Subject:
Year. Month. Date. ( )

$y = x^2 + c \Rightarrow y' = 2x$

تشکیل
برای تعیین معادله دیفرانسیل یک دسته منحنی یک پارامتری باید پارامتر بین معادله و مشتق آن حذف شود

$y = cx^2 + 4 \qquad y' = 2cx \Rightarrow y = \frac{y'}{2}x + 4$

$y = x^2 + ax + b \qquad y = ax^2 + bx + 5$

$y' = 2x + a \qquad y' = 2ax + b$

$\boxed{y'' = 2} \qquad y'' = 2a$

اگر یک دسته منحنی n پارامتر داشته باشد و بخواهیم معادله دیفرانسیل آن را پیدا کنیم باید n بار پارامترها را بین خودش و مشتقاتش حذف کنیم

مسیرهای قائم

هرگاه هر دو منحنی از دسته منحنی‌های دو معادله بر هم عمود باشند یکی از منحنی‌ها را مسیرهای قائم دسته منحنی دیگر می‌گوییم

$y = ax \qquad y^2 + x^2 = c^2$

معادله معلوم ← مسیر اصلی
معادله‌ای که به دست می‌آید ← مسیر قائم

Subject:
Year. Month. Date. ( )

قدم 1 برای تعیین مسیرهای قائم باید معادله دیفرانسیل مسیرهای اصلی را تشکیل داد

$y = ax \qquad y' = a \qquad y' = \frac{y}{x}$

قدم 2 تشکیل معادله دیفرانسیل مسیر قائم.

هرکجا y' داریم آن را با $-\frac{1}{y'}$ عوض می‌کنیم:

$-\frac{1}{y'} = \frac{y}{x} \Rightarrow -\frac{dx}{dy} = \frac{y}{x}$

$\Rightarrow y\,dy + x\,dx = 0 \qquad y^2 + x^2 = c^2$

معادله دیفرانسیل مرتبه اول:
الزاماً باید y' را داشته باشد

$F(x, y, y') = 0$

مرتبه اول
1. نسبت به مشتق حل می‌شوند $\qquad 4xy' + 3y - 1 = 0$
2. نسبت به مشتق حل نمی‌شوند $\qquad \cos y' + 3xe^{y'} - 2y = 2$

1- نسبت به مشتق حل می‌شوند:
به فرم زیر است:

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

تابع حاصلضرب دو تابع یکی از x و دیگری از y است $\qquad h(x,y) = h_1(x) \cdot h_2(y)$

$\Rightarrow f_1(x) f_2(y) dx + f_3(x) f_4(y) dy = 0 \qquad \times \frac{1}{f_2 f_3}$

معادله تفکیک پذیر است $\qquad H(x)dx + G(y)dy = 0 \Rightarrow$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

اگر معادله تفکیک پذیر بود آنگاه

$$H(x)\,dx + G(y)\,dy = 0$$

$$\int + \int = c$$

-1

$$(1+x^3)\,dy - x^2 y\,dx = 0$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{x^2}{1+x^3}\,dx \Rightarrow \ln y = \frac{1}{3}\ln(1+x^3) + \ln c$$

$$\ln y^3 = \ln(1+x^3) + \ln c \Rightarrow y^3 = c(1+x^3)$$

-2

$$x\frac{dy}{dx} + y^2 = 4 \Rightarrow x\,dy + (y^2-4)\,dx = 0$$

$$\frac{dy}{(y^2-4)} + \frac{dx}{x} = 0 \qquad \frac{1}{4}\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right| + \ln x = \ln c$$

$$\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right| + \ln x^4 = \ln c \Rightarrow \frac{y-2}{y+2} = \frac{c}{x^4}$$

3- حد جواب مسأله زیر وقتی $\infty \leftarrow x$ برابر است با

$$y' = 2x\cos^2 y \qquad y(0) = \frac{\pi}{4}$$

1- $-\pi$

2- $\frac{\pi}{4}$

3- ✓ $\frac{\pi}{2}$

4- ∞

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = 2x\,dx \qquad \operatorname{tg} y = x^2 + c \qquad x=0 \Rightarrow y = \frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow c = 1$$

$$\Rightarrow y = \operatorname{Arc\,tg}(x^2+1) = \frac{\pi}{2}$$
$$x \to \infty$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

4- جواب عمومی معادله زیر را بدست آورید

$$x(y-1)\frac{dy}{dx}=y \Rightarrow \frac{y-1}{y}dy=\frac{dx}{x}$$

$$y=\ln xy+c$$

معادلاتی به صورت معادله تابعی از یک خط:

$$y'=f(ax+by+c)$$

$$y'=2x+y-1 \quad , y'=\tan(3x+4y)+2 \quad , y'=e^{4x-y+3}+\sqrt{4x-y+3}-1$$

$$u=ax+by+c \quad , y'=f(u)$$

اگر y' تابعی از یک خط شد می توان خط را به صورت u گرفت و معادله را به معادله تفکیک پذیر تبدیل کرد

:5 $y'=(y-4x)^2 \Rightarrow u=y-4x \Rightarrow u'=y'-4$

$$\Rightarrow y'=u^2 \Rightarrow u'+4=u^2 \qquad \frac{du}{u^2-4}=dx$$

$\frac{1}{4}\ln$

:6 $y'=(x+y)^2 \qquad u=x+y \Rightarrow y'=u'-1$

$$u'-1=u^2 \qquad \frac{du}{u^2+1}=dx \qquad \tan^{-1}u=x+c$$

 $x+y=\tan(x+c)$

6

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$y' = e^{2x+y-1} - 2 \Rightarrow u = 2x+y-1 \qquad u' = 2 + y' \qquad :7$$

$$u' - \cancel{2} = e^{u} - \cancel{2} \qquad e^{-u}\,du = dx$$

$$-e^{-u} = x + c$$

2: همگن

همگن است $\Longleftarrow$ $h(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\alpha} h(x, y)$

در رابطه $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ اگر دو ضریب P و Q همگن با درجه همگنی مساوی باشند $\Leftarrow$ معادله بارا همگن است و اگر همگن بود می توان بجای $y = vx$ قرار داد

$$\Rightarrow y = vx \Rightarrow dy = v\,dx + x\,dv$$

:8

$$x\frac{dy}{dx} = x\,tg\left(\frac{y}{x}\right) + y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = tg\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x}$$

$$\cancel{v} + x\frac{dv}{dx} = tg\,v + \cancel{v}$$

$$cotg\,v\,dv = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln \sin v = \ln cx$$

$$\sin\left(\frac{y}{x}\right) = cx \qquad y = x \sin^{-1}(cx)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۹- همگن درجه صفر

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^3+y^3}{xy^2} = \frac{2+v^3}{v^2}$$

$$\cancel{v} + x\frac{dv}{dx} = \cancel{v} + \frac{2}{v^2} \qquad 2\frac{dx}{x} = v^2 dv$$

$$\frac{1}{3}v^3 = 2\ln x + C \qquad \frac{y^3}{x^3} = 6\ln x + C \Rightarrow y = x\sqrt[3]{\ }$$

:۱۰ همگن از درجه صفر

$$y' = \frac{x^2+2y^2}{xy}$$ در $x=0$ $= \frac{1+2v^2}{v^2}$

۱- 1

۲- 0 ✓

۳- ∞

۴- موجود نیست

$$\cancel{v} + xv' = \frac{1+2v^2}{v^2} - v = \frac{1+v^2}{v}$$

$$\frac{v}{1+v^2}dv = \frac{dx}{x} \qquad \ln(1+v^2) = \ln cx^2$$

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = cx^2 \qquad x^2+y^2 = cx^4 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=0$$

۱۱: تمام معادلات به فرم $y'=f\left(\frac{ax+by}{cx+ey}\right)$ که صورت و مخرج معادله یک خط باشند که از مبدأ بگذرد هم همگن از درجه صفر می باشند.

$$y = \frac{x+3y+1}{2x-y+4}$$ همگن نیست

$$y = \frac{ax+by+c}{ex+hy+n}$$ (همگن نیست)

در این معادله که همگن نیست مبدأ مختصات را به محل تلاقی دو خط منتقل کنیم به شرطیکه دو خط موازی نباشند

Subject:
Year. Month. Date. ( )

الف دو خط موازی :

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{ex+hy+n}\right) \qquad u = ax+by$$

با تغییر متغیر u ، y' کاملاً جداپذیر می‌شود

11- $y' = \frac{y-x}{y-x-1}$ $\quad u = y-x \quad \Rightarrow y' = u'+1$

$u'+1 = \frac{u}{u-1}$ $\quad u' = \frac{u}{u-1} - 1 = \frac{1}{u-1} \Rightarrow (u-1)\,du = dx$

$(u-1)^2 = 2x + C$

12- $y' = \frac{x-y}{2x-2y+1}$ $\quad u = x-y \Rightarrow y' = 1-u'$

$1-u' = \frac{u}{2u+1}$ $\quad -u' = \frac{u}{2u+1} - 1 = -\frac{u+1}{2u+1}$

$\frac{(2u+1)}{u+1}du = dx$ $\quad 2u - \ln(u+1) = x + C$

13-

$(3y+2x+4)dx - (4x+6y+5)dy = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+3y+4}{4x+6y+5}$ $\quad u = 2x+3y \Rightarrow y = \frac{1}{3}u + \frac{2}{3}u$

$y' = \frac{1}{3}(u'-2) = \frac{u+4}{2u+5} \Rightarrow \frac{3u+12}{2u+5} = (u'-2)$

$u' = \frac{7u+22}{2u+5} \Rightarrow \frac{2u+5}{7u+22}du = dx$

PAPCO

و

دو خط متقاطع باشند

ب : متقاطع

(x_0, y_0) محل تلاقی

$$a x_0 + b y_0 + c = 0 \qquad \Rightarrow \quad x = \overset{\text{جدید}}{X} + x_0 \qquad dx = dX$$

$$e x_0 + h y_0 + n = 0 \qquad \quad y = \overset{\text{جدید}}{Y} + y_0 \qquad dy = dY$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = f\left(\frac{ax + by + c}{ex + hy + n}\right)$$

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX + bY}{eX + hY}\right) \quad \Rightarrow \quad Y = vX$$

تغییر متغیر

14_

$$y' = \frac{x - y + 2}{x + y - 1}$$

$$\begin{cases} x - y = -2 \\ x + y = 1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} x_0 &= -\tfrac{1}{2} \\ y_0 &= \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

$$x = X - \frac{1}{2} \quad , \quad y = Y + \frac{3}{2}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X - Y}{X + Y} = \frac{1 - v}{1 + v}$$

$$v + X \frac{dv}{dX} = \frac{1 - v}{1 + v} \qquad X \frac{dv}{dx} = \frac{1 - v}{1 + v} - v = \frac{-v^2 - 2v + 1}{1 + v}$$

$$-\frac{1 + v}{v^2 + 2v - 1} \, dv = \frac{dX}{X}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

3 - کامل

معادله $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$ را کامل گوییم اگر تابعی مانند $U=U(x,y)$ موجود باشد بطوری که

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial y}=Q$$

$$dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy \qquad dU=P\,dx+Q\,dy=0$$

$$\Rightarrow dU=0 \qquad \Rightarrow U=C$$ به عنوان تابعی از x و y ثابت است

اگر $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ شد معادله دیفرانسیل کامل می‌شود.

