به نام یزدان پاک و بی همتا

حساب دیفرانسیل و انتگرال

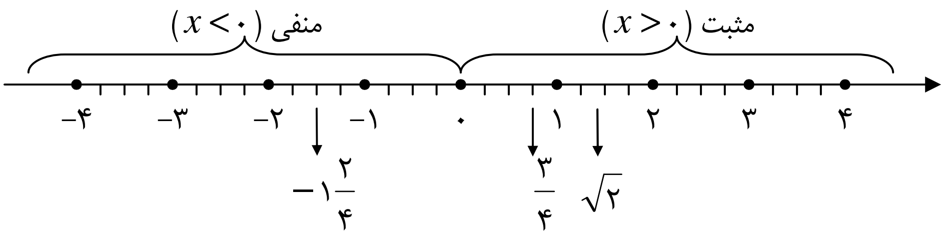
فصل صفر: مفاهیم پایه

تهیه کننده: جابر عامری

دبیر ریاضی دبیرستان های اهواز و باوی

مجموعه ی اعداد حقیقی

قبلاً با مجموعه ی اعداد حقیقی (R) آشنا شده اید و می دانید که هر عدد حقیقی متناظر با یک نقطه روی محور و هر نقطه ی محور متناظر با یک عدد حقیقی است. به همین دلیل چنین محوری را محور اعداد حقیقی می نامند.



هر عدد حقیقی به یکی از شکل های زیر است.

الف) گویا (مُنطق) : طبق تعریف عدد حقیقی گویا عددی است که می توان آن را به صورت یک کسر متعارفی نوشت، به شرط اینکه صورت و مخرج آن عدد صحیح بوده و مخرج آن غیر صفر باشند. مانند :

$$\frac{1}{3} \text{ و } -\frac{3}{4} \text{ و } 2/7 \text{ و } 5 \text{ و } 0 \text{ و } 1\frac{3}{5} \text{ و } ....$$

ب) گنگ (اصم) : عددی است که نمی توان آن را به صورت یک کسر متعارفی نوشت. مانند :

$$\sqrt{2} \text{ و } \sqrt{3} \text{ و } \pi \text{ و } e \text{ و } .....$$

تمرین : اعداد $1\frac{2}{3}$ و $-0/3$ را روی محور اعداد حقیقی نمایش دهید.

تمرین : اعداد $-\sqrt{5}$ و $\sqrt{3}$ و $\sqrt{2}$ را روی محور اعداد حقیقی نمایش دهید.

یادداشت : هر عدد گویا را می توان به صورت یک کسر متعارفی تحویل ناپذیر(ساده نشدنی) نوشت. منظور از کسر تحویل ناپذیر یا ساده نشدنی کسری است که « ب م م » صورت و مخرج آن یک باشد.

$$\frac{a}{b} \text{ تحویل ناپذیر } \Leftrightarrow \begin{cases} a,b\in Z \\ b\neq 0 \\ (a,b)=1 \end{cases}$$

مانند کسر $\frac{5}{8}$ که ساده نشدنی می باشد.

تمرین : ثابت کنید که $\sqrt{2}$ یک عدد گنگ است.

اثبات : (به روش برهان خلف) فرض کنیم که عدد $\sqrt{۲}$ گنگ نباشد، پس گویا است و می توان آن را به صورت یک کسر تحویل ناپذیر نوشت.

$$\sqrt{۲}=\frac{a}{b}(a,b\in Z,b\neq ۰)\rightarrow(\sqrt{۲})^{۲}=(\frac{a}{b})^{۲}\rightarrow ۲=\frac{a^{۲}}{b^{۲}}\rightarrow a^{۲}=۲b^{۲}$$

یعنی $a^{۲}$ زوج است .پس a نیز زوج است قرار می دهیم $a=۲k$.

$$\Rightarrow(۲k)^{۲}=۲b^{۲}\rightarrow ۴k^{۲}=۲b^{۲}\rightarrow ۲k^{۲}=b^{۲}$$

یعنی $b^{۲}$ هم زوج است. پس b نیز زوج است.درنتیجه صورت و مخرج کسر $\sqrt{۲}=\frac{a}{b}$ بر ۲ بخش پذیرند و این با تحویل ناپذیر بودن آن تناقض دارد.لذا فرض خلف باطل وحکم ثابت است.

تمرین : ثابت کنید که $\sqrt{۳}$ یک عدد گنگ است.

تمرین : ثابت کنید که $\sqrt{۵}$ یک عدد گنگ است.

تمرین : ثابت کنید که $\log^{۳}$ یک عدد گنگ است.

اثبات : (به روش برهان خلف) فرض کنیم که عدد $\log^{۳}$ گنگ نباشد، پس گویا است و می توان آن را به صورت یک کسر تحویل ناپذیر نوشت.

$$\log^{۳}=\frac{a}{b}(a,b\in Z,b\neq ۰)\rightarrow(۱۰)^{\frac{a}{b}}=۳\rightarrow((۱۰)^{\frac{a}{b}})^{b}=(۳)^{b}\rightarrow(۱۰)^{a}=(۳)^{b}$$

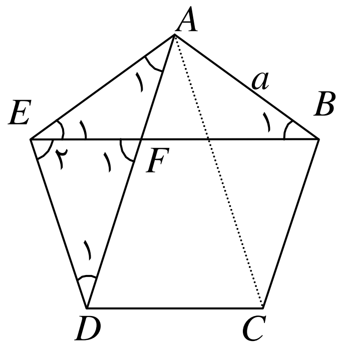
و چون یک طرف تساوی بدست آمده، مضرب ۳ بوده و طرف دیگر مضرب ۳ نمی باشد، این تساوی غیر ممکن است(تناقض می باشد.) لذا فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

یادداشت : اگر a عدد گویا و غیر صفر و b عدد گنگ باشند. در این صورت اعداد $a\pm b$ و ab و $\frac{a}{b}$ و $\frac{b}{a}$ نیز گنگ هستند. برای مثال $۳-\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۱۸}=۳\sqrt{۲}$ و $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ گنگ هستند. به همین دلیل عدد $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ که به عدد طلایی معروف است، نیز عدد گنگ محسوب می شود.

تمرین : ثابت کنید که در هر پنج ضلعی منتظم به طول ضلع a ، نسبت طول قطر به طول ضلع ، عددی گنگ است.

(قضیه ی هیپاسوس)

اندازه ی هر زاویه ی پنج ضلعی منتظم



$$\alpha = \frac{(۵-۲)\times ۱۸۰}{۵} = ۱۰۸$$

مثلث AED متساوی الساقین است لذا $\angle D_۱ = \frac{۱۸۰-۱۰۸}{۲} = ۳۶^\circ$

همچنین $\angle E_۱ = ۳۶^\circ$.

پس در مثلث DEF زاویه ی $\angle E_۲ = ۱۰۸ - ۳۶ = ۷۲^\circ$ و $\angle F_۱ = ۱۸۰ - (۳۶ + ۷۲) = ۷۲^\circ$ یعنی مثلث DEF متساوی الساقین است، در نتیجه $DE = DF$

از طرفی دو مثلث

$$\begin{cases} \angle E_۱ = \angle E_۱ \\ \angle A_۱ = \angle B_۱ \end{cases} \rightarrow \Delta AEF \approx \Delta ABE \rightarrow \frac{AF}{AB} = \frac{EF}{AE} = \frac{AE}{BE}$$

$$\frac{AF}{AB} = \frac{AE}{BE} \rightarrow \frac{AD-DF}{AB} = \frac{AE}{BE} \xrightarrow{BE=d} \frac{d-a}{a} = \frac{a}{d} \rightarrow d^۲ - ad - a^۲ = ۰$$

$$\rightarrow d = \frac{a \pm \sqrt{a^۲ + ۴a^۲}}{۲} = \frac{a \pm \sqrt{۵a^۲}}{۲} = a(\frac{۱ \pm \sqrt{۵}}{۲})$$

و چون طول پاره خط همواره مثبت است، پس فقط جواب $d = a(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲})$ قابل قبول است. همچنین واضح است که $\frac{d}{a} = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ که یک عدد گنگ است.

