \sum_{n=1}^{N} a_n^2\right)$$

$$\sum_{n=1}^{N} b_n^2 \leq \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f^2(x)\,dx$$

اين نامساوي به ازاء هر N برقرار است(من   له زما   كه N به   ايت ميل كند)

پس:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N} a_n^2 \geq \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f^2(x)\,dx$$

سري $\quad a_o^2 \atop n=1$ + $\frac{a_o^2}{2}$ يك سري با   لات مثبت و مقدار   دود است پس:

براي حالت سينوسي دار :

$$\lim_{n} a_n = 0$$

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x) \geq 2\times\left(\sum_{n=1}^{N} b_n^2+\sum_{n=1}^{N} a_n^2\right) \geq 0$$

$$\sum_{n=1}^{N} b_n^2 \leq \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f^2(x)dx \qquad \lim_{n} b_n = 0$$

پس   واره دنباله هاي $a_n,\ b_n$ در سري فوريه به   ت   ميل خواهند كرد.

قبلاً گفتيم كه بسط فوريه تابع $f(x)$ كه در بازي $(-n,n)$تعريف شده بود بصورت:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_m Cosx \quad + b_n Sinn \quad _x\right)$$

بود و با ضرايب زير تعريف مي شد:

$$a_n = \frac{1}{n}\int_{-n}^{n} f(x)Cosdx \qquad b_n = \frac{1}{n}\int_{-n}^{n} f(x)Sinnxdx$$

و گفتيم كه تابع $f(x)$ بايد قطعه اي پيوسته باشد در اين صورت بسط فوريه تابع $f(x)$ كه در نقاطي كه $f(x)$ پيوسته است به $f(x)$ گرا است و در نقاطي كه $f(x)$ ناپيوسته است با متوسط جام برابر است .پس واره بسط فوريه گراست.

طبق قضيه نشان دار كه : $\lim ax = 0 \quad , \quad \lim bx = 0$

و نيز نشان دار كه:

$$a_0 2/2 + \sum_{n=1}^{N} a_n{}^2 \le 1/R \int_{-R}^{R} f(x) Cos^2 dx \ge 1$$

$$\sum_{n=1}^{N} b_n^2 \le 1/R \int_{-R}^{R} f^2 Cos(x)dx$$

قضيه:نشان دهيد كه سري $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{ax^2+bx^2}$ گرا است:

اثبات:اگر b_n, a_n ضرايب بسط فوريه ي $f(x)$ باشند دار :

$$a_n = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} \beta(x)Cosnx \quad , \quad b_n = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} \beta(x)\sin nxdx$$

حال ضرايب α_n , β_n را به صورت زير تعريف مي كنم:

$$\alpha_n = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nxdx \quad , \quad \beta_n = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)Sinnxdx$$

با انتگرال گ ي جزء به جزء دار : $\alpha_n = a_n \times n \quad , \quad \beta_n = nb_n$

حال براي نشان دادن گرايي $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_m 2 + b_n 2}$ مقدار S_N را بصورت زير تعريف مي كنيم.

$$S_N = \left(\sum_{n=1}^{N}\sqrt{a_n 2 + b_n 2}\right)^2$$

نشان مي دهيم كه S_N به ازاء هر مقدار N گراست:

$$S_N = \left(\sum_{n=1}^{N}\left(a_n^2 + b_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\alpha_n^2}{n^2} + \frac{\beta_n^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 =$$

$$S_N = \left(\sum_{n=1}^{N}\left(1/n^2\left(a_n^2 + b_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)^2 < \left(\sum_{n=1}^{N} 1/n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{N}\left(\alpha_n^2 + \beta_n^2\right)\right)$$

حال بايد اين نامساوي توجيه شود.

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\alpha_n^2 + \beta_n^2\right) \qquad \sum_{n=1}^{N} 1/n^2$$

اما گراست و هم طبق ۱و۲ گرا هستند.البته تر است بگوئيم

دود هستند .بنابراين نز دود مي باشد.سپس سري $\sum_{n=1}^{N}(\alpha_n^2+\beta_n^2)^{1/2}$ گراست.

قضيه پارسوال: طبق اين قضيه انرژي متوسط $f(x)$ در فاصله $(-\pi,\pi)$ بر حسب ضرايب بسط فوريه قابل اسبه است.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1} am \quad Cosbx + bn \quad \sin nx\right)dx$$

$$=\frac{a_0}{2}\times\frac{1}{\eta}\int f(x)dx+\sum an(\frac{1}{\eta}\int_{-\eta}^{\eta} f(x)Cos\,nx\,dx)+\sum_{n=1}^{\infty} b_n\left(\frac{1}{\eta}\int_{-\eta}^{\eta} f(x)Sin\,cx\,dx\right)$$

$$=\frac{1}{\eta}\int_{\eta}^{\eta}\frac{a_0}{2}f(x)dx+\sum_{n=1} a_n\frac{1}{\eta}\int_{\eta}^{\eta} f(x)Cosnxdxt+\sum_{n=1} b_n\frac{1}{\eta}\int_{\eta}^{\eta} f(x)Sinnxdx$$

$$=\frac{a_o^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} an^2+\sum_{n=1}^{\infty} bn^2$$

(از خواص بسط فوريه) پس $\frac{1}{\eta}\int_{-\eta}^{\eta} f^2(x)dx=\frac{a_o^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(an^2+bn^2\right)$

مشتق پذيري و انتگرال بسط فوريه:

اگر $f(x)$ تابع قطعه اي پيوسته در فاصله $(-\eta,\eta)$ باشد و داراي بسط فوريه زير باشد:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,Cos\,nx+\sum_{n=1}^{\infty} b_n Sin\,nx$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)Cos\,nx\,dx \quad , \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)Sin\,nx\,dx$$

آنگاه انتگرال تابع $f(x)$ بصورت زير اسبه مي شود:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)du=\frac{a_0}{2}(x+\pi)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left(a_n Sin\,nx-b_n\left(Cos\,nxt(-1)^{n+1}\right)\right)$$

يع انتگرال بسط فوريه واره قابل اسبه است.