13: جواب معادله که از مبدأ مختصات می‌گذرد کدام است؟ $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+y\cos x}{4y^3-\sin x}$

$$(\overset{P}{3x^2+y\cos x})\,dx+(\overset{Q}{\sin x-4y^3})\,dy=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\cos x \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\cos x \quad \Rightarrow$$ کامل است

$$\frac{\partial U}{\partial x}=3x^2+y\cos x \quad \Rightarrow \quad U=x^3+y\sin x+f(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\cancel{\sin x}+f'(y)=\cancel{\sin x}-4y^3 \longrightarrow f'(y)=-4y^3$$

$$x^3+y\sin x-y^4=C \qquad x=0\,,\,y=0 \Rightarrow C=0$$

مثال 14: a را طوری تعیین کنید تا معادله‌ی زیر یک معادله کامل باشد

$$(aye^{xy}+2xy)\,dx+(xe^{xy}+x^2)\,dy=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = a e^{xy} + axye^{xy} + \dots$$

$$a e^{xy} = e^{xy} \Rightarrow a = 1$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = e^{xy} + yx e^{xy} \dots$$

مثال 15: معادله دیفرانسیل کامل است مقدار a کدام است

$$(x^{-1}+y^{-1})dx + a xy^{-2} dy = 0$$

مثال 16: $y'(y^2-x)=y$ چه جوابی دارد؟

$$y\,dx + (x-y^2)\,dy = 0$$

$$U = \int y\,dx + f(y) \qquad U = yx + f(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \cancel{x} + f'(y) = \cancel{x} - y^2 \Rightarrow f'(y) = -y^2 \Rightarrow f(y) = -\frac{1}{3}y^3$$

$$U = yx - \frac{1}{3}y^3 = C$$

مثال 17: $(x+y)dx + (x-y)dy = 0 \quad , \quad y(1) = 1 \Rightarrow y(0) = ?$

دقت کنید $U = \int (x-y)\,dy + f(x) \Rightarrow U = xy - \frac{1}{2}y^2 + f(x)$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \cancel{y} + f'(x) = x + \cancel{y} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$$U = xy - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 = C = 1$$

$$y(0) \Rightarrow y^2 = -2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اگر دیفرانسیل کامل نشود اصلاً قادر به حل مسأله نیستیم

$x\,dy - y\,dx = 0$ کامل نیست -1 و 1

$\frac{1}{xy}$ " $= \frac{1}{y}dy - \frac{1}{x}dx = 0$ کامل است 0 و 0

$\frac{1}{x^2}$ " $= \frac{1}{x}dy - \frac{y}{x^2}dx = 0$ $-\frac{1}{x^2}$ و $-\frac{1}{x^2}$ " "

$\frac{1}{y^2}$ " $= \frac{x}{y^2}dy - \frac{1}{y}dx = 0$ $\frac{1}{y^2}$ و $\frac{1}{y^2}$ " "

عوامل غیر صفری که در یک معادله ناکامل ضرب می‌شوند و معادله را کامل می‌کنند را عامل انتگرال ساز گوییم.

فاکتور انتگرال $F = F(x,y) \neq 0$ تابعی است از (x,y) در حالت کلی مخالف صفر به طوری که اگر در طرفین یک معادله دیفرانسیل ناکامل ضرب شود دیفرانسیل را کامل کند

$P\,dx + Q\,dy = 0$

$(FP)\,dx + (FQ)\,dy = 0 \Rightarrow u = c$

جوابی که از این طریق بدست می‌آید (u) همان جواب مسأله است.

$f_1(x)\,f_2(y)\,dx + f_3(x)\,f_4(y)\,dy = 0$

$\frac{1}{f_2 f_3}$ فاکتور انتگرال معادلات جدا از هم

$\frac{1}{xP + yQ}$ " " " همگن بهتر است از روش قبلی حل شوند

اگر معادله‌ای جواب داشته باشد حتماً یک و بینهایت فاکتور انتگرال ساز دارد.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اگر $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=f(x)$ $\leftarrow$ $F=e^{\int f(x)dx}$

اگر $\frac{-1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=f(y)$ $\leftarrow$ $F=e^{\int f(y)dy}$

اگر عوامل غیرجبری نباشد ln نیاد خوب کار می‌کند $x^{\alpha}y^{\beta}$

مثال 18:

$$(xy+y^2)dx-(x^2+xy)dy=0$$

1 بیش از یک عامل انتگرال ساز دارد ✓

2 کامل واست .

3 فقط یک عامل انتگرال ساز تابعی از x دارد غ

4 ~ y ~ ~ ~ ~ ~ ~ غ

$$\frac{\partial P}{\partial y}=x+2y$$

$\#$ کامل نیست اختلاف $\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=3(x+y)$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-2x-y$$

$$\frac{3(x+y)}{Q=-x(x+y)}=-\frac{3}{x} \qquad F=e^{-3\int\frac{dx}{x}}=e^{-3\ln x}=\frac{1}{x^3}$$

یا

$$\frac{3(x+y)}{P=y(x+3)}=-\frac{3}{y} \qquad F=\frac{1}{y^3}$$

یا

$$x^{\alpha}y^{\beta}(xy+y^2)dx-x^{\alpha}y^{\beta}(x^2+xy)dy=0$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (\beta+1)x^{\alpha+1}y^{\beta} + (\beta+2)x^{\alpha}y^{\beta+1}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -(\alpha+2)x^{\alpha+1}y^{\beta} - (\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta+1}$$

$$\begin{cases} \beta+1 = -\alpha-2 \\ \beta+2 = -\alpha-1 \end{cases} \Rightarrow$$ جواب می‌دهد پس می‌توانیم از این عامل انتگرال‌ساز استفاده کرد

ولی چون α و β مستقیماً به ما ندادند استفاده نمی‌شود ⇐ بی‌نهایت جواب دارد $\alpha+\beta=-3$

مثال 19 :

$x^\alpha y^\beta$ جواب نمی‌دهد

$$(1+x^2)\,dy - (\operatorname{tg}^{-1}x - y)\,dx = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \ , \ \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$ تفاضل $\Rightarrow 1-2x$

$$\frac{1-2x}{Q = 1+x^2} = f(x) \qquad e^{\operatorname{tg}^{-1}x - \ln(1+x^2)} \Rightarrow \frac{e^{\operatorname{tg}^{-1}x}}{1+x^2}$$

مثال 20 : عبارت $x^\alpha y^\beta$ عامل انتگرال‌ساز معادله زیر است $\alpha+\beta$ کدام است

2 1 -1 -2

$$(x^2+xy^2)y' - 3xy + 2y^3 = 0$$

$$x^\alpha y^\beta(2y^3 - 3xy)\,dx + x^\alpha y^\beta(x^2+xy^2)\,dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2(\beta+3)x^{\alpha}y^{\beta+2} - 3(\beta+1)x^{\alpha+1}y^{\beta}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = (\alpha+2)x^{\alpha+1}y^{\beta} + (\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta+2}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\begin{cases} 2(\beta+3) = \alpha+1 \\ -3(\beta+1) = \alpha+2 \end{cases} \qquad \alpha = 1,\quad \beta = -2$$

$$\alpha + \beta = -1$$

مثال 21:

$$2xy\,dx + (4y+3x^2)\,dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 6x \qquad \text{تفاضل} = -4x$$

$$\frac{-4x}{-2xy} = \frac{2}{y} \qquad 2\ln y \Rightarrow F = y^2$$

$$y^2 \times (\qquad\qquad) = 0$$

$$2xy^3\,dx + (4y^3 + 3x^2y^2)\,dy = 0$$

$$u = x^2y^3 + f(y) \Rightarrow \cancel{3x^2y^2} + f'(y) = 4y^3 + \cancel{3x^2y^2}$$

$$f(y) = y^4 \qquad (x^2y^3 + y^4 = C)$$

مثال 22: عامل انتگرال ساز را بیابید

$$2\sin y^2\,dx + xy\cos y^2\,dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 4y\cos y^2 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = y\cos y^2 \qquad \text{تفاضل} = 3y\cos y^2$$

$$\frac{3y\cos y^2}{xy\cos y} = \frac{3}{x} \Rightarrow F = x^3$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

23 : فاکتور انتگرال ساز

$$y\,dx + (2xy - e^{-2y})\,dx = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y \qquad \text{تفاضل} = 1-2y$$

$$\frac{1-2y}{-y} = 2 - \frac{1}{y} \qquad 2y - \ln y \qquad F = e^{2y-\ln y}$$

xe^{2x}

$\frac{e^{2y}}{x}$

$\frac{e^{2y}}{y}$

ye^{2y}

$$F = \frac{e^{2y}}{y}$$

24 :

$$dx + 2xy\,dy = y e^{-y^2}\,dy$$

e^{y^2} ✓

e^{x^2}

e^{-x^2}

e^{-y^2}

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y \qquad \text{تفاضل} = -2y$$

$$\frac{-2y}{-1} = 2y \qquad F = e^{y^2}$$

25 : α و β را طوری تعیین کنید که $x^\alpha y^\beta$ یک فاکتور انتگرال برای معادله زیر باشد

$$y\,dx + x(1-3x^2y^2)\,dy = 0$$

$$x^\alpha y^\beta y\,dx + x^{\alpha+1} y^\beta (1-3x^2y^2)\,dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (\beta+1)(x^\alpha y^\beta) + 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = (\alpha+1)x^\alpha y^\beta - 3(\alpha+3)x^{\alpha+2}y^{\beta+2}$$

$\alpha = \beta = -3 \qquad \alpha = -3$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

26: فاکتور انتگرال ساز؟

به y بستگی ندارد

$$x^2 dy - xy\, dx = (x-2)e^{x} dx$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -x \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \qquad \text{تفاضل} = -3x$$

$$\frac{-3x}{x^2} = \frac{-3}{x} \qquad F = \frac{1}{x^3}$$

27: جواب عمومی معادله کدام است

$$(1+y^2)dx = (tg^{-1}y - x)\, dy$$

$$(1+y^2)dx + (x - tg^{-1}y)\, dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \qquad \text{تفاضل} = 2y-1$$

$$-\frac{2y-1}{1+y^2} \Rightarrow tg^{-1}y - \ln(1+y^2) \Rightarrow F = \frac{e^{tg^{-1}y}}{1+y^2}$$

$$e^{tg^{-1}y} dx + (x - tg^{-1}y) \cdot \frac{e^{tg^{-1}y}}{1+y^2}\, dy = 0$$

$$u = xe^{tg^{-1}y} + f(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x\left(\frac{1}{1+y^2}\right) e^{tg^{-1}y} + f'(y) =$$

$$f(y) = -\int \frac{tg^{-1}y}{1+y^2}\, e^{tg^{-1}y}\, dy$$

$\varphi^{-1} y = T \quad \Rightarrow \quad (\varphi^{-1} y)' =$

$F_y = -\int T e^{T} dT$

مثال: 28

$y(x^2 - y)\,dx + x(x^2 + 3y)\,dy$

$\frac{\partial P}{\partial y} = x^2 - 1 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2$ نتیجه می‌دهد $-1 - 2x^2 =$ تفاضل