***

نمایش اعشاری اعداد حقیقی

برای هر عدد گویا می توان بسط اعشاری در نظر گرفت. بسط اعشاری یک عدد گویا ممکن است پایان پذیر (مختوم) نظیر

$\cdot/\text{۴}=\frac{\text{۲}}{\text{۵}}$ و $\cdot/\text{۷۵}=\frac{\text{۳}}{\text{۴}}$ و $\text{۱}/\text{۵}=\frac{\text{۳}}{\text{۲}}$ باشد و ممکن است پایان ناپذیر ولی متناوب ساده یا مرکب[1] باشد. مثلاً :

متناوب ساده $\frac{\text{۲}}{\text{۳}}=\cdot/\text{۶۶۶۶}.....=\cdot/\overline{\text{۶}}$

متناوب مرکب $\frac{\text{۵}}{\text{۶}}=\cdot/\text{۸۳۳۳۳}.....=\cdot/\text{۸}\overline{\text{۳}}$

لذا هر عدد گویا دارای یک بسط اعشاری پایان پذیر و یا پایان ناپذیر ولی متناوب (ساده یا مرکب) می باشد، ولی هـر عـدد گنگ بسط اعشاری ندارد. امّا می توان تقریبی اعشاری (تا چند رقم اعشار) برای آنها در نظر گرفت. مانند:

تقریب اعشاری $\sqrt{\text{۲}}$ تا دو رقم اعشار $\sqrt{\text{۲}}=\text{۱}/\text{۴۱}$

تقریب اعشاری $\sqrt{\text{۳}}$ تا یک رقم اعشار $\sqrt{\text{۳}}=\text{۱}/\text{۷}$

تقریب اعشاری $\sqrt{\text{۵}}$ تا سه رقم اعشار $\sqrt{\text{۵}}=\text{۲}/\text{۲۳۶}$

تقریب اعشاری π تا دو رقم اعشار $\pi=\text{۳}/\text{۱۴}$

عدد π یکی از اعداد گنگ معروف می باشد. این عدد را برابر خارج قسمت محیط دایره بر طول قطر آن تعریف می کنند.

تقریب اعشاری e تا دو رقم اعشار $e=\text{۲}/\text{۷۱}$

عدد e نیز یکی دیگر از اعداد گنگ معروف می باشد، این عدد را عدد نپرین می نامند و آن را به افتخار اویلر با e نمـایش می دهند. در ریاضیات عالی با تعریف این عدد مواجه می شوید.

تذکر : اگر یک بسط از یک عدد گویا داشته باشید، کسر متعارفی مساوی آن را مانند نمونه های زیر به دست آورد.

عدد را قرائت کنیدو قرائت خود را بنویسید.	بسط اعشاری مختوم $\cdot/\text{۲۳}=\frac{\text{۲۳}}{\text{۱۰۰}}$
$\frac{\text{ارقام بعد از ممیز}}{\text{به تعداد دوره ی گردش ۹}}$	بسط اعشاری متناوب ساده $\cdot/\overline{\text{۱۵}}=\frac{\text{۱۵}}{\text{۹۹}}$

[1] . در بسط اعشاری متناوب ساده و یا مرکب ، دسته ارقامی که مرتب تکرار می شوند را دوره ی گردش عدد نامندو بـالای ارقـامی کـه دوره ی گردش اند، خط کشیده می شود. همچنین تعدادی رقم که بین دوره ی گردش و ممیز قرار دارند، ارقام غیر دوره ی گردش نامیده می شوند.

مثلاً : بسط $\cdot/\overline{\text{۵۳۸۴۶۱}}=\frac{\text{۷}}{\text{۱۳}}$ متناوب ساده و بسط $\cdot/\text{۰۰۱۷}\overline{\text{۸۵۱۴۲}}=\frac{\text{۱}}{\text{۵۶}}$ متناوب مرکب می باشند.

$$\frac{\text{ارقام غیر دوره ی گردش} - \text{ارقام بعد از ممیز}}{\text{(به تعداد غیر دوره ی گردش صفر)(به تعداد دوره ی گردش ۹)}}$$

بسط اعشاری متناوب مرکب $۰/۲\overline{۳۱} = \frac{۲۳۱-۲}{۹۹۰} = \frac{۲۲۹}{۹۹۰}$

به الگوی زیر نیز می توانید توجه کنید.

$$\circ / a_۱a_۲...a_m\overline{b_۱b_۲...b_n} = \frac{a_۱a_۲...a_mb_۱b_۲...b_n - a_۱a_۲...a_m}{\underbrace{۹۹...۹}_{n \text{ تا}}\underbrace{\circ\circ..\circ}_{m \text{ تا}}}$$

تمرین : عدد $۲/۵۳\overline{۴}$ را به صورت کسر متعارفی بنویسید.

حل :

$$۲/۵۳\overline{۴} = ۲ + ۰/۵۳\overline{۴} = ۲ + \frac{۵۳۴-۵۳}{۹۰۰} = ۲ + \frac{۴۸۱}{۹۰۰} = \frac{۱۸۴۸۱}{۹۰۰}$$

تمرین : اعداد اعشاری زیر را به صورت کسر متعارفی بنویسید.

$۱)۰/۲۳۵$ $\quad$ $۲)\ ۰/\overline{۲۳۵}$ $\quad$ $۳)\ ۰/۲\overline{۳۵}$ $\quad$ $۴)\ ۰/۲۳\overline{۵}$

یادداشت : حاصل جمع و ضرب هر دو عدد گویا، گویا است و در اصطلاح گوییم مجموعه ی اعداد گویا نسبت بـه عمـل جمع و ضرب بسته است. اما مجموع و یا حاصل ضرب دو عدد گنگ ممکن است گنگ نباشد. برای مثال :

$$(۳+\sqrt{۲}) + (۳-\sqrt{۲}) = ۶ \in Q$$

$$(۳+\sqrt{۲})(۳-\sqrt{۲}) = ۷ \in Q$$

$$\frac{\sqrt{۱۸}}{\sqrt{۲}} = ۳ \in Q$$

***

دستگاه اعداد حقیقی

مجموعه ی اعداد حقیقی، اعمال جمع و ضرب روی اعضای این مجموعه و خواص جبری آنها را دستگاه اعداد حقیقـی مـی نامند. دستگاه اعداد حقیقی مشتمل بر اصول موضوعه ی[2] است که در ادامه آنها را بیان می کنیم.

[2] . اصل موضوع یا به اختصار اصل ، حکم یا گزاره ای است که آن را بدون دلیل و برهان می پذیریم.

اصل های جمعی : در مجموعه ی اعداد حقیقی ، عمل جمع که با نماد $(+)$ نشان داده می شود، تابعی است که بـه ازاء هر زوج مرتب (a,b)از اعداد حقیقی، عددی حقیقی به شکل $a+b$ نظیر می کند. برای این عمل اصول زیر را معرفـی می کنیم.

ج۱) حاصل جمع هر دو عدد حقیقی ، یک عدد حقیقی است.

$$x, y \in R \rightarrow x+y \in R$$

ج۲) برای هر دو عدد حقیقی x و y همواره داریم.

$$x+y=y+x \text{ (اصل جابجایی جمع)}$$

ج۳) برای هر سه عدد حقیقی x و y و z داریم.

$$(x+y)+z=x+(y+z) \text{ (اصل شرکت پذیری جمع)}$$

ج۴) صفر یک عدد حقیقی است و حاصل جمع هر عدد حقیقی با صفر برابر همان عدد است.

$$x+۰=۰+x=x$$

عدد صفر را عضو همانی جمع نیز نامیده می شود.

ج۵) به ازاء هر عدد حقیقی x عضوی از اعداد حقیقی مانند y وجود دارد، بطوری که

$$x+y=y+x=۰$$

عدد y را قرینه ی x می نامند و آن را با $-x$ نمایش می دهند.

ج۶) می توان به دو طرف یک تساوی عدد حقیقی ثابتی اضافه نمود و تساوی جدیدی بدست آورد.

$$x=y \xrightarrow{a \in R} x+a=y+a$$

تمرین : ثابت کنید که عضو صفر از Rمنحصر به فرد است.

حل : فرض کنیم که $o_۱$و $o_۲$ هردو نقش صفر یعنی عضو همانی جمع R را داشته باشند. در این صورت می توان نوشت:

$o_۱=o_۱+o_۲$ ($o_۲$ همانی است.)

$=o_۲+o_۱$ (خاصیت جابجایی)

$=o_۲$ ($o_۱$ همانی است.)

تمرین : ثابت کنید ، عضو قرینه ی هر عدد حقیقی منحصر به فرد است.