براي مشتق پذيري بسل لازم است كه $f(x)$ در فاصله $[-\pi,\pi]$ تعريف شده باشد و داشته باشيم:

$$f'(x)=f(x)$$

آنگاه $f'(x)$ در نقاطي كه $f''(x)$ موجود است با مشق بسط فوريه برابر خواهد بود:

$$f'(x)=\sum\left(-n\,a_n\,Sin\,nx+nb_n Cos\,nx\right)$$

در فصل قبل حل معادلات لاپلاس به روش جداسازي متغ ها آورده شد $y_t = a^2 y_{xx}(x,t)$

$y(a,t)=0 \rightarrow y(c,t)=0 \qquad y(x,o)=f(x)$

معادلات به فرم زير را به راحد مي توان حل كرد:

$$y_t(x,t)=a^2 u_{xx}(x,t)$$

براي حل معادلات f (x) را بصورت زير در نظر مي گ :

$$u_t(x,t)=a^2 u_{xx}(x,t)$$

$$U(x,t)=u(z,t)+\phi(x)$$

$$U_t(x,t)=a^2 u_{xx}(x,t)+h(x)$$

$$u_t(x,t)a^2(u_{xx}(x,t)+\phi''(x))+h(x)$$

$$a^2\phi''(x)+h(x)=0 \rightarrow \phi''=-1/_{a^2}\, h(x)$$

$$\phi(x)=\frac{-1}{a^2}\iint h(t)dtdv \qquad u_t(x,t)=a^2 u_{xx}(x,t)$$

حل معادله لاپلاس در صفحه (نوسان صفحه)

$$U_{tt}(xyt)=a^2[(Z_{xx})(xy+)+Z_{yy}(xy_+)]$$

$$0<x<a \quad 0,<y<b \quad +>0$$

شرايط مرزي:

$$Z(0,y,t)=0 \qquad Z(a,y,t)=0 \qquad Z(x,0,t)=0$$

$$Z(x,b,t)=0 \qquad Z(x,y,0)=f(x,y)$$

روش :جدا سازي متغ ها:

$$Z(x,y,t)=X(x).Y(y).T(t)$$

$$XY\,T''=a^2(x''yt+XY''T) \Rightarrow \frac{T''}{a^2T}=\frac{x''}{x}+\frac{y''}{y}$$

بنابراين دار :

انطور كه قبلاً گفتيم اين معادله صرفاً براي $\lambda<0$ برقرار است: $\frac{T''}{a^2T}=-\lambda^2$

$$T''=-a^2\lambda^2T$$

$$\frac{X''(x)}{x(x)}+\frac{y''}{y}=-\lambda^2 \rightarrow \frac{X''}{X}=\frac{-y''}{y}-\lambda^2=\begin{cases}+\eta^2\\0\\-\eta^2\end{cases}$$

پس دار :

$$\begin{cases} x(0)=0 & x(a)=0 \\ y(0)=0 & y(b)=0 \end{cases}$$ شرايط مرزي

حل:

$$\frac{X''}{X}=-\eta^2 \Rightarrow X''(x)=-\eta^2 X \Rightarrow X = BSin\eta x + ACos\eta x$$

$$X(a)=0 \rightarrow A=0$$

$$X(a)=0 \rightarrow o = BSin\ \eta a \Rightarrow \eta a = x\eta \Rightarrow \eta = \frac{n\eta}{a}$$

$$\Rightarrow X_n(x) = Sin = (\frac{n\eta}{a})x$$

$$\frac{y''}{y}-\lambda^2 = -\eta^2 \Rightarrow \frac{y''}{y} = \lambda^2-\eta^2 \Rightarrow y'' = (\lambda^2-\eta^2)y$$

پس براي اينكه اين رابطه جواب داشته باشد ،مطابق بالا بايد ضرايب $\lambda^2-\eta^2$ منفي باشد.

$$y(0)=0$$
$$y(b)=0$$

$$y''=-(n^2\lambda^2)y$$

$$y=c\sqrt{n^2-\lambda^2}y+DSin\sqrt{\eta^2-\lambda^2}y$$

$$\sqrt{\eta^2-\lambda^2}=m\eta/b \Rightarrow \eta^2-\lambda^2=\left(\frac{m\eta}{b}\right)^2 \Rightarrow \lambda^2=\left(\frac{n\eta}{a}\right)^2-\left(\frac{m\eta}{b}\right)^2$$

$$\Rightarrow \lambda = \eta\sqrt{\frac{n^2}{a^2}-\frac{m^2}{b^2}}$$

پس η,λ بدست مي آيند.

$$\gamma_m = Sin\left(\frac{m\eta}{b}\right)y$$

۱-اگر $z_1=2\lambda$ $\quad Z_2=1-\lambda$ $\quad Z_3=3-2\lambda$ مطلوب است:

الف) $-1+i$ $\quad$ ب) $1+\sqrt{3i}$ $\quad$ ج) $3i$

۲-فرم قط اعداد تصات زير را نشان دهيد:

الف) $-1+i$ ب) $1+\sqrt{3}i$ ج) $3i$

۳-اگر $Z_1 = 2e^{i\pi}$, $Z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{3}}$, $Z_3 = se^{\frac{i}{u}}$ مطلوب است:

الف) $\frac{Z_1}{Z_3}$ ب) $Z_1\overline{Z_2}$ ج) $Z^4 - 2z^2 + 4 = 0$

٤-با استفاده از قانون دو مقدار $Sin3\theta$, $Cos3\theta$ را بيابيد

٥-نشان دهيد روابط زير برقرار است:

الف) $\mathrm{Re}(iz) = -\mathrm{Im}\, z$ ب) $\mathrm{Im}(iz) = \mathrm{Re}\, z$

ج) $\overline{iz} = -i\bar{z}$ د) $\overline{\overline{Z}+3i} = z-3i$

٦- موعه نقاطي را پيدا كنيد كه در شرايط زير صدق كنند:

الف) $\mathrm{Re}(\bar{z}-i) = z$

ب) $|z-i| = |z+i|$

۷-اگر $Z_1Z_2 = 0$ ثابت كنيد حداقل يكي از آ ا صفر است.

۸-ريشه معادلات زير را پيدا كنيد:

الف) $Z^2 + 4 = 0$ ب) $Z^{\frac{2}{3}} + 3i = 0$ ج)

۹-نشان دهيد هذلوي $x^2 - y^2 = 1$ را مي توان بصوت $z^2 + z^{-2} = 2$ نوشت.