$x^{\alpha} y^{\beta+1}(x^2 - y)\,dx + x^{\alpha+1} y^{\beta}(x^2 + 3y)\,dy = 0$

$\frac{\partial P}{\partial y} = (\beta+1) y^{\beta} x^{\alpha+2} - (\beta+2) x^{\alpha} y^{\beta+1}$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = (\alpha+3) x^{\alpha+2} y^{\beta} + 3(\alpha+1) x^{\alpha} y^{\beta+1}$

$\beta + 1 = \alpha + 3 \qquad \beta - \alpha = 2 \qquad \alpha = -\frac{7}{4}$

$-(\beta+2) = 3(\alpha+1) \qquad 3\alpha + \beta = -5 \qquad \beta = \frac{1}{4}$

$-\beta - 2 = 3\alpha + 3$

اگر معادله‌ای به فرم $y' + y f(x) = r(x)$ باشد معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول می‌شود

اگر معادله خطی بود، می‌شود $(y f(x) - r(x))\,dx + dy = 0$

همگن و جدایی‌پذیر نیست

$\frac{\partial P}{\partial y} = f(x) \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \qquad$ تفاضل $= f(x)$

$\left(F = e^{\int f(x)\,dx} \right)$ عامل انتگرال‌ساز معادلات خطی ← طول می‌کشد حفظ شود

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$y' + y f(x) = r(x) \qquad h(x) = \int f(x)\, dx \Rightarrow y = e^{-h(x)}\left[\int r(x) e^{h(x)} dx + c\right]$$

یا $\dfrac{dx}{dy} + x f(y) = r(y)$ جای x و y در تمام مراحل عوض می‌شود

$$y' - y \tan x = 2\cos x \qquad \text{مقدار دیگر} = 2 \qquad :28$$

$$\ln \cos x \qquad y = \frac{1}{\cos x}\left[\int 2\cos^2 x\, dx + c\right]$$

$$xy' - y = x^2 \cos x \qquad :29$$

$$y' = \frac{1}{x} = x\cos x$$

$$h(x) = -\ln x \qquad y = x\left[\int \frac{\cancel{x}\cos x}{\cancel{x}}\, dx + c\right]$$

$$:30$$

$$dy + (y\cot x - e^{\cos x})\,dx = 0 \quad , \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

هرگاه y_0 تک در مسأله دیده شود باید حتمی بودن چک گردد

$$\frac{dy}{dx} + y\cot x = e^{\cos x}$$

$$h(x) = +\ln \sin x \qquad y = \frac{1}{\sin x}\left[\int \sin x\, e^{\cos x}\, dx + c\right] \qquad c = 2$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

31: جواب مسالهٔ زیر در $x=e$ کدام است. $y(1)=2$ $x>0$

$$x^2y' + xy = 1 \Rightarrow y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}$$

$$h(x) = \ln x$$

$$y = \frac{1}{x}\left[\int \frac{1}{x^2}\, x\, dx + c\right]$$

32: $y' - xy - 2x = 0$

33: $xy' + y - x^2 = 0$

34: $xy' - y = 3x^4$

35: $\frac{xy' - y}{x^2} + \frac{y}{x} = e^{-x}$ $t = \frac{y}{x}$

$$t' + t = e^{-x}$$

$h(x) = x$ $\Rightarrow \frac{y}{x} = e^{-x}\left[\int e^{-x} e^{x}\, dx + c\right]$

36: جواب معادله برحسب $\lambda = \frac{1}{\cos y}$ کدام است

$\sin y \frac{dy}{dx} = \cos y(1 - x\cos y)$ $\cos y = \frac{1}{\lambda}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$y' \sin y = \frac{1}{\lambda^2}\frac{d\lambda}{dx} \qquad \frac{1}{\lambda^2}\frac{d\lambda}{dx} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\frac{d\lambda}{dx} - \lambda = -x$$

$h(x) = -x$

$$\lambda = e^{x}\left[\int -x e^{-x} dx + c\right]$$

$$(1+y^2)\,dx = (\tan^{-1} y - x)\,dy \text{ : } 37$$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{(1+y^2)} = \frac{\tan^{-1} y}{1+y^2}$$

$h(y) = \tan^{-1}(y)$

$$x = e^{-\tan^{-1}(y)}\left[\int \frac{\tan^{-1} y}{1+y^2}\, e^{\tan^{-1} y}\, dy + c\right]$$

$\int u e^{u} du$

معادله برنولی:

صورت کلی

$$y' + y\, f(x) = y^{\alpha}\, r(x)$$

برای حل مسأله طرفین را بر y^{α} تقسیم می کنیم سپس تغییر متغیر $u = y^{1-\alpha}$ می گیریم سپس معادله تبدیل به معادله خطی می شود

Subject:
Year. Month. Date. ( )

38: در معادله زیر کدام تغییر متغیر آن را خطی می‌کند.

$y' + y\sin x = y^3 \cos x$

39: جواب معادله $y' = xy^2 - y$ $\quad y^{-2}$

$y' + y = xy^2 \qquad \alpha = 2$

$y' y^{-2} + y^{-1} = x \qquad u = y^{-1} \quad u' = -y' y^{-2}$

$u' - u = -x$

$h(x) = -x \qquad \frac{1}{y} = u = e^{x}\left[\int -x e^{-x}\, dx + c\right]$

40: $y' + y = y^2(\cos x - \sin x)$

$y' y^{-2} + y^{-1} = \cos x - \sin x$

$u = y^{-1} \rightarrow u' = -y' y^{-2}$

$u' - u = \sin x - \cos x$

$h(x) = -x \qquad \frac{1}{y} = e^{x}\left[\int (\sin x - \cos x) e^{-x}\, dx + c\right]$

41: $y' = \frac{x^2 + 2y^2}{xy}$

$y' - \frac{2}{x} y = \frac{x}{y} \qquad \alpha = -1$

$y' y - \frac{2}{x} y^2 = x \qquad u = y^2, \; u' = 2yy'$

$u' - \frac{4}{x} u = 2x$

$h(x) = -4\ln x \qquad u = y^2 = x^4 \left[\int 2x \frac{1}{x^4}\, dx + c\right]$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$y' + y = \frac{x}{y}$:42

$y' + y = (x-1)y^2$:43

$y' = \frac{y}{x} + \frac{2x^3 \cos x^2}{y}$:44

$xy' + y = xy^3$:45

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2y + y^3}$ $\qquad \frac{dx}{dy} - xy = \frac{y^3}{x}$:46

برنولی نسبت به x واسطه

$x\frac{dx}{dy} - x^2 = y^3$ $\qquad u = x^2 \,, \quad \frac{du}{dy} = 2x\frac{dx}{dy}$

$\frac{du}{dy} - 2yu = 2y^3$

$h(y) = -y^2$ $\qquad u = x^2 = e^{y^2}\left[\int 2y^3 e^{-y^2}\,dy + c\right]$

$t = y^2$ جزء به جزء

مسیرهای قائم:

$f(x,y,c)=0$

47: معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم همهٔ دوایری که از مرکز می‌گذرد و مرکز آنها بر روی محور xها است کدام است

$$(x-c)^2+y^2=c^2$$

حتی‌المقدور بهتر است c به یک طرف کشیده شود و تا مشتق آن صفر گردد

$$x^2+y^2=2cx$$

$$x+yy'=c \qquad x^2+y^2=2x(x+yy')$$

$$y^2-x^2=2xyy' \qquad \frac{-1}{y'} \qquad y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}$$ معادله خطوط قائم

48: مسیرهای قائم دسته منحنی $xy=c$ کدام است

$$y+xy'=0$$

$$y+x\left(\frac{-1}{y'}\right)=0$$ معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم $\Rightarrow yy'=x \qquad y\,dy=x\,dx$

$$y^2-x^2=a$$

49. معادله مسیرهای قائم $y=cx^2$ کدام است

$$\frac{y=cx^2}{y'=2cx} \qquad \frac{y}{y'}=\frac{x}{2} \quad \frac{-1}{y'} \quad -yy'=\frac{x}{2} \Rightarrow -2y\,dy=\frac{x}{2}\,dx$$

$$\frac{1}{2}x^2+y^2=c$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$x^3 y - x y^3 = c$ -50

$x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$ -51

$y^2 = c x^3 + x^2 - 1$ معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم را بدست آورید -52

$2yy' - 2x = 3cx^2 \quad = \cancel{y^2 - x^2}$

$\div \quad y^2 - x^2 + 1 = cx^3$

$= \dfrac{2yy' - 2x}{y^2 - x^2 + 1} = \dfrac{3}{x} \qquad 2xyy' = 3y^2 - x^2 + 3 \qquad = \dfrac{-1}{y'}$

$y' = \dfrac{-2xy}{3y^2 - x^2 + 3}$

معادله اصلی منحنی از حذف c بین خودش و معادله دیفرانسیل آن بدست می آید

معادله دیفرانسیل مسیر اصلی

$f(r, \theta, \frac{dr}{d\theta})$ منحنی . مسیرهای قائم در مختصات قطبی

$f(r, \theta, -r^2 \frac{d\theta}{dr})$ قائم بر آ

Subject:

Year. Month. Date. ( )

53:

$$r = c(1 + \sin\theta)$$

$$\frac{dr}{d\theta} = c\cos\theta \qquad \frac{r}{dr/d\theta} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$ معادله دیفرانسیل مسیر اصلی

$$\frac{r}{-r^2\frac{d\theta}{dr}} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$ معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم بر منحنی اصلی

$$\frac{-dr}{r} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\,d\theta \quad \times\frac{1-\sin\theta}{1-\sin\theta}$$

$$-\ln r = -\ln k(1-\sin\theta)$$

$$r = k(1-\sin\theta)$$

54: معادله مسیرهای قائم

$$r = 2c\cos\theta$$

$$\frac{dr}{d\theta} = -2c\sin\theta \qquad \frac{r}{dr/d\theta} = -\cot\theta$$

$$\frac{r}{-r^2\frac{d\theta}{dr}} = -\cot\theta \qquad \frac{dr}{r} = \cot\theta\,d\theta$$

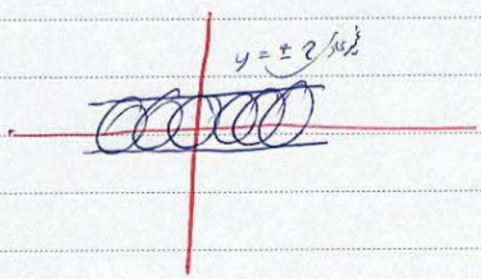
$$\ln r = \ln a\sin\theta \qquad \underline{r = a\sin\theta}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

جواب غیرعادی

منحنی تماسش آن با کلیه منحنیهای (دسته منحنی) جواب عمومی و با هر کدام در یک نقطه تماس می شود

$$y^2(1+y'^2)=4 \Rightarrow \begin{cases}(x-c)^2+y^2=4 \\ -2(x-c)=0 \quad \text{مشتق نسبت به } c\end{cases}$$



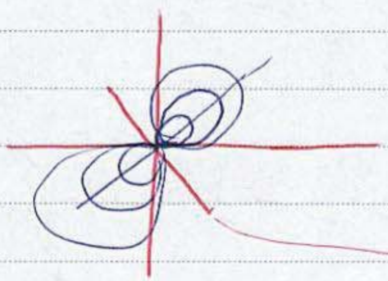
پوش یک دسته منحنی منحنی است که بر کلیه منحنی‌های (دسته منحنی) جواب عمومی و با هر کدام در یک نقطه مماس می شود.