حل : فرض کنیم y_1 و y_2 هر دو قرینه ی عدد حقیقی x باشند. در این صورت می توان نوشت:

$y_2 = y_2 + 0$ (۰عضو همانی جمع)

$= y_2 + (x + y_1)$ (y_1 قرینه ی x است. پس $x + y_1 = 0$)

$= (y_2 + x) + y_1$ (خاصیت شرکت پذیری جمع)

$= 0 + y_1$ (y_2 قرینه ی x است. پس $x + y_2 = 0$)

$= y_1$ (۰عضو همانی جمع)

تعریف : تفریق عدد حقیقی y از عدد حقیقی x یعنی $x - y$ را با حاصل جمع x با قرینه ی y تعریف می کنند.

$$x - y = x + (-y)$$

تمرین : برای هر دو عدد حقیقی x و y ثابت کنید. $-(x + y) = -x - y$

حل: منظور از نماد $-(x + y)$ قرینه ی $x + y$ است، و چون جمع $-(x + y)$ و $x + y$ برابر صفر می باشد،پس کافی است که ثابت کنیم جمع $-x - y$ و $x + y$ نیز برابر صفر است.

$$(x + y) + (-x - y) = (y + x) + ((-x) + (-y)) = y + (x + (-x)) + (-y)$$
$$= y + 0 + (-y) = (y + 0) + (-y) = y + (-y) = 0$$

تمرین : ثابت کنید که اگر $x - y = 0$ آنگاه $x = y$

حل :

$$x = x + (y + (-y)) = x + ((-y) + y) = (x - y) + y = 0 + y = y$$

تمرین : ثابت کنید که قرینه ی قرینه ی هر عدد حقیقی برابر همان عدد حقیقی است. یعنی برای هر عدد حقیقی x داریم.

$$-(-x) = x$$

حل :

روش اول : کافی است ثابت کنیم. $-(-x) + (-x) = 0$

$$-(-x) + (-x) = -(-x + x) = 0$$

روش دوم : کافی است نشان دهیم که : $-(-x) - x = 0$

$$-(-x) - x = -(-x) + (-x) = -(-x + x) = 0$$

تمرین : ثابت کنید که برای هر سه عدد حقیقی x و y و z، اگر $x+z=y+z$ آنگاه $x=y$ (قانون حذف)

حل :

روش اول :

$$x = x + \cdot = x + (z + (-z)) = (x + z) + (-z) = (y + z) + (-z) = y + (z + (-z)) = y + \cdot = y$$

روش دوم : به دو طرف تساوی $x+z=y+z$ عدد $-z$ اضافه می کنیم.

$$x + z = y + z$$
$$\to x + z + (-z) = y + z + (-z)$$
$$\to x + (z + (-z)) = y + (z + (-z))$$
$$\to x + (\cdot) = y + (\cdot)$$
$$\to x = y$$

***

اصل های ضربی : در مجموعه ی اعداد حقیقی ، عمل ضرب که با نماد ($\times$) یا (.)نشان داده می شود، تابعی است کـه به ازاء هر زوج مرتب (a,b)از اعداد حقیقی، عددی حقیقی به شکل $a\times b$ یا $a.b$ یا ab نظیر می کند. برای این عمل اصول زیر را معرفی می کنیم.

ض۱) حاصل ضرب هر دو عدد حقیقی ، یک عدد حقیقی است.

$$x, y \in R \to xy \in R$$

ض۲) برای هر دو عدد حقیقی x و y همواره داریم.

$xy = yx$ (اصل جابجایی ضرب)

ض۳) برای هر سه عدد حقیقی x و y و z داریم.

$(xy)z = x(yz)$ (اصل شرکت پذیری ضرب)

ض۴) عدد ۱، یک عدد حقیقی است و حاصل ضرب هر عدد حقیقی با ۱ برابر همان عدد است.

$$x \times ۱ = ۱ \times x = x$$

عدد ۱ را عضو همانی ضرب نیز نامیده می شود.

ض۵) به ازاء هر عدد حقیقی غیر صفر x عضوی از اعداد حقیقی مانند y وجود دارد، بطوری که

$$xy = yx = ۱$$

عدد y را معکوس یا وارون x می نامند و آن را با $x^{-۱}$ یا $\frac{۱}{x}$ نمایش می دهند.

ض۶) حاصل ضرب هر عدد حقیقی در صفر، برابر صفر است.

$$x \times ۰ = ۰ \times x = ۰$$

ض۷) می توان دو طرف یک تساوی را در یک عدد حقیقی غیر صفر ضرب نمود و تساوی جدیدی بدست آورد.

$$x = y \xrightarrow{a \neq ۰ \in R} ax = ay$$

تمرین : ثابت کنید، عضو همانی ضرب اعداد حقیقی منحصر به فرد است.(۱ منحصر به فرد است.)

حل : فرض می کنیم که a و b هر دو نقش۱یعنی عضو همانی ضرب در R را داشته باشند. در این صورت می توان نوشت:

$a = a \times b$ (b همانی است.)

$= b \times a$ (خاصیت جابجایی)

$= b$ (a همانی است.)

تمرین : ثابت کنید که وارون هر عدد حقیقی غیر صفر منحصر به فرد است.

حل : فرض کنیم که $y_۱$ و $y_۲$ هر دو وارون x باشند، پس :

$$y_۱ = y_۱ \times ۱ = y_۱(xy_۲) = (y_۱x)y_۲ = (xy_۱)y_۲ = ۱y_۲ = y_۲$$

تمرین : ثابت کنید که وارون وراون هر عدد حقیقی غیر صفر x برابر x است. یعنی $(x^{-۱})^{-۱} = x$

حل :

$$(x^{-۱})^{-۱} = (x^{-۱})^{-۱} \times ۱ = (x^{-۱})^{-۱} \times (x^{-۱})x = ((x^{-۱})^{-۱} \times (x^{-۱}))x = ۱ \times x = x$$

تعریف : تقسیم عدد حقیقی x بر عدد حقیقی غیر صفر y یعنی $\frac{x}{y}$ را با حاصل ضرب x در معکوس y تعریف می کنند.

$$\frac{x}{y} = x \times (\frac{۱}{y})$$

اصل توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع

برای هر سه عدد حقیقی x و y و z داریم.

$$x(y+z)=xy+xz$$

این اصل را اصل توزیع پذیری(پخشی) ضرب نسبت به جمع می نامند.

تمرین : ثابت کنید در صورتی که $a\in R$ و $a\neq ۰$ اگر $ax=ay$ آنگاه $x=y$

حل :

$$x=۱\times x=\frac{a}{a}\times x=\frac{ax}{a}=\frac{ay}{a}=\frac{a}{a}\times y=۱\times y=y$$

توجه : واضح است که به ازاء هر عدد حقیقی x می توان نوشت $-x=(-۱)x$ پس :

$$x(-y)=x(-۱)y=(-۱)xy=-xy$$

تمرین : ثابت کنید که برای سه عدد حقیقی x و y و z داریم.

$$x(y-z)=xy-xz$$

حل:

$$x(y-z)=x(y+(-z))=xy+x(-z)=xy+(-xz)=xy-xz$$

تمرین : برای هر دو عدد حقیقی x و y ثابت کنید که :

الف) $x(-y)=(-x)y=-(xy)$ ب) $(-x)(-y)=xy$

حل الف: روش اول

$$x(-y)=x(۰-y)=x(۰)-x(y)=۰-xy=-xy$$

$$(-x)y=(۰-x)y=(۰)y-xy=۰-xy=-xy$$

لذا $x(-y)=(-x)y=-(xy)$

حل الف : روش دوم

ثابت می کنیم که $x(-y)+(xy)=۰$

$$x(-y)+(xy)=x(-y+y)=x\times ۰=۰$$

حل ب :

$$(-x)(-y)=(-x)(۰-y)=(-x)(۰)-(-x)(y)=۰-(-xy)=xy$$

تمرین : ثابت کنید که هرگاه $xy=۰$ آنگاه $x=۰$ یا $y=۰$ و برعکس

حل : این گزاره دو شرطی است. لذا در دو قسمت ثابت می شود.

قسمت اول : اگر $xy=۰$ آنگاه $x=۰$ یا $y=۰$

اثبات : اگر $x=۰$ مسئله ثابت است. اگر $x\neq۰$ ثابت می کنیم که $y=۰$

$$xy=۰\xrightarrow{\times\frac{۱}{x}}(xy)(\frac{۱}{x})=(۰)(\frac{۱}{x})\rightarrow(yx)(\frac{۱}{x})=۰\rightarrow y(x\times\frac{۱}{x})=۰\rightarrow y\times(۱)=۰\rightarrow y=۰$$

قسمت دوم : اگر $x=۰$ یا $y=۰$ آنگاه $xy=۰$

برای اثبات کافی است حالت های زیر را در نظر بگیریم.