۱۰-با استقراء فرمول چند له اي متقابل

$$(1+z)^n = 1 + \frac{n}{i}z + \frac{n(n-1)}{2i}z^2 + \ldots\ldots \frac{n(n-1)(n-2)+\ldots.(n-k+1)}{ki}z^x + \ldots\ldots + z^n$$

را كه در آن n عددي صحيح و مثبت است بيابيد.

$z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ را به طريق برداري

مشخص كنيد.

الف) $z_{1=} = (-3,1)$ $z_2 = (1,4)$

ب) $z_1 = x_1 + iy_1$ $z_{2=} = x_{1-}iy_1$

۱۲-نشان دهيد:

$$|(2\bar{z}+5)(\sqrt{2}-i)| = \sqrt{3}|2z+5|$$

۱۳-ثابت كنيد: $|\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z| < \sqrt{2}|z|$

۱٤-يك مقدار از argz را بيابيدهرگاه:

$$Z = \frac{i}{-2-2i} \qquad Z = \frac{-2}{1+\sqrt{3}i}$$

الف)   ب)

از خواص مربوط به فضاي برداري داشتيم كه اگر : g , f دو بردار بصورت زير باشند

$$\vec{f}=(a_1,a_2,a_3) \qquad \vec{g}:(b_1,b_2,b_3)$$

در اين صورت خواص زير را دار :

$$\vec{f}.\vec{g}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \qquad |f|^2=f.f=a_1^2+a_2^2+a_3^2$$

$$\vec{f}.\vec{g}=\left|\vec{f}\right|.\left|\vec{g}\right|.Cos\theta \qquad \left|\vec{f}-\vec{g}\right|=\left((a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)\right)^{1/2}$$

$$f+g\Rightarrow \vec{f}.\vec{g}=0 \qquad |f|=1\Rightarrow f=\text{بردارنرمال}$$

اگر $\phi_1,\phi_2,........,\phi_n$ موعه برداري ارتوگونال باشند يع :

$$<\phi_i,\phi_J>=0 \quad , \quad <\phi_i\phi_i>=|\phi_i|^2$$

در اين صورت بردارهاي $\frac{\phi_1}{|\phi_1|},\frac{\phi_2}{|\phi_2|},..........,\frac{\phi_n}{|\phi_n|}$ موعه بردارهاي ارتونرمال هستند.

ترجيحاً لازم است كه بردارهاي $\phi_1........\phi_n$ از هم مستقل باشند .چون در غ اين صورت يكي را بر حسب ديگري مي توان نوشت و صفر داخلي آ ا صفر واهد شد.

هر بردار در فضاي ا اد شده بوسيله اين بردار را مي توان با تركيب خطي از اين بردارها بدست آورد.

$$f=c_1\phi_1+c_2\phi_2,........,c_n\phi_n$$

وي اسبه ضرايب بصورت زير است:

$$C_K<\phi_k\phi_k>=<f.\phi_k>\Rightarrow C_k=\frac{1}{\|\phi_k\|}<f,\phi_k>$$

استنتاج براي فضاي توابع:

اگر f , g توابعي در فاصله (a,b) و به فرم قطعه اي –پيوسته باشد(pwc) ،چنانچه فاصله را به Δx هاي كوچك تقسيم كنيم ،خواهيم داشت:

$$f=(f_1,f_2,........,f_n)$$
$$g=(g_1,g_2,........,g_n)$$

ضرب برداري را بصورت زير تعريف مي كنيم كه f , g:

$$(f,g)=\sum f_K g_K \Delta x_K$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}(f,g)=\int_a^b - f(x)g(x)dx$$

كه اين تعريف ضرب داخلي براي توابع مي باشد.

ناحيه a ,b را ضرب داخلي روي آن تعريف مي شودFundamental interval يا بازه ي اساسي مينامند.

خواص زير براي ضرب داخلي توابع برقرار است:

$$(f,g)=(g,f)$$

$$(f,g+h)=(f,g)+(f,g)$$

$$(cf,g)=c(f,g)$$

$$(f,f)=\|f\|^2\geq 0 \to \|f\|=\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)$$

$$(f,g)=0\Rightarrow f+g$$

$$|f-g|^2=\int_a^b (f-g)^2\,dx$$

$(f,g)=1\Rightarrow$ f نرمال مي باشد

مثال:

$$<\Psi_i(x,\Psi_j(x))>=2/c<\Psi_i\Psi_j>=\delta(i,j) \quad 0<x<c \qquad \Psi_n(x)=Sin\frac{n\pi x}{c}$$

حال دسته توابع $\phi_i=\sqrt{\frac{2}{c}}Sin\frac{n\pi x}{c}$ دسته توابعي از ارتونرمال هستند زيرا:

مثال:دسته توابع $\phi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{c}}\;Cos\frac{n\pi x}{c}$, $\phi_0(x)=1/\sqrt{c}$ دسته توابع ارتونرمال هستند. $0<x<c$

مثال:دسته توابع $\phi_0=1/\sqrt{2c}$, $\phi_{2_{n-1}}=1/\sqrt{c}\,Cos\frac{n\pi x}{c}$, $\phi_0(x)=1/\sqrt{c}\,Sin\frac{n\pi x}{c}$
دسته توابع از ارتونرمال در(-C,C) هستند.

روش كلي فوريه براي بسط توسط توابع ارتونرمال:

$$f=c_0\phi_0+c_1\phi_1+........+c_k\phi_k+........+c_n\phi_n$$

كه $\quad C_k=<f.\phi_k> \quad k=0,1,....., \quad C_k=\int_a^b f(x)\phi_k(x)dx$

مثال از اسبه ضرايب:

$$f(x)=C_0\frac{1}{\sqrt{2c}}+C_1\frac{1}{\sqrt{2}}Cos\frac{n\pi x}{c}+C_2\frac{1}{\sqrt{2}}Sin\frac{n\pi x}{c}+.........$$

$$C_k=<f(x).\frac{1}{\sqrt{c}}Cos\frac{n\pi x}{c}>=\frac{1}{\sqrt{c}}\int_{-c}^{c}f(x)Cos\frac{n\pi x}{c}dx$$

كه ان ضرايب سري فوريه است. $a_k=\frac{ck}{\sqrt{c}}=1/c\int_{-c}^{c}f(x)Cos\frac{n\pi x}{c}dx$

قضيه اگر $\phi_n(x),.....,\phi_2(x),\phi_1(x)$ توابع از ارتونرمال باشد،يع :

$$<\phi_m(x).\phi_k(x)>=\begin{cases}0 & k\neq m\\ c_k^2=1 & k=m\end{cases}\qquad k,m=1,2,.....$$

و $\phi(x)$ يك تركيب خطي از توابع ارتوگونال $\phi_n(x),.......\phi_1(x)$ باشد،

$$\phi(x)=\delta_1\phi_1(x)+.......+\delta_n\phi_n(x)$$

و نيز اگر f (x) يك تابع در ان بازه ي توابع ارتوگونال باشد، آنگاه تعريف مي كنيم ترين م تابع f (x) توسط ϕ_k ها كه k=1,2,…….n باشد ،تابعي انند $\phi_{(x)}$ است به طوري كه ضرايب ان ضرايب فوريه باشد.