برای بدست آوردن پوش c را بین دسته منحنی و مشتق آن نسبت به c حذف می کنیم.

$$\begin{cases}F(x,y,c)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial c}=0\end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

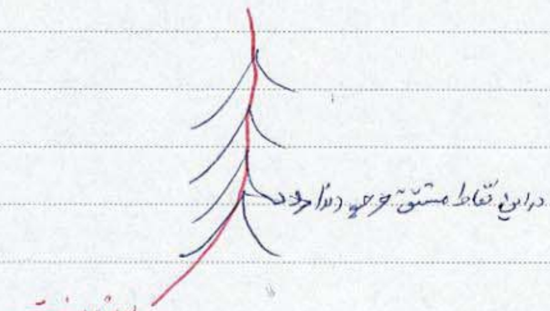
دوایری را نشان می دهد که از مرکز می گذرند و مرکزشان $(x-c)^2+(y-c)^2=2c^2$
روی نیمساز است .



$$(x-c)^2+(y-c)^2=2c^2$$
$$-2(x-c)-2(y-c)=4c$$

$$x+y=0$$

تمام $x+y=0$ پوش سینت فقط $(0,0)$



برای این نقاط استثنایی دیوانی را بدست آوریم داریم

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=0\\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial y}=0\end{cases}$$

اگر یک دسته منحنی مکان هندسی نقاط استثنایی داشته باشد از رابطه $\frac{\partial F}{\partial c}=0$, $F(x,y,c)=0$
هم بدست می آید که باید جوابهای بدست آمده از رابطه های قبل را از این رابطه حذف کرد

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$(\quad) (\quad) = 0$

مثلاً $y = x$ $\quad d$

جواب غیرعادی دیفرانسیل دارد

نباید حذف شود جواب عمومی

وگرنه غلط می‌شود

معادلاتی که نسبت به مشتق حل می‌شود: $\quad F(x, y, y') = 0$

حالت ۱ $\quad F(y') = 0 \qquad \ln y' - \sin y = 0$ تابع فقط تابعی از y' باشد

$y'^7 - 3y'^6 + 4y'^4 - 3y'^2 + y' - 1 = 0$

زمانی می‌توان حل کرد که معادله لااقل دارای یک ریشه حقیقی $y' = k$ باشد

$\Rightarrow F(k) = 0 \qquad y = kx + c \Rightarrow k = \frac{y-c}{x} \Rightarrow F\left(\frac{y-c}{x}\right) = 0$

$y' - 2 = 0 \Rightarrow \frac{y-c}{x} - 2 = 0$

جمع توابع پیوسته، پیوسته است

$\ln y' - \sin x = 0$

$\pi \quad + \quad + \quad +$ > لااقل یک ریشه حقیقی دارد $\Rightarrow \ln \frac{y-c}{x} = \sin \frac{y-c}{x}$

$\frac{\pi}{4} \quad -$

$y'^7 - 3y'^6 + 4y'^4 - 3y'^2 + y' - 1 = 0 \qquad \left(\frac{y-c}{x}\right)^7 - 3(\quad) \cdots - 1 = 0$

$f(x,y,y')$

$$\begin{cases} F(x,y,c)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial c}=0 \end{cases}$$ جواب عمومی

اگر معادله ای نسبت به مشتق حل نشود معمولاً به فرم پارامتری مطرح می شود.

حالت اول

$f(y,y')=0$

$y=f(y')$

$y'=p \Rightarrow dy=p\,dx$

$dy=f'(p)\,dp$

$$p\,dx=f'(p)\,dp \longrightarrow \begin{cases} y=f(p) \\ x=\displaystyle\int \frac{f'(p)}{p}\,dp+c \end{cases}$$

$$y=y'^2 e^{y'}$$

$$y=p^2e^p \rightarrow p\,dx=e^p(2p+p^2)\,dp \qquad p(\quad)=0$$

$p=0 \Leftarrow y=0 \Leftarrow$ در معادله صدق می کند و چون y وابسته به c نیست جواب غیرعادی است

$$\begin{cases} y=p^2e^p \\ x=e^p+pe^p+c \end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حالت دوم

$x = f(y')$

$y' = p \rightarrow dx = \frac{1}{p}\,dy$

$$\begin{cases} x = f(p) \\ y = \int p\, f'(p)\,dp + c \end{cases}$$

$\rightarrow dx = f'(p)\,dp$

$\frac{1}{p}\,dy = f'(p)\,dp$

۱- جواب عمومی کدام است

$x = 2y' + \sin y'$

$$\begin{cases} x = 2p + \sin p \\ y = p^2 + p\sin p + \cos p + C \end{cases}$$

$\frac{1}{p}\,dy = (2 + \cos p)\,dp$

$p \neq 0$

حالت سوم

$x = f(y, y')$

$y' = p \rightarrow dx = \frac{1}{p}\,dy$

$x = f(y, p)$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$x = 4y^2 + e^{y'} - \cos y'$

$$\begin{cases} x = 4y^2 + e^{p} - \cos p \\ \\ C \leftarrow p \text{ نتیجه حل برای حذف } \end{cases}$$

$\frac{1}{p}\, dy = 8y\, dy + (e^{p} + \sin p)\, dp$

$(-\frac{1}{p} + 8y)\, dy + (e^{p} + \sin p)\, dp = 0$ ، نسبت به مشتق حل می‌شود

حالت چهارم:

$y = f(x, y')$

$y' = p \rightarrow dy = p\, dx$

$$\begin{cases} y = f(x, p) \\ \\ \end{cases}$$

$y = x^2 y'^2 + y'^3 \rightarrow \begin{cases} y = x^2 p^2 + p^3 \\ \\ p \text{ برای حذف } p \text{ وارد شود} \end{cases}$

$p\, dx = 2xp^2\, dx + (2px^2 + 3p^2)\, dp$ نتیجه حل معادله

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مهم ۹۰٪ معادله کلرو :

صورت کلی : $y = xy' + f(y')$

در معادله کلرو به جای y' قرار دهیم p معادله حل می‌شود

$$y = xp + f(p)$$

$$dy = p\,dx = p\,dx + (x + f'(p))\,dp = 0$$

جواب غیر عادی مسئله $x + f'(p) = 0$

جواب $dp = c$

$$\Rightarrow y = xc + f(c)$$

نسبت به c $\quad y' = 0 = x + f'(c)$

جواب غیرعادی به فرم پارامتری

$$\begin{cases} y = xp + f(p) \\ x = -f'(p) \end{cases} \Rightarrow y = -xf'(p) + f(p)$$

این دستگاه جواب غیر عادی را می‌دهد اگر p حذف شد

اگر p حذف نشد جواب غیرعادی به فرم پارامتری است

اگر از جواب عمومی نسبت به c مشتق بگیریم و c ماند جواب غیر عادی به فرم پارامتری و c حذف شد 〃 〃 〃 〃

۱- جواب عمومی

$$y = xy' + \sqrt{y'}$$

$$y = xc + \sqrt{c}$$

2- جواب غیرعادی

$$y = xy' - y'^3$$

$$y = xc - c^3$$

$$x = 3c^2$$

جواب $27y^2 = 4x^3$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

4- پوش کدام است : جواب غیرعادی

$y = xy' + \frac{1}{y'}$ $\quad y = xc + \frac{1}{c}$

$x = \frac{1}{c^2}$ $\quad y^2 = x + x + 2x = 4x$

5: جواب غیرعادی

$y = xy - \frac{y^2}{4}$

$$\begin{cases} y = xc - \frac{c^2}{4} \\ x = \frac{c}{2} \end{cases} \quad y = x^2$$

6: جواب غیرعادی

$y = xy' + \cos y'$

$$\begin{cases} y = xc + \cos c \\ x = \sin c \end{cases} \quad y = x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2}$$

معادله لاگرانژ: جواب به فرم پارامتری است

$y = x\,h(y') + f(y')$ $\quad$ مثال $\quad y = xy'^2 + y'$

$$\begin{cases} y = x\,h(p) + f(p) \\ x = \varphi(p, c) \end{cases} \qquad \begin{cases} y = xp^2 + p \\ x = \ldots \end{cases}$$

P4PCO

$p\,d(x) = h(p)dx + (\underline{\underline{x}}\,h'(p) + f'(p))dp$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$dy = p\,dx = p^2 dx + (2px+1)\,dp$$ به صورت یک معادله خطی نسبت به x حل شود

$$p(1-p)\,dx = (2px+1)\,dp$$

$$\frac{dx}{dp} + x\,\frac{2}{p-1} = \frac{1}{p(1-p)}$$

$$2\ln(p-1) \qquad x = \frac{1}{(p-1)^2}\left[\int \frac{1-p}{p}\,dp + c\right]$$

$$\left.\begin{matrix} p=0 & y=0 \\ p=1 & y=x+1 \end{matrix}\right\}$$ دو جواب غیرعادی

$$y'^{\,n} + y'^{\,n-1} f_1(x,y) + \dots + f_n(x,y) = 0$$

$$(y' - h_1(x,y))(y' - h_2(x,y)) \dots (y' - h_n(x,y)) = 0$$

$$y' = h_i(x,y) \qquad i = 1 \dots n$$

برای هر یک c داریم

$$\varphi_i = f(x,y,c)$$

$$\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n$$ جواب عمومی

Subject:
Year. Month. Date. ( )

معادله مرتبه دوم:

معادله‌ای که الزاما y'' داشته باشد $F(x, y, y', y'')$

$$y'' + y' f_1(x) + y f_2(x) = f(x)$$

مرتبه دوم: خطی / غیرخطی

f_1 و f_2 : ضرایب

اگر f_1 و f_2 هر دو عدد باشند => معادله خطی با ضرایب ثابت $y''+ay'+by=f(x)$

〃 〃 〃 هر دو یا یکی عدد نباشد => 〃 〃 〃 〃 متغیر

اگر $f(x)=0$ => همگن

مرتبه دوم: خطی (ضرایب ثابت / ضرایب متغیر) / غیرخطی

ضعیف

خطی همگن	خطی غیرهمگن	غیرخطی
$y''+y=0$	$y''+y=1$	$yy''=xy'$
جواب $y=\sin x$	$y=\sin x+1$	$y=x^2$
$y=c\sin x$	غ $\cancel{y=2\sin x+2}$	غ $\cancel{y=3x^2}$