$x=۰$ و $y\neq۰ \rightarrow xy=(۰)y=۰$

$x\neq۰$ و $y=۰ \rightarrow xy=x(۰)=۰$

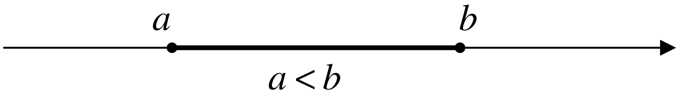
$x=۰$ و $y=۰ \rightarrow xy=(۰)(۰)=۰$

پس در هر حالت اگر $x=۰$ یا $y=۰$ نتیجه گرفته می شود، $xy=۰$

***

ترتیب و نامساوی در اعداد حقیقی

یکی از خواص مهم اعداد حقیقی مرتب بودن آنها است. هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند، آنگاه a کوچکتر از b است،اگر $b-a$ مثبت باشد. این ترتیب را با نماد $a<b$ (یا $b>a$) نشان می دهیم. علامت $a \le b$ یعنی a کوچکتر یا مساوی b است.



عبارت b بزرگتر از a است، هم ارز a کوچکتر از b است.

خواص زیر اغلب در نامساوی ها بکار می روند.

۱) هرگاه $a<b$ و $b<c$ آنگاه $a<c$

۲) هرگاه $a<b$ و $c<d$ آنگاه $a+c<b+d$

۳) هرگاه $a<b$ و c عدد حقیقی باشد،آنگاه $a+c<b+c$

۴) هرگاه $a<b$ و $c>0$ ، آنگاه $ac<bc$

۵) هرگاه $a<b$ و $c<0$ ، آنگاه $ac>bc$

۶) اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند. در این صورت $a<b$ نتیجه می دهد $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ و برعکس

۷) اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند. در این صورت $a<b$ نتیجه می دهد $a^2<b^2$ و برعکس

تذکر : اگر سه عدد حقیقی a و b و c چنان باشند که $a<b$ و $b<c$ در این صورت می گوییم، b بین a و c است و می نویسند: $a<b<c$

اصل تثلیث : برای هر دو عدد حقیقی a و b یکی از حالت های زیر وجود دارد.

$$a<b \text{ یا } a=b \text{ یا } a>b$$

یادداشت : اگر نماد های $<$ یا $\ge$ را در خواص بالا جایگزین نماد های $>$یا $\le$ کنیم، خواص متشابهی بدست می آید.

تمرین : مجموعه ی جواب نامعادله های زیر را به صورت بازه و یا اجتماعی از بازه ها بنویسید.

۱) $۳x+۵\leq ۸$

۲) $۵x-۳>۷-۳x$

۳) $۳<\frac{x-۱}{۲}\leq ۵$

۴) $x^{۲}-۳x\leq ۲۸$

۵) $x^{۲}<۹$

۶) $۵-x^{۲}\geq ۰$

۷) $\frac{۱}{۲-x}<۳$

تمرین : نامعادله ی $\frac{۵}{x-۱}<-\frac{۲}{x}$ را حل کرده و مجموعه ی جواب آن را روی محور اعداد حقیقی نشان دهید.

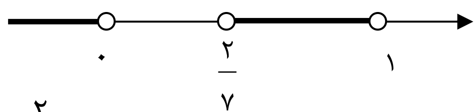
حل :

$$\frac{۵}{x-۱}<-\frac{۲}{x}\rightarrow \frac{۵}{x-۱}+\frac{۲}{x}<۰\rightarrow \frac{۵x+۲(x-۱)}{x(x-۱)}<۰\rightarrow \frac{۷x-۲}{x(x-۱)}<۰$$

$$\begin{cases} ۷x-۲=۰\rightarrow x=\frac{۲}{۷} \\ x=۰ \\ x-۱=۰\rightarrow x=۱ \end{cases}$$

x	$-\infty$ ۰	$\frac{۲}{۷}$	۱	$+\infty$
$۷x-۲$	−	− ۰	+	+
x	− ۰	+	+	+
$x-۱$	−	−	− ۰	+
$\frac{۷x-۲}{x(x-۱)}<۰$	− ن	+ ۰	− ن	+

مجموعه ی جواب $=(-\infty,۰)\cup(\frac{۲}{۷},+\infty)$



تمرین برای حل : مجموعه ی جواب نامعادله ی $\frac{۵}{x-۱}\geq -\frac{۲}{x}$ را روی محور اعداد حقیقی نشان دهید.

تمرین : ثابت کنید که برای هر عدد مثبت h ، اگر $0 \le x < h$ آنگاه $x = 0$

حل: اثبات به روش برهان خلف

گیریم که $x \ne 0$ باشد. پس $x > 0$. قرار می دهیم $x = 2h$. لذا خواهیم داشت:

$$0 \le x < h \rightarrow 2h < h \rightarrow 2 < 1$$

و این تناقض است. لذا فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

تمرین : اگر به ازای هر عدد حقیقی $h > 0$ داشته باشیم $0 \le x - 1 < h$ ثابت کنید که $x = 1$

حل: اثبات به روش برهان خلف

گیریم که $x \ne 1$ یعنی $x - 1 \ne 0$ باشد. پس $x - 1 > 0$. قرار می دهیم $x - 1 = 2h$. لذا خواهیم داشت:

$$0 \le x - 1 < h \rightarrow 2h < h \rightarrow 2 < 1$$

و این تناقض است. لذا فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

***

قدر مطلق یک عدد حقیقی

هرگاه x یک عدد حقیقی باشد، قدر مطلق x را با نماد $|x|$ نمایش می دهند و به صورت زیر تعریف[1] می کنند.

$$|x| = \begin{cases} x & x \ge 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

برای مثال : $|\sqrt{3} - 2| = -(\sqrt{3} - 2) = 2 - \sqrt{3}$ و $|\sqrt{3} - 1| = \sqrt{3} - 1$

نتیجه ی ۱ : برای هر عدد حقیقی x همواره داریم :

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

برای مثال : $|-5| = \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$

نتیجه ی ۲ : برای هر عدد حقیقی x همواره داریم :

$$-|x| \le x \le |x|$$

برای مثال : $-|-4| \le -4 \le |-4|$ و $-|5| \le 5 \le |5|$

[1] . برخی قدر مطلق عدد حقیقی x را به صورت مقابل تعریف می کنند. $|x| = \max\{x, -x\}$

قضیه (اعمال با قدر مطلق) : هرگاه a و b اعداد حقیقی بوده و n عدد صحیح مثبتی باشد، آنگاه داریم:

۱) $|a.b|=|a||b|$

۲) $|\frac{a}{b}|=\frac{|a|}{|b|}$

۳) $|a^n|=|a|^n$

اثبات :

۱) $|a.b|=\sqrt{(ab)^{۲}}=\sqrt{a^{۲}.b^{۲}}=\sqrt{a^{۲}}\sqrt{b^{۲}}=|a||b|$

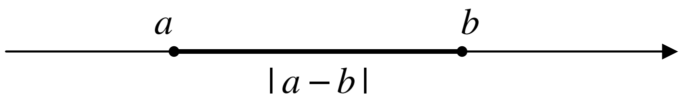
۲) $|\frac{a}{b}|=\sqrt{(\frac{a}{b})^{۲}}=\sqrt{\frac{a^{۲}}{b^{۲}}}=\frac{\sqrt{a^{۲}}}{\sqrt{b^{۲}}}=\frac{|a|}{|b|}$

۳) $|a^n|=\sqrt{(a^n)^{۲}}=\sqrt{(a^{۲})^n}=(\sqrt{a^{۲}})^n=|a|^n$

نتیجه ی۱ : برای هر دو حقیقی a و b می توان نوشت :

$|a-b|=|(-۱)(b-a)|=|-۱||b-a|=۱|b-a|=|b-a|$

لذا $|a-b|$ و $|b-a|$ که هر دو نشان دهنده ی اندازه ی پاره خط محصور بین دو نقطه ی a و b روی محور می باشد، با هم برابرند.



همچنین واضح است که $|x-۰|=|۰-x|$ پس $|x|=|-x|$

نتیجه ی ۲ : برای هر عدد حقیقی a واضح است که $a^{۲}\geq ۰$ پس :

$$|a^{۲}|=|a|^{۲}=a^{۲}$$

قضیه(نامساوی ها و قدرمطلق): خواص زیر همواره برای هر دو عدد حقیقی a و b و عدد مثبت k برقرار می باشند.

۱) $|a|\leq k$ اگر و فقط اگر $-k\leq a\leq k$

۲) $|a|\geq k$ اگر و فقط اگر $a\geq k$ یا $a\leq -k$

۳) $|a+b|\leq|a|+|b|$ (نامساوی مثلثی اعداد حقیقی)

توجه : با جایگزین کردن نماد $<$ بجای $\le$ خواص ۱ و ۲ به شکل زیر در می آیند.