اثبات:اگر فرض كنيم $\delta_n,.......\delta_2,\delta_1$ اعداد د واهي باشد و $\phi(x)$ تابع م f (x) f باشـد لازم است تا اندازه خطا مينيمم شود $|f(x)-\phi(x)|$

اين مقدرا بانام خطا يع $|f(x)-\phi(x)|$ ناميده مي شود.

$$E=|f(x)-\phi(x)|=\left(\int_a^b f(x)-\phi(x)^2dx\right)^{1/2}$$

$$E^2=|f(x)-\phi(x)|^2=\int(f(x))-\phi(x)^2\,dx$$

$$\int_a^b f^2(x)dx-2\int_a^b f(x)dx+\int_a^b\phi^2(x)dx$$

$$=|f(x)|^2-2\int_a^b f(x)\sum_{k=1}^{n}\delta_k\phi_k(x)dx+\int_a^b\left(\sum_{k=1}^{n}\delta_k\phi_k(x)\right)^2dx$$

$$=|f(x)|^2-2\sum_{k=1}^{n}\delta_k\int_a^b f(x)\phi_k(x)dx+\int_a^b\sum_{k=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\delta_k\phi_k(x)\delta_\ell\phi_\ell(x)dx$$

براي Min كردن E^2 بايد ت راست تابع Min شود.انچه متغي است δ_k است .يعـ $\phi(x)$ ساخته شده با ضرايب δ_x وق ترين م است كه ضرايب δ_k ان ضرايب فوريه

$$|f|^2E^2=\sum|\phi_k|^2+2\sum_{k=1}^{n}\delta_k c_k=|f|^2+\sum_{k=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(\delta_k^2-2c_k\delta_k+c_k^2)-\sum_{k=1}^{n}c_k^2$$

باشند.

$$\delta_k = ck$$

$$= |f(x)|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \delta_K c_k + \sum_{k=1}^{n} \delta_k^2 (1)$$

پس

$$c_k = < f(x)\phi_k(x) >$$

$$\delta_k = c_k \Rightarrow E^2 = \left\| f|^2 \right| - \sum_{k=1}^{n} C_k^2$$

و چون $E^2 > 0$ (انتگرال از يك تابع مثبت)پس:

$$|f(x)|^2 \geq \sum_{k=1}^{n} C_k^2 \qquad \forall_n \in N$$ (لذا وق كه $n=\infty$)

به نامساوي فوق نامساوي بسل گويند.

وق $n \to \infty$مي توان نشان داد كه $\lim C_n=0$ به عبار سري $\sum_{k=1}^{n} ck^2$ به ازاء $n \to \infty$ به ت $|f(x)|^2$ گرا مي شود. يع :

$$|f(x)|^2 = \sum_{k=1}^{n} C_k^2$$

موعه $\{\phi_k(x)\}$ روي (a,b) را كامل گوئيم اگر براي هر تابع f با دامنه (a,b) داشته باشيم:

$$\sum_{k=1}^{n} C_k^2 = |f|^2$$

يع خطا =0

بنابراين م با موعه اي از ارتونرمال كامل به خطاي صفر مي ا امد.

مثال: موعه اي توابع ارتونرمال هندسي:

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \phi_{2n-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} Cos\, nx, \quad \phi_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} Sin\, nx$$

اين توابع روي $(-\pi,\pi)$ كامل هستند.

C هاي زوج:ضرايب b_n

C هاي فرد :ضرايب a_n

انواع ديگر ارتوگوناليس :

گوئيم توابع $\phi_k(x)$ در (a , b) با وزن p(x) ارتوگونال است اگر

$$\int_a^b P(x)\phi_k(x)\phi_m(x)dx = \begin{cases} 0 & m \neq k \\ cte & m = k \end{cases}$$

اين ارتوگونايس را مي توان معادل با ارتوگوناليس توابع $\sqrt{p(x)}\phi_k(x)$ گرفت.مثلاً توابع بسل به
اين صورت تعريف مي شوند و توابعي كه داراي دومتغي هستند نيز مي توان ت توابع پايه
$\phi_{mn}(x,y)$ بسط داد به گونه اي كه ضرب داخلي مربوط به صورت سطحي زير تعريف شود.

$$\iint_R \phi_{mn}(x,y) \quad \phi_{ek}(x,y)dxdy = \begin{cases} 0 & m \neq e, n \neq k \\ c_{mn}^2 & m = e, n = k \end{cases}$$

حال هر تابع را مي توان بر حسب توابع $\phi_{mn}(x,y)$ بسط داد.
م وق ينه است كه ضرايب ان فوريه باشند.
براي توابع تلف نيز مي توان ارتوگوناليس تعريف ود.

$$\omega = u + iv$$

$$\int_a^b \omega(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dx$$

$$\overline{\omega}(t) = u(t) - iv(t)$$

حال ضرب داخلي را بصورت زير تعريف مي كنيم:

$$< \omega_m(t), \omega_k(t) > = \int_a^b \omega_m(t)\overline{\omega_k(t)} \quad dt = \begin{cases} 0 & m \neq k \\ \int \left(u_m^2(t) + v_m^2(t)\right)dt \end{cases}$$

كه آن را ضرب داخلي هرمتيك گويند.

انتگرال فوريه: تا ال در مورد بسط فوريه براي توابع پريوديك در فاصله $(-2,2)$ صحبت
كرده ا .نشان داد كه م ينه اي براي توابع در فضاي هندسي موجود است.