در معادلات خطی غیرهمگن و غیرخطی اگر یک جواب داشته باشیم C برابر آن جواب نیست

〃 〃 همگن 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 است

و این قضیه ربطی به مرتبه معادله ندارد و برای مرتبه n صادق است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$y'' + y = 0$ $\qquad$ $y'' + y = 1$ $\qquad$ $yy'' = xy'$

$y_1 = \sin x$ $\qquad$ $y_1 = \sin x + 1$ $\qquad$ $y_1 = x^2$

$y_2 = \cos x$ $\qquad$ $y_2 = \cos x + 1$ $\qquad$ $y_2 = 4$

$y = \sin x + \cos x$ $\qquad$ $\text{غ}\ y = \cancel{\sin x + \cos x + 2}$ $\qquad$ $\text{غ}\ y = \cancel{x^2 + 4}$

+ در معادلات خطی غیرهمگن و غیرخطی جمع جوابها جواب نیست
+ 〃 〃 〃 همگن 〃 〃 〃 است و برای مرتبه n صادق است

معادلات خطی همگن

$$\text{جواب} \left\{ \begin{matrix} y_1 & c_1 y_1 \\ y_2 & c_2 y_2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = \text{جواب}$$

جواب عمومی است. به شرط اینکه دو بار را مشتق داشته باشد و از دوتا کمتر نباشد.
n جواب ~~به~~ n 〃 n،

شرط اینکه $c_1 y_1 + c_2 y_2$ جواب عمومی باشد اینست که y_1 و y_2 مستقل از هم باشند

$$\Rightarrow \frac{y_1}{y_2} \neq k \quad \text{مقدار ثابت}$$

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \cdots + c_n y_n$$

اگر y_1 تا y_n جوابهای یک معادله خطی همگن باشند $y_1, y_2, \ldots, y_n$ استقلال دارند اگر

P4PCO

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

مستقل $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$

مستقل $\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2$

استقلال ندارند $\begin{vmatrix} x & 4x \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$

۱- اگر y_1 و y_2 دو جواب ـــ مستقل خطی برای معادلهٔ $y''+y'f_1(x)+y f_2(x)=0$ باشند آنگاه رابطه زیر

$y_1 y_2' - y_2 y_1'$ $\quad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$

1 بیشتر از صفر است
2 کمتر " " "
3 مخالف " " ✓
4 برابر " " "

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۲- کدامیک از زیر مجموعه‌های زیر وابسته هستند

1. $1 , e^{x} , e^{2x}$
2. $\sin x , \cos x$
3. x , xe^{x}
4. $1 , \cos 2x , \sin^2 x$ ✓

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos 2x & \sin^2 x \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \end{vmatrix} = 0$$

معادله خطی همگن با ضرایب ثابت :

$y' + ay = 0$

$\frac{dy}{y} = -a\,dx$

$y = ce^{-ax}$

$y'' + ay' + by = 0$

$y = e^{tx}$

$\Rightarrow e^{tx}(t^2 + at + b) = 0 \quad \Rightarrow (t^2 + at + b) = 0$ معادله مشخصه

ریشه‌ها را پیدا کرده در جواب می‌گذاریم

ریشه‌ها

۱- $\Delta > 0 \Rightarrow t_1 \neq t_2 \in R$

$\Rightarrow$ یک جواب $e^{t_1 x}$

$\Rightarrow$ یک جواب $e^{t_2 x}$

$\frac{e^{t_1 x}}{e^{t_2 x}} = e^{(t_1 - t_2)x} \neq 0$ مستقل هستند $\Rightarrow y = c_1 e^{t_1 x} + c_2 e^{t_2 x}$

$y'' - 2y' - 3y = 0 \qquad t^2 - 2t - 3 = 0$

$3 , -1 \qquad y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$

$$y'' - 4y = 0$$
$$\pm 2 \qquad y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$$

$$y'' - 2y' = 0$$
$$0, 2 \qquad \Rightarrow y = c_1 + c_2 e^{2x}$$

معادله مشخصه یک معادله دیفرانسیل

$$t(t-1)(t+1)(t-2) = 0$$
$$c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x} + c_4 e^{2x}$$

تا وقتی که n ریشه حقیقی متمایز داریم جواب به صورت بالا محاسبه می شود

2: $\Delta = 0 \Rightarrow t$: یک ریشه

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{tx}$$

مثال $y'' - 4y' + 4y = 0 \Rightarrow t^2 - 4t + 4 = 0 \Rightarrow t = 2$

$$D^2 - 4D + 4$$

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{2x}$$

پرانتز : نماد اپراتوری

$$D = \frac{d}{dx} \Rightarrow y' = \frac{d}{dx} y$$

$$D^2 = \frac{d^2}{dx^2} \qquad y'' = \frac{d^2}{dx^2} = D^2 y$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$D^n = \frac{d^n}{dx^n} \qquad y^{(n)} = D^n y$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$y'' - 4y' + 4y = 0 \Rightarrow D^2 y - 4Dy + 4y = 0$

$(D^2 - 4D + 4)\, y = 0 \Rightarrow (D-2)^2 y = 0 \qquad D = 2$

مثال:

$D\,(D-1)(D-2)^3\, y = 0$

0 ریشه صفر   1 ریشه   ریشه $= 2, 2, 2$

$y = C_1 + C_2 e^{x} + (C_3 + C_4 x + C_5 x^2)\, e^{2x}$

$q \neq 0 \ , \ p \pm iq \quad \Delta < 0$: 3

$3 \pm i\sqrt{-4}$

یک جواب $C_1 \alpha e^{(p+iq)x} \searrow = e^{px}(c_1 \cos qx + c_1 i \sin qx)$

$+$ $+$

جواب دیگر $C_2 \alpha e^{(p-iq)x} \searrow = e^{px}(c_2 \cos qx - c_2 i \sin qx)$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$

$\Rightarrow y = e^{px}(A \cos qx + B \sin qx)$ A و B حقیقی و $y = \dots$ کاملا حقیقی

$A = C_1 + C_2 \qquad\qquad A = C_1 + C_2$

$i \times (B = i(C_1 - C_2)) \qquad -i \times (B = i(C_1 - C_2))$

$\frac{1}{2}(A + iB) = C_2 \qquad\qquad \frac{1}{2}(A - iB) = C_1$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: $(D+1)(D-1)^2(D^2+1)(D^2-2D+5)y=0$ معادله از مرتبهٔ 7 است

$-1 \quad 1 \quad \pm i \quad 1\pm 2i$

$\alpha=0$
$\beta=1$

$$y=c_1e^{-x}+(c_2+c_3x)e^{x}+c_4\cos x+c_5\sin x+e^{x}(c_6\cos 2x+c_7\sin 2x)$$

1- $y''+2y'+10y=0 \qquad -1\pm 3i$

$$y=e^{-x}(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x) \qquad y=Ae^{-x}\sin(3x+\alpha)$$

$$y=e^{-x}(\underbrace{A\sin 3x\cos\alpha}_{c_2}+\underbrace{A\cos 3x\sin\alpha}_{c_1})$$

2- مقدار a و b چه باشد تا $y_1=e^{-2x}$ و $y_2=e^{3x}$ دو جواب مستقل خطی معادله زیر باشد؟

$(t+2)(t-3)=0$ معادله مفسر $\Rightarrow t^2-t-6=0 \Rightarrow y''-y'-6y=0$

$ab=6$

3- ضریب y و y' در معادله دیفرانسیل مرتبه دومی که دو جواب مستقل آن e^{2x} و e^{-x} باشد کدام است

$(t-2)(t+1)=0 \qquad t^2-t-2=0 \qquad y''-y'-2y=0$

$-1y' \quad -2y$

4: کدام یک از توابع زیر در معادله دیفرانسیل $y''+2y'+5y=0$ صدق می‌کند

$y=e^{-t}(\cos^2t-\sin^2t) \qquad y=e^{-t}(\cos t+i\sin t)^2$

$y=2e^{-t}\sin t\cos t \qquad ✓\, y=e^{-t}(\cos t+t\sin t)$ صدق نمی‌کند

نداریم

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$-1 \pm 2i$

$e^{-x} \cos 2x$

$e^{-x} \sin 2x$

5: برای آنکه معادله زیر خطی باشد:

$x^n y'' + y' + f(x)\, y^m = 0$

1- $m=1$

2- $n=0$ و $m=1$

3- $n=0$

4- $n=m=0$

$y'' + f_1(x) y' - f_2(x) y = f(x)$

معادله دیفرانسیل خطی غیر همگن:

$y'' + f_1(x) y' + f_2(x) y = f(x)$

$y'' + a y' + b y = f(x)$

$y = y_h + y_p$

y_h = جواب عمومی معادله همگن متناظر $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$

y_p = یک جواب ساده بدون پارامتر معادله

— معادله با ضرایب ثابت $y'' + a y' + b y = f(x)$

حل از راه مشتق گیری

روشهای y_p: ضرایب نامعین / اپراتورهای معکوس / عمومی (تغییر پارامتر)

که هر دو را حفظ کنید

معایب: فقط برای معادلات با ضرایب ثابت و برای هر تابع $f(x)$ می‌توان استفاده کرد و فقط برای تابع‌های مشخص صادق است

معایب بالا را ندارد

حل از راه انتگرال گیری

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تعیین y_p با استفاده از روش ضرایب نامعین :

۱- $f(x) = M(x)$ ، $M(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه n

$y'' - 2y' + 3y = 5$ یا $5x$ یا $4x^2 + 3$

$\Rightarrow y_p = x^m \times$ (یک چند جمله‌ای کامل از درجه n)

m تعداد ریشه های صفر معادلهٔ مفسر.