$|a|<k$ اگر و فقط اگر $-k<a<k$

$|a|>k$ اگر و فقط اگر $a>k$ یا $a<-k$

اثبات : خواص ۱ و ۲ به کمک تعیین علامت به راحتی اثبات می شوند.

خاصیت ۱:

حالت اول　　　حکم : $-k \le a \le k$　　　فرض : $|a| \le k$

$$|a| \le k \rightarrow |a|^2 \le k^2 \rightarrow a^2 \le k^2 \rightarrow a^2 - k^2 \le 0 \rightarrow (a-k)(a+k) \le 0$$

$$a-k=0 \rightarrow a=k$$

$$a+k=0 \rightarrow a=-k$$

a	$-\infty$	$-k$		k	$+\infty$
$(a-k)(a+k) \le 0$	+	۰	-	۰	+

$$\Rightarrow -k \le a \le k$$

حالت دوم :　　　حکم : $|a| \le k$　　　فرض : $-k \le a \le k$

$$-k \le a \le k \rightarrow \begin{cases} -k \le a \rightarrow -a \le k \rightarrow |-a| \le |k| \rightarrow |a| \le |k| \rightarrow |a| \le k \\ a \le k \rightarrow |a| \le |k| \rightarrow |a| \le k \end{cases} \rightarrow |a| \le k$$

خاصیت ۲ :

حالت اول　　　حکم : $a \ge k$ یا $a \le -k$　　　فرض : $|a| \ge k$

$$|a| \ge k \rightarrow |a|^2 \ge k^2 \rightarrow a^2 \ge k^2 \rightarrow a^2 - k^2 \ge 0 \rightarrow (a-k)(a+k) \ge 0$$

$$a-k=0 \rightarrow a=k$$

$$a+k=0 \rightarrow a=-k$$

a	$-\infty$	$-k$		k	$+\infty$
$(a-k)(a+k) \le 0$	+	۰	-	۰	+

$$\Rightarrow a \ge k \quad \vee \quad a \le -k$$

حالت دوم :　　　حکم : $|a| \ge k$　　　فرض : $a \ge k$ یا $a \le -k$

$$\begin{cases} a \ge k \rightarrow |a| \ge |k| \rightarrow |a| \ge k \\ a \le -k \rightarrow -a \ge k \rightarrow |-a| \ge |k| \rightarrow |a| \ge k \end{cases} \rightarrow |a| \ge k$$

خاصیت ۳ :

$$
\begin{array}{rl}
 & -|a| \le a \le |a| \\
 & -|b| \le b \le |b| \\
+) & \overline{-|a| + (-|b|) \le a + b \le |a| + |b|}
\end{array}
$$

$$\rightarrow -(|a|+|b|) \le a+b \le (|a|+|b|)$$
$$\rightarrow |a+b| \le |a|+|b|$$

توجه : نامساوی مثلثی را می توان برای تعداد متناهی از اعداد حقیقی تعمیم داد.[۲]

$$|a_۱ + a_۲ + a_۳ + \ldots + a_n| \le |a_۱| + |a_۲| + |a_۳| + \ldots + |a_n|$$

تمرین : نشان دهید برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم :

$$|a|-|b| \le |a-b| \le |a|+|b|$$

حل :

$$|a| = |a-b+b| = |(a-b)+b| \le |a-b|+|b|$$

$$\rightarrow |a| \le |a-b|+|b| \rightarrow |a|-|b| \le |a-b| \quad (۱)$$

$$|a-b| = |a+(-b)| \le |a|+|-b| = |a|+|b|$$

$$\rightarrow |a-b| \le |a|+|b| \quad (۲)$$

لذا از نامساوی های (۱) و (۲) می توان نتیجه گرفت :

$$|a|-|b| \le |a-b| \le |a|+|b|$$

تمرین: اگر c و b و a سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید که $|a-b| \le |a-c|+|b-c|$

حل:

$$|a-b| = |a-c-b+c| = |(a-c)+(-b+c)|$$

$$\le |a-c|+|-b+c| = |a-c|+|c-b| = |a-c|+|b-c|$$

لذا :

$$|a-b| \le |a-c|+|b-c|$$

2 . قابل اثبات به کمک اصل استقرای ریاضی

تمرین : فرض کنیم که $a<x<b$ ثابت کنید که $|x|<\max\{|a|,|b|\}$. آیا عکس این حکم درست است؟

حل : قرار می دهیم $\max\{|a|,|b|\}=k$

حال چون $a<x<b$ پس $-k<a<x<b<k$ یعنی $-k<x<k$ یا $|x|<k$

در نتیجه $|x|<\max\{|a|,|b|\}$

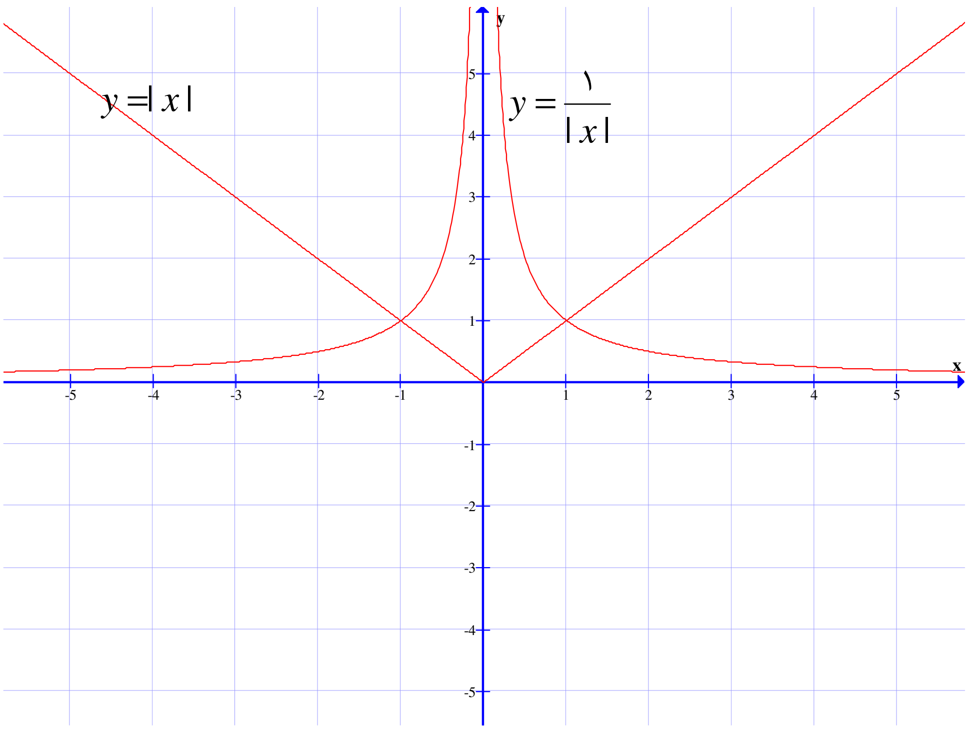
عکس این حکم درست نمی باشد. زیرا اگر قرار دهیم: $a=-۵$ و $b=-۲$ و $x=۲$ پس $|۲|<\max\{|-۵|,|-۲|\}$

یعنی $۲<\max\{۵,۲\}$. از این نامساوی نمی توان نتیجه گرفت $-۵<۲<-۲$

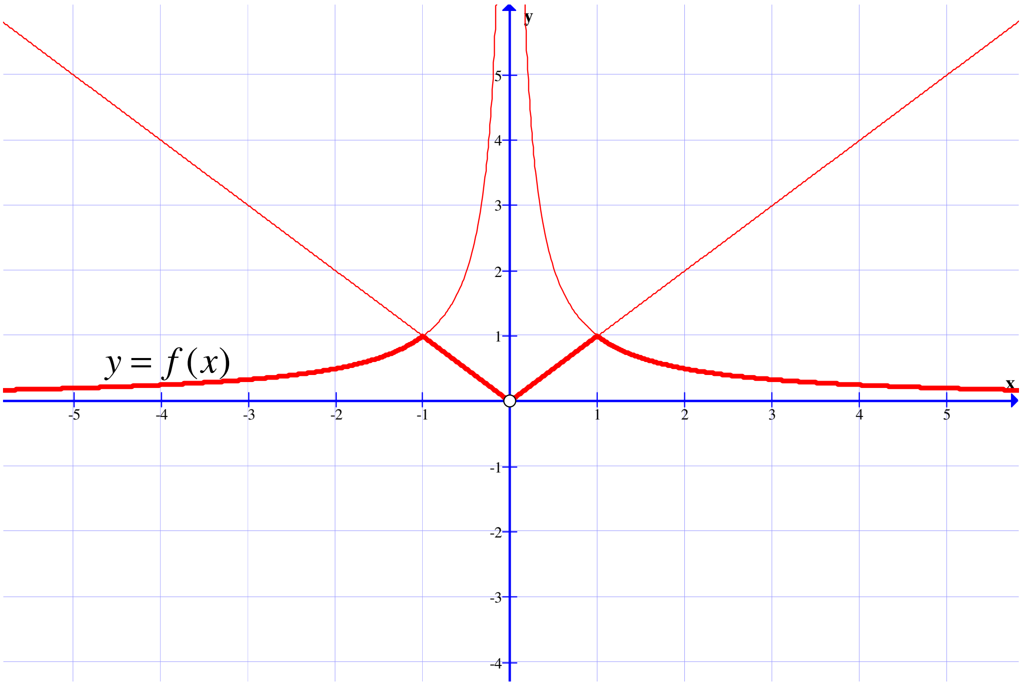
تمرین : نمودار تابع $f(x)=\min\{|x|,\frac{۱}{|x|}\}$ را رسم نموده و سپس برد تابع را تعیین کنید.