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n Cos\frac{n\eta x}{c} + b_n Sin\frac{n\eta x}{c}$$

$$a_0 = 1/c \int_{-c}^{c} f(x)dx \qquad a_n = 1/c \int f(x) Cos\frac{n\eta x}{c} dx$$

$$b_n = 1/c \int_{-c}^{c} f(x) Sin\frac{n\eta x}{c} dx$$

با جايگذاري دار كه:

$$\frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(s)ds + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c}\left[\int_{-c}^{c} f(s)\cos\frac{n\pi s}{c}\cos\frac{n\pi x}{c}ds + \int_{-c}^{c} f(s)\sin\frac{n\pi s}{c}\sin\frac{n\pi x}{c}ds\right]$$

$$= \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(s)ds + \frac{1}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-c}^{c} f(s)Cos\frac{n\eta}{c}(s-x)dx$$

که ايش جديدي براي سري فوريه است.

حال چنانچه f(x) يك تابع از $(-\infty,\infty)$ باشد و مطلقاً انتگرال پذير باشد يع :

دود باشد:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(s)|ds$$

مي خواهيم ببينيم در شرايط فوق ،بسط فوريه به چه فرم جديدي تبديل مي شود.

براي اين منظور تعريف مي كنيم :

$$\Delta\alpha = \eta/c$$

ت شرايط آورده شده ،بسط فوريه به صورت زير تبديل مي شود:

$$\frac{1}{c}\sum_{n=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)Cos(n\Delta\alpha(x-s))ds = \frac{1}{\eta}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\alpha\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)Cos(n\Delta\alpha(x-s))ds$$

$$\frac{1}{\eta}\sum_{n=1}^{\infty} f(n\Delta\alpha)\Delta x$$

$$1 \qquad = \frac{1}{\eta}\int_{o}^{\infty} F(\alpha,x)d\alpha = \frac{1}{\eta}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)Cos(\alpha(x-s))dsd\alpha$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n\Delta\alpha)\Delta x = \int_{o}^{x} f(x)dx = \quad f(x) = \int_{0}^{\infty}(A(\alpha)Cos\,\alpha x + B(\alpha)Sin\,\alpha x)$$

بنابراين در حال كه $c\to\infty$ بسط فوريه به فرم فوق كه با نام انتگرال فوريه ناميده مي شود ميل مي كند:

$$f(x) = \frac{1}{\eta}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)Cos\,\alpha(s-x)dsdx \qquad -\infty < x < \infty$$

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos\alpha u du \qquad B(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\alpha u du$$

مثال: $f(x) = e^{-2|x|}$ مطلوب است اسبه ضرايب $B(\alpha), A(\alpha)$

$$A(\alpha) = \frac{1}{\eta}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)Cos\,\alpha s ds \qquad B(\alpha) = \frac{1}{\eta}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)Sin\,\alpha s ds$$

$$|bn|n^4 < M \to \left|4bn\,Sin\frac{n\eta x}{c}\right| \to \left|b_n Sin\frac{n\eta x}{c}\right| \le |b_n|$$

$$\le \sum\left|b_n \le \frac{M}{n^4} = M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\right|$$

انتگرال فوریه $e^{-|x|}$ را بنویسید:

روش حل دوم: $f(x)=\int (A(\alpha)Cosx + B(\alpha)Sin\,\alpha x)dx$

$$A(\alpha)= \frac{1}{\eta}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)Cos\,\alpha x\,dx \quad , B(\alpha)= \frac{1}{\eta}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)Sin\,\alpha x dx$$

$$f(x)=e^{-|x|} \qquad -\infty < x < \infty \qquad B(\alpha)= \frac{1}{\eta}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}Sin\,\alpha x\,dx$$

$$f(x)=\int_0^{\infty}(A(\alpha)Cos\,\alpha x + B(\alpha)Sin\,\alpha x)dx \quad \mathrm{Re}\int_o^{\infty} e^{-x}e^{i\alpha x} \qquad B(\alpha)=0, A(\alpha)= \frac{2}{\eta}\int_0^{\infty} e^{-x}Cos\,\alpha x dx$$

$$A(\alpha)= \frac{1}{\eta}\int e^{-|x|}\ Cos\,\alpha x\,dx$$

$$= \frac{2}{\eta}\times \frac{1}{\eta}\left[\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} A(\alpha)\times \frac{\eta}{2}\right]$$

$$\Rightarrow A(\alpha)= \frac{2}{\eta}\left(\frac{1}{\alpha^2}(1-A(\alpha))\right)\Rightarrow \frac{\eta\alpha^2(A(\alpha))}{2} = 1-A(\alpha)\frac{\eta}{2}$$

$$\Rightarrow A(\alpha)=\frac{2}{\eta(\alpha^2+1)}$$

$$e^{-|x|} = \int_0^{\infty}\frac{2}{\eta(\alpha^2+1)}Cos\,\alpha x\,dx \Rightarrow$$

$$\frac{2}{R}\int \frac{Cos\ 5\ x}{1+x^2}dx = \frac{R}{2}e^{-5}$$

$$\int\frac{Cos5\alpha}{1+\alpha^2}d\alpha = \frac{\pi}{2}e^{-5} \to \alpha = x$$

رین :مقدار انتگرال $\int_0^{\infty}\frac{Sin\,2\pi x}{1+x^2}dx$ را بدست آورید.