مثال $y'' - 2y' + 3y = 5$

5 درجه صفر $\Rightarrow$ چند جمله‌ای از درجه صفر $m = 0$

$y_p = A x^0 = A$

در معادله $0 - 0 + 3A = 5 \Rightarrow A = \frac{5}{3}$

مثال $y'' - 2y' + 3y = 5x$

$y_p = Ax + B$

در معادله $0 - 2A + 3Ax + 3B = 5x \Rightarrow \begin{cases} 3A = 5 \\ -2A + 3B = 0 \end{cases}$

مثال

$D^2(D-1)y = 7x^2 + 3$

0 دوبار ریشه معادله مفسر است

$y_p = x^2 (Ax^2 + Bx + C)$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\ldots = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$$

$$y_{p_1} + y_{p_2} + \cdots + y_{p_n}$$

2: اگر $f(x) = e^{p(x)} \mathcal{M}_{(x)}$

m تعداد ریشه‌های p معادله مشخصه $\Rightarrow y_p = x^m e^{px} \times$ (یک چندجمله‌ای کامل از درجه n)

p = ریشه چندبار

مثال: $y'' - 2y' - 3y = 5e^{x}$ $p=1$

3 و -1 — $m=0 \Leftarrow$ ۱ ریشه معادله مشخصه نیست

$y_p = Ae^{x}$

در معادله $A - 2A - 3A = 5 \Rightarrow A = -4$

$$y'' - 2y' - 3y = \underbrace{5e^{x}}_{f_1} + \underbrace{2xe^{-x}}_{f_2} + 7x \qquad p=-1 \text{ یکبار}$$

$y_{p_1} = Ae^{x}$ $\qquad y_{p_2} = xe^{-x}(Bx + C)$ $\qquad y_{p_3} = Dx + E$

در معادله گذاشته شود و معادل با $2xe^{-x}$ قرار گیرد

مثال: $D(D-1)^3(D+1)y = x^2 + 4xe^{x} + 7x^2e^{-x} + 5e^{2x}$

$y_{p_1} = x(Ax^2 + Bx + C)$

$y_{p_2} = x^3e^{x}(A_1x + B_1)$

$y_{p_3} = xe^{-x}(A_2x^2 + B_2x + C_2)$

$y_{p_4} = A_3e^{2x}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$f_{(x)} = M_{(x)} \cos qx + N_{(x)} \sin qx$: 3

$$y_p = x^m \left(R(x) \cos q(x) + S(x) \sin q(x) \right)$$

m : تعداد ریشه های $+iq$ معادله مفسر .

R و S دو چند جمله‌ای از درجه n و n بزرگترین درجه N و M است .

مثال $y'' + 4y = x \cos 2x + 7 \sin 3x$

$\pm 2i$ $\quad +2i \quad +3i$

$$y_{p_1} = x\left((Ax+B) \cos 2x + (A_1 x + B_1) \sin 2x \right)$$

$$y_{p_2} = A_2 \cos 3x + B_2 \sin 3x$$

$f_{(x)} = e^{px} \left(M_{(x)} \cos qx + N_{(x)} \sin qx \right)$ 4

$$y_p = x^m e^{px} \left(R(x) \cos qx + S(x) \sin qx \right)$$

m تعداد ریشه های $p+iq$ معادله مفسر .

$\pm i \quad 1 \pm 2i \quad -1 \pm 3i$

مثال: $D(D^2+1)(D^2-2D+5)(D^2+2D+10)^2 y = x + x \cos x + x^2 e^x \sin 2x$

$+ 5e^{-x} \sin 3x + x e^x \cos 3x$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$y_{P_1} = x(Ax+B)$

$y_{P_2} = x\big((A_1x+B_1)\cos x + (A_2x+B_2)\sin x\big)$

$y_{P_3} = xe^{x}\big((A_3x^2+B_3x+C_3)\cos 2x + (A_4x^2+B_4x+C_4)\sin 2x\big)$

$y_{P_4} = x^2e^{-x}(A_5\cos 3x + B_5\sin 3x)$

$y_{P_5} = e^{x}\big((A_6x+B_6)\cos 3x + (A_7x+B_7)\sin 3x\big)$

$y'' - 4y' = -4$ ۱- جواب عمومی

$\overset{0}{4}$

$c_1 + c_2\cancel{e^{4x}} - x$

$c_1 + c_2\cancel{e}^{4x} + x$ ✓

$c_1\cos\cancel{2}x + c_2\sin\cancel{2}x$ ✓

$c_1x\cancel{e}^{4x} + x^2$

$y'' - 4y' + 3y = e^{3x}$ 2- جو... ریشه ...

$1, 3$

$y = Ae^{x} + B\cancel{e}^{2x} + \frac{1}{2}xe^{3x}$

$y = Ae^{x}\cancel{+Be^{2x}} + xe^{3x}$

$y = Ae^{x} + Be^{3x} + \frac{x}{2}e^{3x}$

دقت با ریشه معادله مشخصه ـــ $y = Ae^{x}\cancel{+Be^{3x}} + x^2\cancel{\frac{2}{e}}^{3x}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

:3 $(D^2-1)y = 8xe^x$

$1, -1$

$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \cancel{\cos x}$

$y = c_1 \cos x + \cancel{c_2 \sin x} + \frac{x}{2}\sin x$

$y = e^{2x}(\cancel{c_1 + c_2 x} + \frac{x^2}{2})$

✓ $y = c_1 e^{-x} + \underbrace{e^x(c_1 - 2x + 2x^2)}$

$y_p = xe^x(Ax+B)$

:4 کدام گزینه یک جواب خصوصی معادله زیر است

$y''' + 2y'' + y' - 2y = e^x + \cos x$

اجزاء ریشه‌های معادله موقت نیست $\Leftarrow e^{1\alpha x} \Leftarrow e^x$

Ae^x

$B\cos x + C\sin x$

:5 جواب عمومی کدام است

$y'' - 4y' + 5y = 2e^{3x}$

$2 \pm i$ $\quad y_h = e^{2x}(c_1\cos x + c_2 \sin x)$

$y_p = Ae^{3x} \Rightarrow y_p = e^{3x}$

$y = e^{2x}(c_1\cos x + c_2 \sin x) + e^{3x}$

1- $Ae^{2x}\sin(x+\alpha) - e^{3x}$

2- $Ae^{\cancel{1x}}\sin(2x+\alpha) + e^{3x}$

3- $\cancel{\quad} \quad - 2e^{3x}$

4- ✓ $Ae^{2x}\sin(x+\alpha) + e^{3x}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

6: کدام تابع در معادله صدق می کند

$$y'' - 2y' - 3y = 3e^{2x}$$

3 و -1

1. $e^{x} - e^{2x}$
2. $e^{x} + e^{2x}$
3. $e^{3x} - e^{2x}$ ✓
4. $e^{3x} + e^{2x}$

$$c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} + A e^{2x} \qquad A = -1$$

$c_1 = 1$, $c_2 = 0$ از گزینه ها

7: جواب عمومی معادله $y^{(4)} - y = x\sin x$ فرم ضرایب نامعین جواب خصوصی را تعیین کنید

1 و -1 و i و $-i$

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$$

$$x\left[(c_5 + c_6 x)\cos x + (c_7 + c_8 x)\sin x\right]$$

8: جواب خصوصی معادله $y'' + 9y = e^{x}\cos 2x$ در $x=0$ کدام است

$\pm 3i$

از روش اپراتورهای معکوس حل شود

$$e^{x} A \cos 2x$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

اگر خود $\cos nx$ را بگیریم کافی است و نیازی به $\sin$ ندارد $\qquad y'' + 4y = \cos x$

$y'' - 2y' + 7y = \sin \qquad A\sin + B\cos$

اگر معادله مشتق فرد نداشت کسینوس ها را با ضریب سمت راست معادله را جواب خصوصی گرفت

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$y'' + y' f_1(x) + y f_2(x) = f(x)$$

$$y = y_h + y_p$$

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

روش عمومی

در این روش یک w به صورت زیر حساب می کنیم

$$w = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

$$y = -y_1 \int \frac{f y_2}{w} dx + y_2 \int \frac{f y_1}{w} dx$$

$$(D-1)^2 y = \frac{e^t}{t^2}$$ -1

$$y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x}$$ -2

$$(D^2 - 9D + 18) y = e^{e^{-3x}}$$ -3

حل 1:

$$y_1 = e^t \qquad e^t$$

$$y_2 = te^t \qquad e^t + te^t$$

$$\Rightarrow w = e^{2t} \qquad \Rightarrow y = -e^t \int \frac{e^t t e^t}{t^2 e^{2t}} dt + te^t \int \frac{e^t e^t}{t^2 e^{2t}} dt$$

حل 2:

$$y_1 = e^{2x} \qquad 2e^{2x}$$

$$y_2 = xe^{2x} \qquad e^{2x} + 2xe^{2x}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$w = e^{4x}$

$$y = -e^{2x}\int \frac{e^{2x} x e^{2x}}{x e^{4x}}\,dx + x e^{2x}\int \frac{e^{2x} e^{2x}}{x e^{4x}}\,dx$$

حل 3:

$y_1 = e^{3x}$ $3e^{3x}$

$w = 3e^{9x}$

$y_2 = e^{6x}$ $6e^{6x}$

$$y = -e^{3x}\int \frac{e^{e^{-3x}} e^{6x}}{3e^{9x}}\,dx + e^{6x}\int \frac{e^{e^{-3x}} e^{+3x}}{3e^{9x}}\,dx$$

دستورات کاهش مرتبه

برای معادلات مرتبه دوم غیرخطی

$F(x, y, y', y'') = 0$

حالت اول: $F(x, y', y'') = 0$ فاقد تابع

$y' = p \Rightarrow y'' = \frac{dp}{dx}$

$\Rightarrow F(x, p, \frac{dp}{dx}) = 0$

۱- فاقد y $(1+x^2)y'' + 2xy' = x^3$

$$p' + \frac{2x}{1+x^2}p = \frac{x^3}{1+x^2}$$

$\ln(1+x^2)$

$\Rightarrow p = \frac{1}{1+x^2}\left[\int x^3 dx + c_1\right]$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$p = \left(\frac{1}{4}\frac{x^4}{1+x^2} + \frac{c_1}{1+x^2}\right) = \frac{dy}{dx}$$

$$(1+x^2)y'' + 2xy' = \cancel{\;} \times \frac{1}{1+x^2}$$ -2

$$xy''' - 2y'' = 0 \qquad xp' = 2p$$ -3

$$\frac{dp}{p} = 2\frac{dx}{x} \Rightarrow p = c_1 x^2 \qquad y'' = c_1 x^2 \qquad y' = c_1 x^3 + c_2$$

$$y = c_1 x^4 + c_2 x + c_3$$

$$xy'' + y' = 2x\ln x \qquad p' + \frac{1}{x}p = 2\ln x$$ -4

حالت دوم: $F(y, y', y'') = 0$ فاقد متغیر

$$y' = p \Rightarrow y'' = \frac{dp}{dx}$$

$F\left(y, p, \frac{dp}{dx}\right) =$ سه مجهول فاقد x $\Rightarrow y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot \frac{dp}{dy}$

$$y'' = p\frac{dp}{dy}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

-1

$\ddot{y} + \acute{y}^3 e^{2y} = 0 \qquad \cancel{p} \frac{dp}{dy} + p^{\cancel{3}\,2} e^{2y} = 0$

$\frac{dp}{p^2} + e^{2y} dy = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{p} + \frac{1}{2} e^{2y} = c_1$

$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} e^{2y} + c_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2} e^{2y} + c_1$

$dx = (\frac{1}{2} e^{2y} + c_1) dy \qquad x = \frac{1}{4} e^{2y} + c_1 y + c_2$

-2

$y y'' + y'^2 = 1 \qquad y'' = p \frac{dp}{dy} \qquad y$

$y p \frac{dp}{dy} + p^2 = 1 \qquad \frac{dp}{dy} + \frac{p}{y} = \frac{1}{py}$

$p \frac{dp}{dy} + \frac{p^2}{y} = \frac{1}{y}$ برنولی $u = p^2$

$\frac{du}{dy} = 2p \frac{dp}{dy} \qquad \frac{du}{dy} + \frac{2}{y} u = \frac{2}{y}$