حل : ابتدا نمودار های $y=|x|$ و $y=\frac{۱}{|x|}$ را رسم می کنیم و به کمک آنها نمودار f مشخص می شود. واضح است

که $D_f=R-\{۰\}$ و همواره $۰<f(x)\le ۱$ لذا $R_f=(۰,۱]$



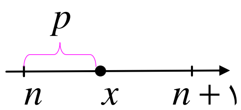
حال اگر نمودار پایین را در هر قسمت درنظر گرفته شود، نمودار تابع f به شکل زیر است.



❋❋❋

جزء صحیح عدد حقیقی

اگر x یک عدد حقیقی باشد، آنگاه x را می توان به شکل $x=n+p$ نوشت که در آن n یک عدد صحیح و $۰\leq p<۱$ می باشد.



عدد n را جزءصحیح x می نامند و می نویسند، $[x]=n$

عدد p را جزءکسری x می نامند و می نویسند، $(x)=p$

نتیجه :

۱ : جزء صحیح x بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی x است.

۲ : $(x)=x-[x]$

۳ : $[(x)]=۰$

مثال ۱ : اگر $x=۲/۳$ پس $[۲/۳]=۲$ و $(۲/۳)=۰/۳$

مثال۲ : اگر $x=-۲/۳$ پس $[-۲/۳]=-۳$ و $(-۲/۳)=۰/۷$

مثال۳ : اگر $x=-۵$ پس $[-۵]=-۵$ و $(-۵)=۰$

ویژگی های جزء صحیح

برا ی هر عدد حقیقی x داریم.

۱) $[x] \le x < [x] + ۱$

۲) $x - ۱ < [x] \le x$

۳) اگر $k \in Z$ باشد. $[x + k] = [x] + k$

نتیجه : اگر $[x] = k$ در این صورت $k \le x < k + ۱$ $(k \in Z)$

تمرین: معادله ی $[x + ۱] + [x + ۲] = ۵$ را حل کنید.

حل:

$$[x + ۱] + [x + ۲] = ۵ \rightarrow [x] + ۱ + [x] + ۲ = ۵ \rightarrow ۲[x] = ۲ \rightarrow [x] = ۱ \rightarrow ۱ \le x < ۲$$

تمرین: معادله های زیر را را حل کنید.

الف) $۲^{[x]+[x-۲]} = ۱۶$ ب) $[x + ۱] + [x - ۲] = ۴$

حل الف :

$$۲^{[x]+[x-۲]} = ۲^۴ \rightarrow [x] + [x - ۲] = ۴$$
$$\rightarrow [x] + [x] - ۲ = ۴ \rightarrow ۲[x] = ۶ \rightarrow [x] = ۳ \rightarrow ۳ \le x < ۴$$

حل ب:

$$[x + ۱] + [x - ۲] = ۴ \rightarrow [x] + ۱ + [x] - ۲ = ۴ \rightarrow ۲[x] = ۵ \rightarrow [x] = \frac{۵}{۲}$$

غیر ممکن است، لذا معادله ریشه ندارد.

نکته ۱: برای هر عدد حقیقی x داریم:

$$IF \;\; x \in Z \rightarrow [x] + [-x] = ۰$$
$$IF \;\; x \notin Z \rightarrow [x] + [-x] = -۱$$

تمرین برای حل:

۱ : معادله های زیر را حل کنید.

الف) $[x-[x]]+[x+۲]=۵$ ب) $x-[x]=[-x]+x^{۲}$

۲ : اگر $[x]=۷$ باشد، مقادیر $[۲x+۱]$ را بیابید.

نکته ۲: اگر $n\in N$ آنگاه تساوی زیر همواره برقرار است.

$$[nx]=[x]+[x+\frac{۱}{n}]+[x+\frac{۲}{n}]+...+[x+\frac{n-۱}{n}]$$

مثلاً: $$[۳x]=[x]+[x+\frac{۱}{۳}]+[x+\frac{۲}{۳}]$$

تمرین: معادله ی زیر را حل کنید.

$$[۲x]=[x]+۳$$

حل:

$$[۲x]=[x]+۳$$

$$[x]+[x+\frac{۱}{۲}]=[x]+۳$$

$$[x+\frac{۱}{۲}]=۳\rightarrow ۳\le x+\frac{۱}{۲}<۴\xrightarrow{-\frac{۱}{۲}}\frac{۵}{۲}\le x<\frac{۷}{۲}$$

تمرین: معادله ی $[\frac{x}{۳}]=\frac{x}{۲}$ را حل کنید.

حل: $\frac{x}{۲}$باید عدد صحیح باشد.یعنی $\frac{x}{۲}=k\in Z\rightarrow x=۲k$

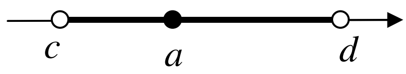
$$[\frac{x}{۳}]=\frac{x}{۲}\rightarrow[\frac{۲k}{۳}]=\frac{۲k}{۲}\rightarrow[\frac{۲k}{۳}]=k\rightarrow k\le\frac{۲k}{۳}<k+۱\rightarrow ۳k\le ۲k<۳k+۳$$

$$\begin{cases}۳k\le ۲k\rightarrow k\le ۰\\ ۲k<۳k+۳\rightarrow -k<۳\rightarrow k>-۳\end{cases}\rightarrow -۳<k\le ۰\rightarrow\begin{cases}k=۰\rightarrow x=۲k=۰\\ k=-۱\rightarrow x=۲k=-۲\\ k=-۲\rightarrow x=۲k=-۴\end{cases}$$

***

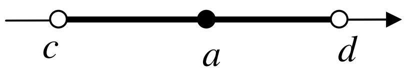
همسایگی یک عدد حقیقی

اگر a عددی حقیقی باشد، هر بازه ی باز شامل a را یک همسایگی a می نامند. به عبارت دیگر اگر $a\in(c,d)$ آنگاه (c,d) یک همسایگی a است.

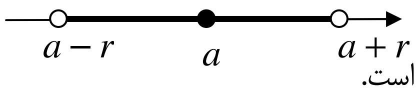


مثلاً (۱,۵) یک همسایگی برای ۲ است.

اگر aوسط بازه ی (c,d) باشد،آنگاه (c,d) را همسایگی متقارن a می نامند.



بنابر این اگر $r>۰$ آنگاه بازه ی $(a-r,a+r)$ را یک همسایگی متقارن a می نامند.



مثلاً (۱,۵) یک همسایگی متقارن برای ۳ است.

تذکر: بازه ی $(-\frac{۱}{n},\frac{۱}{n})$ برای هر n طبیعی، یک همسایگی متقارن برای صفر است.

در همسایگی متقارن $(a-r,a+r)$، عدد a را مرکز و r را شعاع همسایگی می گویند. این همسایگی را به $N(a,r)$ نشان می دهند. اگر x عددی حقیقی متعلق به یک همسایگی متقارن a باشد، در این صورت روابط زیر معادلند.