براي این منظور است که:

$$f(x)=\begin{cases} -e^{-x} & x>0 \\ -e^{-x} & x<0 \end{cases} \qquad \text{جواب} \qquad = \frac{\pi}{2}e^{-2\pi}$$

$$\frac{2}{R}\int\frac{Cos\ 5x}{1+x^2}dx = \frac{R}{2}e^{-5} \to \alpha = x$$

مسأله انتقال حرارت زیر را حل کنید:

$$f(x_0)=\int_0^{\infty}A(\alpha)Cos\,\alpha x_0 + B(\alpha)Sin\,\alpha x_0\,d\alpha$$

$$u_t(x,t)=ku_{xx}(x,t)$$

$$u(0,t)=0 \qquad u(x,o)=F(x) \qquad x>0 \qquad t>0$$

انطور که مشاهده مي شود حوزه تغي ات x تا ايت است. بنابراين روش حل از تبديل در سري فوريه که ان انتگرال فوريه مي باشد بدست خواهد آمد.

$$u(x,t)X(x)T(t\to)\frac{T'(t)}{kt(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=\begin{cases}x^2\\0\\-\lambda^2\end{cases}\Rightarrow \text{غ ق ق}$$

$$U(x_1)=0\to X(0)=0$$

$$X(x)=A\cos(\lambda x)+B\sin(\lambda x)$$

$$X(x)=\sin\lambda x$$

$$T(t)=e-\lambda zkt$$

$$U(x,t)=\int_0^\infty(B\lambda e^{-k\lambda}+Sin\ \lambda x)dx\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}B(\lambda)\sin\lambda xd\lambda=f(x)$$ انتگرال فوريه

$$B(\lambda)=2/R\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\lambda xdx$$

معر توابع بسل و کاربردهاي آنا:

درفرم معادله اي استوانه اي معادله لاپلاس دار :

$$\Delta^2u=p^2\frac{du^2}{dp^2}+p\frac{du}{dp}+(\lambda p^2-v^2)y=0$$

چنان چه در اين معادله به جاي $x=\sqrt{\lambda}p$ تغي متغي دهيم دار :

$$x/\lambda\times\frac{\partial^2u}{\partial p^2}.\frac{\partial x^2}{\partial p^2}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2u}{\partial p^2}=\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)=\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial p}\right).\frac{ex}{ep}$$

اين معادله را معادله ديفرانسيل به نام معادله بسل مي شناسيم:

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{\lambda}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\sqrt{\lambda}=\lambda\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow\frac{x^2}{\lambda}.\lambda\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{x}{\lambda}.\sqrt{\lambda}\frac{dy}{dx}+(x^2-v^2)y=0$$

روش حل این گونه معادلات با استفاده از سریها بود.

سري پیشنهادي بصورت زیر است:

$$y(x) = x^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$$\Rightarrow x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + \left(x^2 - v^2\right) y = 0$$

علت پیشنهاد این این جواب این است که در معادله نقطه ي $x = 0$ يك نقطه تک منظم است چون :

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - v^2\right) y - 0 \qquad y'' + \frac{1}{x} y' + \frac{x^2 - v^2}{x^2} y = 0$$

که مشاهده مي شود نقطه $x=0$ يك نقطه تک است.

$$x^2 \sum_{k=0}^{\infty} (r+k)(r+k-1) a_k x^{r+k-2} + x \sum_{k=0}^{\infty} (r+k) a_k x^{(r+k-1)}$$

$$t\left(x^2 + v^2\right) \sum_{k=0}^{\infty} (r+k)(r+k-1) a_k x^{r+k} = 0$$

در حال که $v = n \qquad n = 1,2,\ldots\ldots,$

$$\sum \left((r+k)(r+k-1) av\, x^{r+k} + (r+k) akx^{r+k} - n^2 akx^{r+k}\right) + \sum akx^{r+k+2} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{r+k} \left((r+k)(r+k-1) + (r+k) - n^2 ak + akx^2\right) = 0$$

در ایت

$$:(r-n)(r+n)a_0 + (r-n+1)(r+n+1)a_1 x + \sum \left((r-n+k)(r+n+k)a_k + a_k - 2\right)x^k = 0$$

$$\Rightarrow a_0 \quad \text{یا} \quad (r+n)(r+n) = 0$$

$$(r-n+1)(r-n+1) = 0 \quad \text{یا} \quad a_1 = 0$$

$$* \Rightarrow a_k = \frac{-1}{(r-n+k)(r+n+k)} a_k - 2$$

در نتیجه توسط رابطه بازگشت $* \Rightarrow a_k = \frac{-1}{(r-n+k)(r+n+k)} a_k - 2$ مي توان ام روابط سري را بدست آورد.چون:

$$r = n \Rightarrow a_k = \frac{-1}{(r-n+k)(r+n+k)} a_k - 2$$

که براي k هاي زوج عدد غ صفر مي باشد.

اما $a_0 \neq 0$ و $a_1, a_{3,} a_{2m}+1=0$

در ايت فرم کلي جواب:

$$a_2=\frac{-1}{2(2n+2)}a_0, a_4=\frac{1}{4(2n+2)(2)(2n+2)}$$

$$a_{2k}=\frac{(-1)^k}{ki(n+1)(n+2)(n+k)2^{2k}}$$

براي اينکه بتوان فرم ساده شده اي براي جواب پيشنهاد کرد ،مقدار a_0 را به صورت زير انتخاب مي کنيم:

$$a_{2k}=\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!2^{n+2k}} \qquad a_0=\frac{1}{n!2^n}$$

پس جواب به فرم زير است :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(x/2\right)^{n+2k}$$

به مقدار اين جواب $y_n(x)$ گويند.

$$y_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(x/2\right)^{n+2k}$$

$y_n(x)$ را تابع مرتبه n ام بسل مي نامند.

اين تابع حل معادله ديفرانسيل مرتبه n مي باشد.

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-n^2\right)y=0 \rightarrow y=y_n(x)$$

براي مثال:حل معادله بسل مرتبه صفر:

$$x^2y''+xy'+x^2y=0 \rightarrow y=y_0(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(x/2\right)^{2k}$$

شکل $y_0(x)$ به صورت زير مي باشد :

انداخ در آب اد y_0است.

$$y_0(x)=1-\left(x/2\right)^2+\frac{1}{(2!)^2}\left(x/2\right)^4+\left(1/3!\right)^2\left(x/2\right)^6 ....\quad .$$

قضيه جواب معادله گن در هرنقطه تابع است.