یا جداشدنی

$\frac{p\,dp}{1-p^2} + \frac{dy}{y} = 0$

-3

[illegible] $y'' + \sin y = 0 \quad \Rightarrow$ [illegible] $= ? \qquad y(0) = \frac{\pi}{3}$

$y'(0) = 0$

$p \frac{dp}{dy} + \sin y = 0 \qquad \frac{1}{2} p^2 = \cos y + c$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\Rightarrow y' = p = \sqrt{2\cos y + c} \qquad c = -1$

$0 = \sqrt{2\cos\frac{\pi}{3} + c} \Rightarrow c = -1$

.4

$2yy'' + y'^2 = 0 \qquad 2yp\frac{dp}{dy} + p^2 = 0$

$\frac{dp}{p} + \frac{1}{2}\frac{dy}{y} = 0 \qquad \ln p y^{1/2} = \ln c_1$

$py^{1/2} = c_1 \Rightarrow y^{1/2}dy = c_1 dx$

.5

$y'' = xy'^3$

$\frac{dp}{dx} = xp^3 \quad \frac{dp}{p^3} = x\,dx \qquad \frac{1}{p^2} = -x^2 + c_1$

$y'^2 = \frac{1}{c_1 - x^2} \Rightarrow y' = \sqrt{\frac{1}{c_1 - x^2}}$

$y'' - 3y^2 = 0 \qquad y'(0) = 4 \quad , y(0) = 2$ 6

$p\frac{dp}{dy} = 3y^2 \qquad p\,dp = 3y^2 dy \qquad p^2 = \frac{2}{2}y^3 + c_1$

$y' = \sqrt{\frac{2}{2}y^3 + c_1} \quad \Rightarrow c_1 = 0 \qquad \Rightarrow y' = \sqrt{2y^3}$

$y' = \sqrt{2}\,y^{3/2} \qquad y^{-3/2}dy = \sqrt{2}\,dx$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$x y'' + y' = 1 + x^2$ 7

حالت سوم: $F(x, y, y', y'')$

نسبت به y و مشتقات همگن است هرگاه $F(x, \lambda y, \lambda y', \lambda y'') = \lambda^{\alpha} F(x, y, y', y'')$

$\Rightarrow y = e^{\int z\,dx} \qquad z = f(x)$

۱- x, y, y' همگن نیست

$x^2 y y'' = (y - x y')^2$

$y = e^{\int z\,dx} \Rightarrow y' = z e^{\int z\,dx} \Rightarrow y'' = z' e^{\int z\,dx} + z^2 e^{\int z\,dx}$

$x^2 y y'' - y^2 - x^2 y'^2 + 2 x y y' = 0 \qquad e^{2\int z\,dx} \overset{\text{مرتبه ۱ جد}}{(x^2 z' + \cancel{x^2 z^2} - 1 - \cancel{x^2 z^2} + 2xz)} = 0$

همیشه $e^{\alpha\int}$ بیرون می‌افتد

α درجه همگنی $= 2$

1) $xz' = 2 + xz$ 2) $x^2 z' = 1 - 2xz$ ✓

3) $xzz' = 1 + xz$ 4) $xzz' = 2 - 2xz$

$x^2 z' = 1 - 2xz \qquad z' + \frac{2}{x} z = \frac{1}{x^2}$

$y y'' + y'^2 + x y^2 = 0$

معادلات خطی با ضرایب متغیر:

معادله کوشی از مرتبه دوم: $x^2 y'' + a x y' + b y = f(x)$

تبدیل به معادله خطی با ضرایب ثابت $\Rightarrow$ $x = e^z$ تغییر متغیر

$z = \ln x \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dz}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$y'' = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dz^2}$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} + a\frac{dy}{dz} + by = f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dz^2} + (a-1)\frac{dy}{dz} + by = f(x) \Rightarrow$$ معادله با ضرایب ثابت

$$t^2 + (a-1)t + b = 0$$ معادله مشخصه عادی حفظ شود فقط از a یک واحد کم شود

$t_1 \neq t_2 \in R$ $\Delta > 0$

$$y = c_1 x^{t_1} + c_2 x^{t_2}$$

t $\Delta = 0$

$$y = (c_1 + c_2 \ln x)\, x^{t}$$

$e^{t\ln x}$, tz

$p \pm iq$ $\Delta < 0$

$$y = x^{p}\left(c_1\cos(q\ln x) + c_2\sin(q\ln x)\right)$$

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$$ -1

$$t^2 - 4t + 4 = 0 \qquad t = 2$$

$$y = (c_1 + c_2\ln x)\, x^2$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

-2

$x^2y'' + xy' + 9y = 0$

-3

$x^2y'' + xy' + 5y = \ln x$

$t^2 - 2t + 5 = 0 \qquad 1 \pm 2i$

$y_h = x\left(c_1\cos(2\ln x) + c_2\sin(2\ln x)\right)$

$t^2 - t + 5 = 0 \qquad \ddot{y} - \dot{y} + 5y = Z \qquad y_p = AZ + B$

$0 - 2A + 5\overset{A}{\cancel{Z}} + 5B = Z$

$5AZ = Z \qquad 5A = 1 \qquad A = \frac{1}{5} \qquad y_p = \frac{Z}{5} + \frac{2}{25}$

$-2A + 5B = 0 \qquad B = \frac{2}{25}$

$x^2y'' - 2y = 0 \qquad t^2 - t - 2 = 0$ -4

$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + 3t\frac{dy}{dt} + by = 0$ -5

کلیه مقادیری از ثابت b که به ازای آنها جواب کراندار باشد

$t \to \infty$

$\lambda^2 + 2\lambda + b = 0 \qquad -1 \pm \sqrt{1-b}$

PAPCO

$$y_1 = c_1 t^{(-1-\sqrt{1-b})} + c_2 t^{-1+\sqrt{1-b}}$$

لازمه آنکه وقتی t به سمت بینهایت می‌رود رابطه و b محدود باشد آنست که

$$-1 + \sqrt{1-b} < 0 \qquad 0 < \sqrt{1-b} < 1$$

$$0 < 1-b < 1 \Rightarrow -1 < -b < 0 \Rightarrow 0 < b < 1$$

معادله خطی با ضرایب متغیر 2 :

$$y'' + y' f_1(x) + y f_2(x) = f(x)$$

فرض y_1 یک جواب معادله همگن متناظر موجود باشد

$$y_1'' + y_1' f_1 + y_1 f_2 = 0$$

پس جواب عمومی $y = u y_1$

$$u'' y_1 + 2u' y_1' + u y_1'' \quad , \quad u' y_1 + u y_1'$$

$$u'' y_1 + 2u' y_1' + u y_1'' + f_1 u' y_1 + f_1 u y_1' + u y_1 f_2 = f$$

$$u(y_1'' + f_1 y_1' + f_2 y_1) = 0$$

$$\Rightarrow u'' + u'\left(\frac{2y_1'}{y_1} + f_1\right) = \frac{f}{y} \quad \Rightarrow$$ معادله فاقد تابع

$$\Rightarrow u' = p \quad \Rightarrow p' + p\left(\frac{2y_1'}{y_1} + f_1\right) = \frac{f}{y_1}$$ خطی شود

معمولاً $f = 0$ است پس

$$u'' + u'\left(\frac{2y_1'}{y} + f_1\right) = 0$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\frac{u''}{u'} + 2\frac{y_1'}{y_1} = -f_1 \qquad \ln u' y_1^2 = -\int f_1\,dx$$

$$u' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int f_1\,dx} \Rightarrow u = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int f_1\,dx}\,dx$$

u دو بار مشتق دارد

چون معادله همگن است $\Rightarrow$ $y = c_1y_1 + c_2y_2$, $y_2 = uy_1$ را می‌گیریم که u مستقل است

تعیین y_1

اگر $f_1 + xf_2 = 0 \Rightarrow y_1 = x$

اگر $1 + f_1 + f_2 = 0 \Rightarrow y_1 = e^{x}$

اگر $1 - f_1 + f_2 = 0 \Rightarrow y_1 = e^{-x}$

$$\alpha^2 + \alpha f_1 + f_2 = 0 \Rightarrow y_1 = e^{\alpha x}$$

معادله درجه دو مشخصه زیرا α کوراست

1- $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0 \qquad y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{2}{1-x^2} = 0$

$f_1 + xf_2 = 0 \Rightarrow y_1 = x \quad , y_2 = ux$

$$u = \int \frac{1}{x^2} e^{+\int \frac{2x}{1-x^2}dx}\,dx = \int \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1-x^2}$$

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

u را می‌توان بدون ثابت انتگرال‌گیری حساب کرد و در $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ می‌گذاریم

$$(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2 e^x$$ -2

$$y_1 = x$$

$$p' + p\left(\frac{2}{x} - \frac{x}{x-1}\right) = (x-1)e^x$$

$$p \Rightarrow u \Rightarrow y = u y_1$$

-3

$$x^2(x^2-1)y'' - x(x^2+1)y' + (x^2+1)y = 0$$

$$u = \int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{x^2+1}{x(x^2-1)} dx} dx \qquad y_1 = x$$

$$(x-2)y'' - (4x-7)y' + (4x-6)y = 0$$ -4

$$(x-2)\alpha^2 - (4x-7)\alpha + (4x-6) = 0$$

$$x(\alpha^2 - 4\alpha + 4) - 2\alpha^2 + 7\alpha - 6 = 0$$ براساس قوای x مرتب شود

$$\alpha = 2$$

$$y_1 = e^{2x} \qquad y_2 = u\, e^{2x}$$

$$u = \int \frac{1}{e^{4x}} e^{\int \frac{4x-\cancel{7}^{\,-8+1}}{x-2} dx} = \int (x-2)\,dx$$

PAPCO

-5

$y_1 = \sqrt{1-x}$ جواب $\Rightarrow y'' + \frac{1}{4(x-1)^2} y = 0$

جواب دوم کدام است ؟

$\Rightarrow y_2 = u \cdot y_1 \qquad u = \int \frac{1}{1-x} dx$ e^0

همگن

حل معادلات با استفاده از سری توانی :

$f(x)$, $x=a$

تابع $f(x)$ در $x=a$ تحلیلی است اگر در $x=a$ دارای بسط تیلور با شعاع همگرایی مثبت باشد

بسط مک لورن $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \dots$

$(x-c) \qquad (x-c)$ تیلور

$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$

$y'' + y' f_1(x) + y f_2(x) = f(x)$

اگر سه تابع f_1 و f_2 و f در نقطه‌ای تحلیلی باشند می‌توان بسط تیلور را به کار گرفت

1- اگر $y(x)$ جواب معادله دیفرانسیل زیر با شرط اولیه $y(0)=0$ و $y'(0)=1$ باشد مشتق مرتبه سوم در نقطه (0) کدام است

$y(0)=0 \quad y'(0)=1 \quad y'''(0)=?$

$e^{-x} y'' + xy' + y = 3 \qquad y''(0) + 0 + 0 = 3 \qquad y''(0) = 3$

$-e^{-x} y'' + e^{-x} y''' + y' + xy'' + y' = 0 \qquad -3 + y'''(0) + 1 + 0 + 1 = 0$

$y'''(0) = 1$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

2- اگر $y(x)$ جواب معادله دیفرانسیل زیر با شروط زیر باشد در بسط تابع $y(x)$ برحسب توانهای صعودی x ضریب x^3 کدام است

$y(0)=-2$ و $y'(0)=2$

$y'' - (x^2+1)y = 0$ $\qquad \frac{y'''}{3!} = ? = \frac{1}{3}$

$y''' = 2xy + (x^2+1)y'$ $\qquad y'''(0) = 2$ [illegible]

3- ضریب x^3 کدام است

$y'' + y'\sin x + ye^x = 0$ $\qquad y(0) = y'(0) = 1$

$y''(0) = -1$ $\qquad y''' + y''\sin x + y'\cos x + y'e^x + ye^x = 0$

$y'''(0) = -1-1-1 = -3$ $\qquad \frac{-3}{3!} = -\frac{1}{2}$

4- هرگاه $y = \sum a_n x^n$ جواب به صورت سری توانی برای معادله $y'' - 2xy' + 8y = 0$ و $y'(0) = 0$ و $y(0) = 12$ باشد آنگاه ضریب a_2 کدام است.