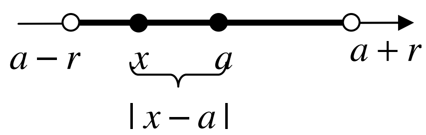
$$x\in N(a,r)\leftrightarrow |x-a|<r$$

زیرا

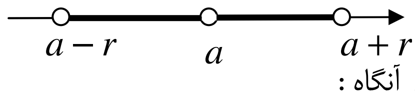
$$\begin{aligned}
&x\in N(a,r)\\
&\leftrightarrow a-r<x<a+r\\
&\leftrightarrow -r<x-a<r\\
&\leftrightarrow |x-a|<r
\end{aligned}$$

یعنی شرط لازم و کافی برای آنکه x عضو همسایگی متقارن به مرکز a و شعاع r آن است که فاصله ی x از a کمتر از r باشد و لذا می نویسند.

$$N(a,r)=(a-r,a+r)=\{x:|x-a|<r\}$$



هرگاه a متعلق به یک همسایگی خود نباشد، *همسایگی را محذوف* یا *بدون مرکز* یا *سفته* می نامند. بنابراین یک $N'(a,r)=N(a,r)-\{a\}$ یک همسایگی محذوف متقارن a است. همچنین مانند همسایگی $N(a,r)$ عدد a مرکز و r شعاع همسایگی می باشد.



مانند آنچه که قبلاً گفته شد، اگر $r>۰$ آنگاه :

$$
\begin{aligned}
&x\in N'(a,r)\\
&\leftrightarrow a-r<x<a+r\ ,\ x\neq a\\
&\leftrightarrow -r<x-a<r\ ,\ x\neq a\\
&\leftrightarrow ۰<|x-a|<r
\end{aligned}
$$

تذکر۱ : اگر (c,d) یک همسایگی متقارن به مرکز a و به شعاع r باشد. در این صورت :

$a=\dfrac{c+d}{۲}$ مرکز همسایگی

$r=\dfrac{|c-d|}{۲}$ شعاع همسایگی

تمرین : بازه ی $(-۵,۳)$ همسایگی متقارن چه عددی است؟ شعاع این همسایگی را تعیین کنید.

تذکر۲ : اشتراک هر دو همسایگی متقارن a ، یک همسایگی برای a است.

تمرین : اگر $\{x\,|\,۲<۳x<۴\}$ یک همسایگی متقارن باشد.شعاع و مرکز همسایگی را بیابید.

حل:

روش اول

$$۲<۳x<۴\xrightarrow{\div ۳}\frac{۲}{۳}<x<\frac{۴}{۳}$$

$a=\dfrac{\frac{۲}{۳}+\frac{۴}{۳}}{۲}=۱$ مرکز همسایگی

$r=\dfrac{\frac{۴}{۳}-\frac{۲}{۳}}{۲}=\dfrac{۱}{۳}$ شعاع همسایگی

روش دوم

$$۲ < ۳x < ۴ \xrightarrow{\div ۳} \frac{۲}{۳} < x < \frac{۴}{۳}$$

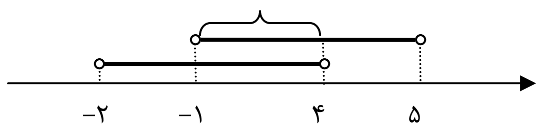
$$\xrightarrow{a=\frac{\frac{۲}{۳}+\frac{۴}{۳}}{۲}=۱} \frac{۲}{۳} - ۱ < x - ۱ < \frac{۴}{۳} - ۱ \rightarrow -\frac{۱}{۳} < x - ۱ < \frac{۱}{۳} \rightarrow | x - ۱ | < \frac{۱}{۳}$$

مرکز همسایگی $a = ۱$

شعاع همسایگی $r = \frac{۱}{۳}$

تمرین : اشتراک دو بازه ی $(-۲,۴)$ و $(-۱,۵)$ را به صورت یک همسایگی متقارن بنویسید؟مرکز و شعاع همسایگی را تعیین کنید.

حل:



$$(-۱,۵) \bigcap (-۲,۴) = (-۱,۴)$$

مرکز همسایگی $a = \frac{-۱+۴}{۲} = \frac{۳}{۲}$

شعاع همسایگی $r = \frac{۴-(-۱)}{۲} = \frac{۵}{۲}$

$$N(\frac{۳}{۲}, \frac{۵}{۲}) = \{x \in R \,|\, | x - \frac{۳}{۲} | < \frac{۵}{۲}\}$$

تمرین : اگر مجموعه جواب نامعادله ی $| ۳x + ۱ | < ۰/۶$ را به صورت یک همسایگی متقارن نمایش دهیم، مرکز و شعاع همسایگی را تعیین کنید.

حل:

$$| ۳x + ۱ | < ۰/۶ \rightarrow -۰/۶ < ۳x + ۱ < ۰/۶ \rightarrow -\frac{۸}{۱۵} < x < -\frac{۲}{۱۵}$$

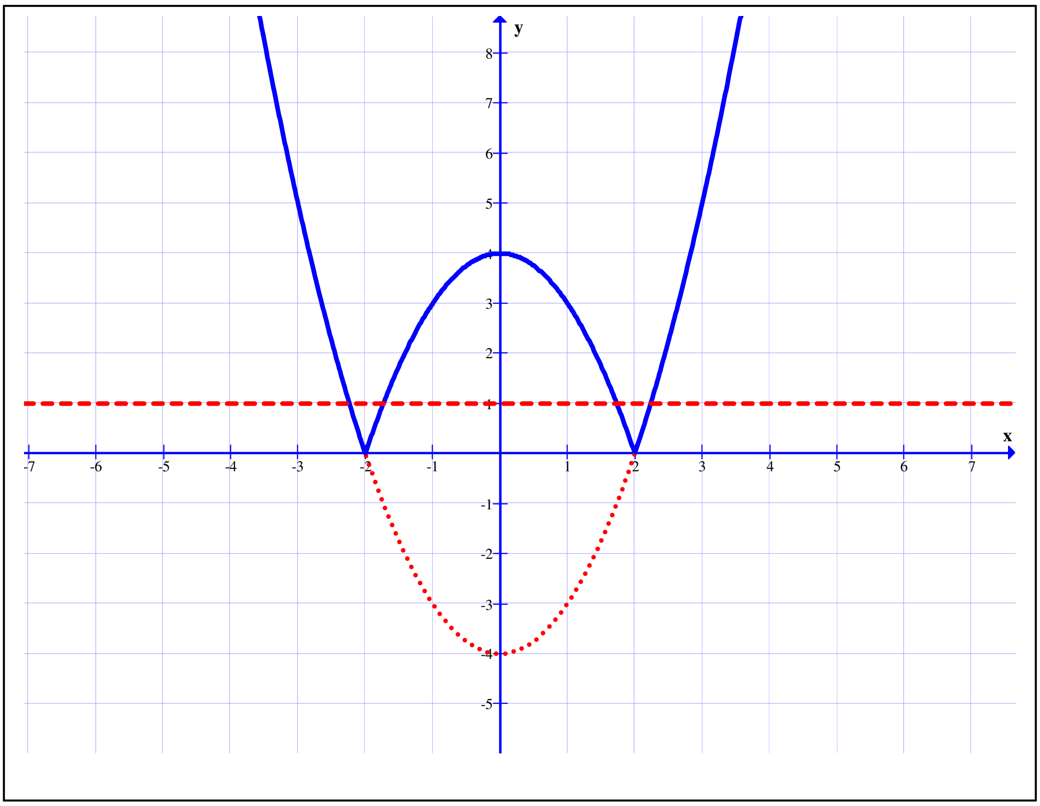
مرکز همسایگی $a = \frac{-\frac{۸}{۱۵} + (-\frac{۲}{۱۵})}{۲} = -\frac{۱}{۳}$

شعاع همسایگی $r=\dfrac{-\frac{۲}{۱۵}-(-\frac{۸}{۱۵})}{۲}=\dfrac{۱}{۵}$

$N(-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۵})=\{x\in R \mid |x+\frac{۱}{۳}|<\frac{۱}{۵}\}$

تمرین : جواب هایی از نابرابری $|x^۲-۴|<۱$ را به دست آورید که در بازه ی $(۲-\frac{۱}{۱۰},۲+\frac{۱}{۱۰})$ قرار داشته باشند.

حل : نمودار دو تابع $f(x)=x^۲-۴$ و $g(x)=۱$ را رسم می کنیم. بازه ی مورد نظر مسئله زیر مجموعه ای از بـازه ی $(۲-\frac{۱}{۱۰},۲+\frac{۱}{۱۰})$ که در آن نمودار f زیر نمودار g قرار می گیرد.