خاصيت تابع بسل:

خواص توابع بسل:

$$1)\ Cos(xSin\theta)=y_o(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+(-1)^n\right)y_n(x)Cos\phi$$

$$2)\ Sin(xSin\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-(-1)^n\right)y_n(x)Sin\phi$$

پس دار $y2_n(x)=\frac{1}{R}\int_0^R Sin(xSin\phi)Sin(2x-1)\phi\, d\phi$

۳)در حالت کلي $y_n(x)=\frac{1}{R}\int_0^R Cos(n\phi-xSin\phi)d\phi$

با توجه به اينکه

$$y_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-1^k}{K!(x+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

$$x^{-n}y_n(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-1^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

$$4)\frac{d}{dx}x^{-n}y_n(x)=-nx^{-n-1}y_n(x)+x^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\frac{(n+2x)}{2}.\left(\frac{x}{2}\right)^{n-2k-1}$$

$-x^{-n}y_{n+1}(x)$ پس $y'(0)=-y_1(x)$

تابع $y_0(x)$ به صورت زير مي باشد.

$$Y_0(x)=\frac{2}{\pi}[(\log\frac{x}{3}-v)J_0(x)]+\frac{x^4}{x^2}-\frac{x^4}{x^2 4^2}(1+\frac{1}{2})+\frac{x^6}{x^2 4^2 6^2}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})+....$$

$$R(V)=\frac{R(v+1)}{v}$$

$$V\to -1^t \quad V\to -1^t$$

$$V\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{n}}{2}=\min$$

خواص توابع بسل:

$$1)\ Cos(xSin\theta)=y_o(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+(-1)^n\right)y_n(x)Cos\phi$$

$$2)\ Sin(xSin\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-(-1)^n\right)y_n(x)Sin\phi$$

پس دار $$y2_n(x) = \frac{1}{R}\int_0^R Sin\,(xSin\,\phi)Sin\,(2x-1)\phi\,d\phi$$

در حالت کلي(۳ $$y_n(x) = \frac{1}{R}\int_0^R Cos\,(n\phi - xSin\,\phi)d\phi$$

با توجه به اينکه

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1^k}{K!(x+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

$$x^{-n}y_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-1^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

$$4)\frac{d}{dx}x^{-n}y_n(x) = -nx^{-n-1}y_n(x) + x^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\frac{(n+2x)}{2}.\left(\frac{x}{2}\right)^{n-2k-1}$$

$-x^{-n}y_{n+1}(x)$ پس $y'(0) = -y_1(x)$

روابط زير از خواص توابع بسل مي باشند:

$$1)\,xy_n(x) = ny_n(x) - xy_{n+1}(x)$$

$$2)\,xy_n(x) = -ny_n(x) + xy_{n-1}(x)$$

$$xy_{n+1}(x) = 2ny_n(x) - xy_{n+1}$$

بررسي صفرهاي تابع بسل :

تابع $y_n(x)$ داراي ريشه هاي نا دود است (از نظر تعداد)که در مکان هاي مشخص هستند.

$y_n(x) = 0 \rightarrow$ ريشه ها $= \{\alpha_{n0}, \alpha_{n1}, ..., \alpha_{A}\}$

$\phi a \circ \rightarrow y_n(\alpha ni) = 0$

ديد که شکل تابع y_o از انداخ سنگ در آب ناشي مي شد.

$$b_n = \frac{2}{c}\int_o^c \frac{f(x) - f(-x)}{2} Sin\frac{N\eta x}{c}dx = \frac{1}{c}\left[\int_o^c f(x)Sin\frac{N\eta x}{c}dx - \int_o^c f(x)Sin\frac{N\eta x}{c}dx\right]$$

$$x = -x \qquad dx = -dx$$

$$\int_o^c f(x)Sin\frac{N\eta x}{c}(-dx)$$

در خارج ازاين فاصه بسط سينوسي $\sum b_n Sin\,nx$ اولاً داراي پريود 2πاست.و فرض كنيد كه $f(x)$ يك تابع قطعه اي پيوسته در فاصله ي (-۲،۲) انطور كه مي دانيم هر تابع را مـي تـوان بصورت ع در تابع زوج و فرد نوشت.

$$f(x)=h(x)+g(x) \qquad \text{که} \qquad g(-x)=-g(x)\ , \quad h(-x)=h(x)$$

$$h(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2} \qquad g(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

تابع $h(x)$ يك تابع زوج است بنابراين چنانچه$h(x)$را در فاصله (۲،۰) با بسط كسينوسي تقريب بزنيم ،تابع $h(x)$ در ناحيه(-۲،۲) تقريب زده خواهد شد.($h(x)$و كينوس هر دو زوج اند).

$$h(x)={a_o}/{\eta}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n Cos\frac{n\eta x}{c} \qquad a_n={2}/{c}\int_o^c h(x)Cos\frac{n\eta x}{c}dx$$

$$f(x)=h(x)+g(x) \qquad (-c,c)$$

پس

$$f(x)={a_o}/{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n Cos\frac{n\eta x}{c}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n Sin\frac{n\eta x}{c} \qquad \text{که} \qquad x\in(-c,c)$$

كه اين بسط تابع فوريه $f(x)$ در فاصله (-۲،۲) مي باشد.حال بايد ضرايب را پيدا ائيم.

$${2}/{\eta}\int_0^c SN(x)\,Sinmxdx = bm$$

$$a_n={2}/{c}\int_o^c\frac{f(x)+f(-x)}{2}Cos\frac{n\eta x}{c}dx={1}/{c}\left[\int_o^c f(x)Cos\frac{n\eta x}{c}dx+\int_o^c f(-x)Cos\frac{n\eta x}{c}dx\right]$$

فرض كنيد ناحيه C ناحيه اي بصورت زير باشد و $\beta(Z)$ بغ از نواحي مشخص شده لميلي باشد آنگاه انتگرال $\beta(Z)$

$$\int_B \beta(Z)dZ=0$$

روي ناحيه D فوق برابر صفر است.

$$\int_C\frac{dZ}{Z^2\left(Z^2+q\right)}=\phi$$

گوئيم انتگرال $\int\beta(Z)dZ$مستقل از ميسر است اگر

$$\int_C\beta(Z)dZ=\int_a^b\beta(Z)dZ=F(Z(b))-F(Z(a))$$

البته مي توان گفت يك نام $\beta(z)$ ولداي انتگرال مستقل از مس   است اگر بنام ولداي تابع اوليه باشد. مثال:

$$\beta(z)cz^2 \to F(z)c\frac{z^3}{3}$$

$$\int_0^{1+i} z^2 z = \frac{1}{3}(1+i)^3 +$$

$$\int_{-2i}^{2i} \frac{dz}{z} = \log z \int_{-2i}^{2i} = \log 2i - \log(-2i) = tui$$