$a_2 = \frac{y''(0)}{2!}$ $\qquad y''(0) = -8 \times 12$ $\qquad a_2 = -48$

5- $y'' + xy = 0$

$y(0) = y'(0) = 1$ ضریب a_3 کدام است

$y''(0) = 0$

$y'''(0) + 1 = 0$ $\qquad y''' = -1$ $\qquad a_3 = \frac{-1}{6}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$P_1(x)y'' + P_2(x)y' + P_3(x)y = 0$$

در معادله فوق که P_1 و P_2 و P_3 سه تا چند جمله‌ای هستند (sin. cos. نیستند) نقطه $x=a$ را یک نقطه معمولی گوییم اگر $P_1(a) \neq 0$ باشد

• در معادله فوق اگر $x=a$ یک نقطه معمولی باشد آنگاه هر جواب معادله به صورت سری توانی بیان می شود.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots a_n x^n + \dots$$

$$y' = a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots$$

$$y'' = 2a_2 + \dots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \dots$$

$$\Rightarrow y = c\,(\text{یک سری توانی برحسب توانهای } x) + c^{*}\,(\text{یک سری توانی دیگر برحسب توانهای } x)$$

۱- اگر $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ جواب معادله $y'' - xy' = 0$ باشد آنگاه

4 $a_{n+3} = -$ 〃 3 $a_{n+3} =$ 〃 2 $a_{n+2} = \frac{-n}{(n+1)(n+2)} a_n$ 1 $a_{n+2} = \frac{n}{(n+1)(n+2)} a_n$ ✓

آنهایی که در حل مسأله محاسبه می شوند پارامترهای مسأله هستند

$$2a_2 + 6a_3 x + \dots + (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

$$+ \quad -a_1 x + \dots - n a_n x^n$$

رابطه بازگشتی

$a_2 = 0 \Rightarrow a_4 = 0 \Rightarrow a_6 = 0$

a_1 و a_0 دو پارامتر ما است

$$y = a_0 \qquad + a_1\left(x + \frac{1}{6}x^3 \dots\right)$$

اگر $a_2 = 0$ نبود یک سری هم با a_0 باز می شد

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

2 $y''-xy'+y=0$ مساله قبل

$$2a_2+6a_3x+\dots+(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n \dots$$
$$-a_1x - \dots - na_nx^n \dots$$
$$a_0+a_1x+\dots+a_nx^n \dots$$

$a_2=-\frac{1}{2}a_0 \quad , a_3=0$

if $y''-xy'-y=0$

〃 〃 〃 〃

〃 〃 〃 〃 $a_{n+2}=\frac{1}{(n+2)}a_n$

$-a_0 \quad -a_1x \quad \dots -a_nx^n$

$a_2=\frac{1}{2}a_0 \qquad a_3=\frac{1}{3}a_1$

$y=a_0(1+\frac{1}{2}x^2+\dots)+a_1(x+\frac{1}{3}x^3+\dots)$

شعاع همگرایی از رابطه بازگشتی گرفته می شود

$\frac{\text{جمله بعد}}{\text{جمله قبل}} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}=\frac{1}{n+2}=0 \quad R=\infty$ شعاع همگرایی

جمله بعد از a_n می شود a_{n+2}

معادله لژاندر: $(1-x^2)y'' - 2xy' + m(m+1)y = 0 \qquad P_1(a) \neq 0$

نقطه $x=0$ یک نقطه معمولی تلقی می‌شود.

جایگذاری $\Rightarrow$ رابطه بازگشتی $\quad C_{n+2} = -\dfrac{(m-n)(m+n+1)}{(n+2)(n+1)} C_n$

شعاع همگرایی $R=1$ فاصله همگرایی $[-1,1]$

اگر به n صفر داده شود c_2 و اگر یک داده شود c_3 حساب می‌شود $\Leftarrow c_0$ و c_1 قابل محاسبه نیستند.

$$\Rightarrow y = c_0(1 + \Box x^2 + \emptyset x^4) + c_1(x + \boxtimes x^3 + \emptyset x^5 + \dots)$$

$C_6 = 0 \quad \text{if } m(m+1) = 20 \Rightarrow m=4 \Rightarrow C_6 = C_{n+2} \Rightarrow n=4 \Rightarrow (m-n)=0$

$\Rightarrow C_6 = 0 \Rightarrow C_8 = 0 \Rightarrow \dots$

$m(m+1) = 12 \qquad m=3$

$y = c_0(1 + \bigcirc x^2 \,\Box x^4 + \dots) + c_1(x + \emptyset x^3)$

یک چندجمله‌ای از درجه m که فقط فقط زوج است یا فقط فرد حتماً در معادله صدق می‌کند.

فرد $ax^5 + bx^3 + cx = 0$

$m=4 \qquad C_0 + C_2 x^2 + C_4 x^4$ در معادله صدق می‌کند

$\Rightarrow C_0(1 + \bigcirc x^2 + \Box x^4)$

$$C_{n+2} = -\frac{(m-n)(m+n+1)}{(n+2)(n+1)} C_n \Rightarrow C_n = \frac{\bigcirc}{\square} C_{n+2}$$

$$\Rightarrow C_4 \left(x^4 + \oslash x^2 + \square \right)$$

اگر C_n را مطابق زیر بگیریم

$$C_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$$

چندجمله‌ای لژاندر $\underline{12}x^4 + \underset{\text{مثلاً}}{\underline{5}}x^2 + \underline{6}$ جواب مثلاً $\Leftarrow$

چندجمله‌ای لژاندر را با $P_n(x)$ نشان می‌دهند

ضریب $= 20 \Rightarrow m = 4 \Rightarrow$ جواب $= P_4(x)$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}$$ لازم نیست حفظ شود

ب. $$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$$ فرمول رودریگ

ب. $$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$$

$$x = 1 \Rightarrow \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1) t^n \Rightarrow P_n(1) = 1$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\left.\begin{array}{l} P_0(x)=1 \\ P_1(x)=x \\ P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1) \\ P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x) \end{array}\right\} \text{حفظ شوند}$$

شرط تعامد P_n ها $\quad m \neq n \quad$ $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx = 0$

$$\int_{-1}^{1} (P_n(x))^2\,dx = \frac{2}{2n+1}$$

اگر تابع f در شرایط قضیه دیریکله صدق کند (نقاط انفصال محدود باشد و ~~در~~ در نقاط انفصال حد چپ و راست موجود باشد (تابع پیوسته قطعه‌ای است) «تابع و مشتق آن به طور قطعه‌ای پیوسته باشد» در این صورت در نقاط پیوستگی تابع $f(x)$ را می‌توان به صورت زیر بسط داد:

مهم

$$f(x) = \sum_{0} C_n\,P_n(x)$$

$$C_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,P_n(x)\,dx$$

و در نقطه ناپیوستگی میانگین حد چپ و راست می‌شود

1- $$\int_{-1}^{1} (\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma)\, P_{2k-1}(x) = 0$$

زوج — فرد

2- $P_0(x)=1$ ، $P_1=x$ و $-1<x<1$ و $P_2(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$

مقادیر α و β و γ چگونه باشند که که P_0 و P_1 و P_2 یک مجموعهٔ متعامد باشند

β نباید باشد ← $\beta=0$ $\qquad P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$

$\int_{-1}^{1} P_1(x)\,P_2(x)$ $\qquad \int_{-1}^{1} P_0(x)\,P_2(x)$ $\qquad \int_{-1}^{1} (P_n(x))^2\,dx = \frac{2}{2n+1}$

سه معادله سه مجهول

3- $$\int_{-1}^{1} (x^4-2x^2)\, P_{2k+1}(x)\,dx = 0$$

4- P_2 ، y_1 جواب و $(1-x^2)y''-2xy'+6y=0$ لژاندر با اندیس $m=2$

P_1 ، $=y_2$ جواب و $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$ لژاندر با اندیس 1

$$\int_{-1}^{1} x y_1 y_2\,dx = 0$$

$$\int_{-1}^{1} y_1 y_2\,dx = 0 \quad ✓$$

$$\int_{-1}^{1} y_1 y_2\,dx = \frac{2}{5}$$

$$\int_{-1}^{1} y_1 y_2\,dx = \frac{2}{3}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\int_{-1}^{1} x^3 P_2(x)\,dx = 0$$ 5-

$$\int_{-1}^{1} (x+1)P_0\,dx = \qquad P_0 = 1$$ 6-

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} (x+1)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$P_1(x)y'' + P_2(x)y' + P_3(x)y = 0$$

P_1 و P_2 و P_3 سه تا چندجمله‌ای

اگر $P_1(a)=0$ آنگاه a یک نقطه منفرد است.

$$\cancel{P_1(x)} \quad P_1(a) = 0 \Rightarrow P_1(x) = (x-a)(Q(x))$$

$$\Rightarrow y'' + \frac{g(x)}{(x-a)}y' + \frac{h(x)}{(x-a)^2}y = 0$$

$g(x) = \frac{\text{چندجمله‌ای}}{\text{چندجمله‌ای}} =$ گویا

اگر مخرج صفر شود تحلیلی نیست

اگر $g(x)$ و $h(x)$ در $x=a$ تحلیلی باشند آنگاه a را منفرد منظم گویند و اگر لااقل یکی تحلیلی نباشد منفرد نامنظم است.

* 1- درمعادله زیر نوع نقاط تکین (منفرد) را تعیین کنید

$$x^2(x-1)^3y'' + x(x-1)y' + y = 0$$