انتگرال كوشي

اگر $\beta(z)$ يك تابع   ليلي در C باشد و تنها در نقطه   در C   ليلي نباشد آنگاه

$$\int_c \frac{\beta(\overline{z})dz}{z - z_0} = 2\pi i \qquad \beta(z_0)$$

مثال:

$$\int_c \frac{\beta(\overline{z})dz}{z - z_0} = 2\pi i \quad \beta(z_0)$$

$$\int_c \frac{z dz}{(q - z)(z - i)} = 2\pi i \frac{i}{q+1} = \frac{-2\pi}{10}$$

$$\int_c z_0 \beta(z) dz = z_0 \int_c \beta(z) dz$$

$$\int_c (\beta(z + g|t|))dz = \int_c \beta(z) a z + \int_c g(z) dz$$

$$\left| \int_c \beta(z) dx \right| \le \int_a \; |\beta(z(t)Z')| dt$$

مثال:

$$Ic\int_{C1} z^2 dz$$

؟ انتگرال از______تا_______بصورت هاي زير

$$I_1 = \frac{2}{3} + \frac{11}{3} i$$

$$I_2 = \frac{2}{3} + \frac{11}{3} i$$

$$Ic\int_C Z^2 dZ$$

طبق قضيه كوشي

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial X} - \frac{\partial R}{\partial y}\right)dxdy$$

$$\int_C \beta(Z)d\delta = \int_C Ndx - Vdy + i\int Xdx + udy$$

$$= \iint_R \left(\frac{-\partial u}{\partial y} - \frac{\partial n}{\partial x}\right)dxdy + i\iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)dxdy$$

با توجه به اينكه اگر C ناحيه بسته باشد و $\beta(Z)$ ليلي باشد

$$u_x = v_y$$

$$Xy = -V_X$$

لذا طبق قضيه اگر $\beta(Z)$ ليلي باشد انتگرال آن روي هر ناحيه C اي كه حـد $\beta(Z)$ حـد رو و درون C

ليلي باشد برابر با صفر است

مفهوم انتگرال:

$$\omega(t) = X(t) + iy(t)$$

$$\int_a^b \omega(t)d + \int_a^b X(t)dt + o\int_a^b y(t)dt$$

مثال:

$$\int \theta^{i2t}dt = \sqrt{3}/2 + i/4$$

خواص:

$$\mathrm{Re}\int\int_a^b \omega(t)dt = \int_a^b \mathrm{Re}|Z(t)|dt$$

$$\int Z\omega(t)dt = Z\int_a^b \omega(t)$$

$$r_0 e^{\theta_0} = \int \omega(t)dt \Rightarrow \int \left(e^{-u\theta_0}\omega(t)\right)dt$$ يا $$r_o c\int \mathrm{Re}\left(e^{-1\theta_0}\omega(t)\right)dt$$!؟

$$\left|\int_a^b X(t)dt\right| \le \int_a^b |\omega(t)|dt$$

Line Integral

انواع انتگرال ۱)

$$\int_C \beta(t)dt \quad \text{يا} \quad \int_{Z_1}^{z_2} \beta(t)dt$$

با فرض اينكه Z روي يك خط حركت مي ايد.

$$Z = Z(t)$$

$$\int_a^b \beta(Z)dt = \int_{Z_1}^{Z_1} \left(u / x(t) + iv(x(t), y(t))\right)(dX' + 1dy')dt$$

$$= \int_{Z/t_0}^{Z/t_1} (Ux' - Vy') + i(uy' + Vx')dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} (Ux' + Vy')dt + \int_{t_0}^{t_1} (Uy' + Vx')dt$$

$$\int_{-C} \beta(Z)dZ - \int_C \beta(Z)dZ$$

حل معادله لژاندر:

معادله $(1 - x^2)y'' - 2xy' + y = 0$ را با نام معادله ثراندر مي شناسيم.

با حل معادله فوق با روش سري ها دار .اين بنام حد فاصله تعريف مي شود

توا اي معادله به صورت زير هستند

$$y_1 = a_0 + \sum_{h-1}^{\infty} a_2 h \times 2h$$

$$y_2 = a_1 x + \sum_{h-1}^{\infty} a_{2h+1} \times 2h + 1$$

بنام ثراندر از مرتبه n را به صورت $P_n(x)$ تعريف مي كنيم كه در آن $\lambda = n(n+1)$

$$P_n(x) - \frac{1}{2^n} \sum \frac{(-1)^x (2n - 2h)!}{h!(n - 2h)h_{\bullet}(n + x)} X^{n-2h} \qquad n = 0,1,....$$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = X$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(3S-3)$$

$$P_4(x)=\frac{1}{2}\left(3s\times 4-30x^2+3\right)$$

خواص دار که $P_n(-x)=(-1)P_n(x)$

!؟اگر حل معادله $\left(i-x^g\right)y^n-3\times y'+n(n=1)y=0$ جوا ا به صورت توابع لژاندر مي باشد.

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)+P_n(x)d\times=\int mn \qquad m\neq n$$

$$\phi_n(x)=\frac{P_n(x)}{|P_n(x)1|}\rightarrow\{\phi_n(x)\}$$

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n}\frac{1}{n^1}\frac{d^n}{d\times n}\left(x^2-1\right)^n$$

$$P_{n+1}(x)-xp_n=\frac{n}{2^n n!}D^{n-1}u^n\ ,\quad u=\left(x^2-1\right)$$

$$P'_{n+1}(x)-P'n-1(x)=(2n+1)P_n(x)$$

$$|1P_n(x)1|=\sqrt{\frac{2}{2n+1}}\rightarrow\phi_n(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}P_n(x)}$$

$$\beta(x)=\int_{n=0}^{\infty}A_nP_n(x)\Rightarrow A_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}\beta(x)P_n(x)dx$$

کاربرد ثراندر درحل مسائل معادلات با مشتقات جزئي در تصات کروي مي باشد.

$$r\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru)+\frac{1}{Sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(Sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)=0 \qquad 0<r<c\ ,\ 0<\partial<\pi$$

$$V(c,\partial)=F(\theta)$$

باجداسازي به معادله ثراندر مي رسيم.

$$V(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\left(\frac{r}{c}\right)^nP_n(Cos\theta)$$

$$=1/c=\left[\int_o^c f(x)Cos\frac{n\eta x}{c}dx+\int_{-c}^{o}f(x)Cos\frac{n\eta x}{c}dx\right]=1/c\int_{-c}^{c}f(x)Cos\frac{n\eta x}{c}dx$$