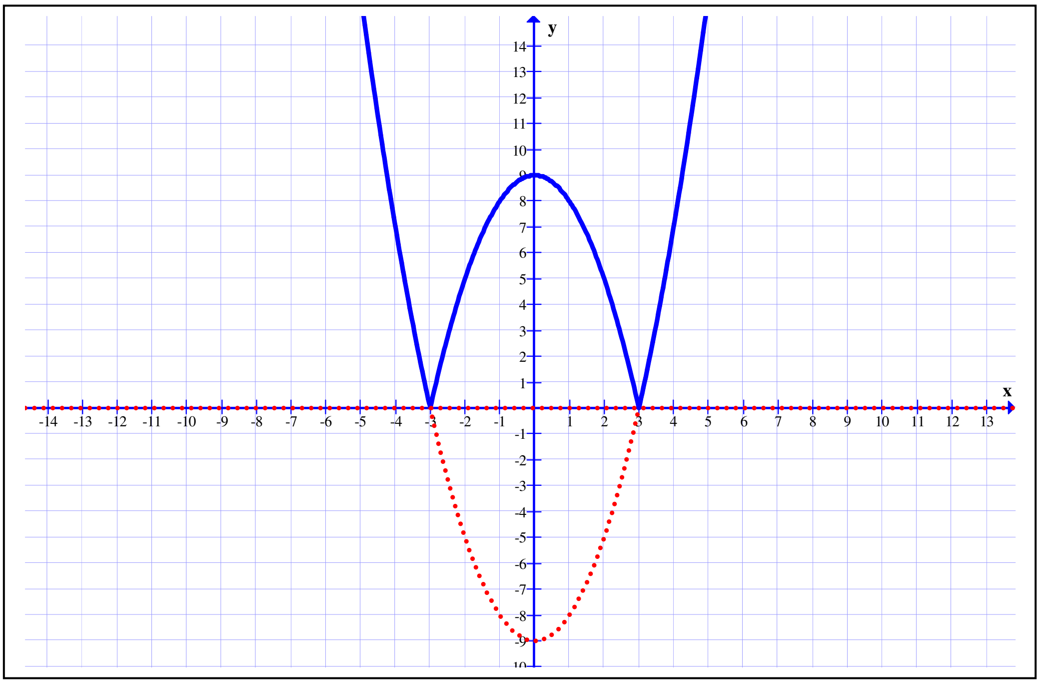
$$|x^۲-۴|<۱\rightarrow -۱<x^۲-۴<۱\xrightarrow{+۴}-۱+۴<x^۲<۱+۴$$
$$\rightarrow ۳<x^۲<۵\rightarrow\begin{cases}\sqrt{۳}<x<\sqrt{۵}\\ -\sqrt{۵}<x<-\sqrt{۳}\end{cases}$$

پس اگر قرار دهیم. $a=\sqrt{۳}$ و $b=\sqrt{۵}$

حال باید اشتراک این جواب ها را با بازه ی $(۲-\frac{۱}{۱۰},۲+\frac{۱}{۱۰})$ تعیین کنیم. چون $(۱/۹,۲/۱)\subset[a,b]$ پس بازه ی مورد نظر همان $[a,b]$ است.

تمرین : جواب هایی از نابرابری $|x^۲-۹|<\frac{۱}{۱۰۰۰}$ را به دست آورید که در بازه ی $(۲,۴)$ قرار داشته باشند.

حل : نمودار دو تابع $f(x)=x^۲-۹$ و $g(x)=\frac{۱}{۱۰۰۰}$ را رسم می کنیم. بازه ی مورد نظر مسئله زیر مجموعه ای از بازه ی $(۲,۴)$ که در آن نمودار f زیر نمودار g قرار می گیرد.



$$|x^۲-۹|<\frac{۱}{۱۰۰۰}\rightarrow-\frac{۱}{۱۰۰۰}<x^۲-۹<\frac{۱}{۱۰۰۰}\xrightarrow{+۹}۹-\frac{۱}{۱۰۰۰}<x^۲<۹+\frac{۱}{۱۰۰۰}$$

$$\rightarrow ۸/۹۹۹<x^۲<۹/۰۰۱\rightarrow\begin{cases}\sqrt{۸/۹۹۹}<x<\sqrt{۹/۰۰۱}\\-\sqrt{۹/۰۰۱}<x<-\sqrt{۸/۹۹۹}\end{cases}$$

پس اگر قرار دهیم. $a=\sqrt{۸/۹۹۹}$ و $b=\sqrt{۹/۰۰۱}$

حال باید اشتراک این جواب ها را با بازه ی $(۲,۴)$ تعیین کنیم. چون $(۲,۴)\subset[a,b]$ پس بازه ی مورد نظر همان $[a,b]$ است.

تمرین : جواب هایی از نابرابری $\frac{۱}{۱۰^۴} < \frac{۱}{x^۲}$ را به دست آورید که در بازه ی $(۳,+\infty)$ واقع شوند.

حل :

$$\frac{۱}{x^۲} < \frac{۱}{۱۰^۴} \to x^۲ > ۱۰^۴ \to x > ۱۰^۲ \text{ یا } x < ۱۰^۲$$

لذا جواب ها ی مورد نظر که با تعیین اشتراک مجموعه ی های بدست آمده با بازه ی داده شده بدست می آیند، به شکل $(۱۰۰,+\infty)$ است.

تمرین : جواب هایی از نامساوی $\sqrt{x^۲ - ۹} < \frac{۱}{۱۰۰}$ را به دست آورید که در بازه ی $(۳ - \frac{۱}{۱۰}, ۳ + \frac{۱}{۱۰})$ واقع شوند.

حل :

$$\sqrt{x^۲ - ۹} < \frac{۱}{۱۰۰} \to ۰ \le x^۲ - ۹ < \frac{۱}{۱۰^۴} \to ۹ \le x^۲ < ۹ + \frac{۱}{۱۰^۴} \to ۳ \le x < \sqrt{۹ + \frac{۱}{۱۰^۴}}$$

$$\to ۳ \le x < \sqrt{۹ + \frac{۱}{۱۰^۴}} \quad \text{یا} \quad \to -\sqrt{۹ + \frac{۱}{۱۰^۴}} < x \le -۳$$

اکنون کافی است که اشتراک جواب ها را با بازه ی $(۳ - \frac{۱}{۱۰}, ۳ + \frac{۱}{۱۰})$ مشخص کنیم. چون $\sqrt{۹ + \frac{۱}{۱۰^۴}} < ۳ + ۱۰^{-۲}$

پس جواب مورد نظر $۳ < x < \sqrt{۹/۰۰۰۱}$ است. واضح است که اشتراک جواب یگر با بازه ی $(۳ - \frac{۱}{۱۰}, ۳ + \frac{۱}{۱۰})$ تهی است. (توجه: اگر a و b دو عدد مثبت باشند، همواره داریم $\sqrt{a^۲ + b^۲} < a + b$)

تمرین برای حل:

۱ : مرکز همسایگی $(۳\alpha - ۷, \alpha + ۵)$ برابر ۳ است. شعاع همسایگی را تعیین کنید.

۲ : شعاع همسایگی $(\lambda + ۱, ۴\lambda - ۲)$ برابر λ است. مرکز همسایگی را تعیین کنید.

۳ : در هر مورد جواب هایی از نامساوی $|x^۲ - ۴| < ۱$ را به دست آورید که در بازه ی داده شده واقع شوند.

الف) $(-۳,۳)$ ب) $(۰,۳)$ ج) $(۲,۳)$ د) $(۳,۴)$

همسایگی های چپ و راست

اگر $r>۰$ هر بازه به شکل $(a-r,a]$ را یک همسایگی چپ a و هر بازه به شکل $[a,a+r)$ را یک همسایگی راست a می نامند.

$x\in(a-r,a]\to a-r<x\le a\to -r<x-a\le ۰$

$x\in[a,a+r)\to a\le x<a+r\to ۰\le x-a<r$

همچنین هر بازه به شکل $(a-r,a)$ را یک همسایگی محذوف چپ a و هر بازه به شکل $(a,a+r)$ را یک همسایگی محذوف راست a می نامند.

$x\in(a-r,a)\to a-r<x<a\to -r<x-a<۰$

$x\in(a,a+r)\to a<x<a+r\to ۰<x-a<r$

مثال: بازه ی $(-۱,۳]$ یک همسایگی چپ ۳ و بازه ی $[-۲,۳)$ یک همسایگی راست ۲- می باشد.

***

معرفی نماد

در این قسمت سه نماد رایج در ریاضیات را معرفی می کنیم.

سور عمومی : برای نمایش کلیت بکار می رود و به صورت « $\forall$ » نشان داده میشود و خوانده می شود.« برای هر».

مثلاً: $\forall x\in R: x^{۲}\ge ۰$

سور وجودی : برای نمایش وجود به کار می رود و به صورت « $\exists$ » نشان داده میشود و خوانده می شود.« وجود دارد».

مثلاً: $\exists x\in R: x^{۲}-۴=۰$

سور صفر: برای نمایش عدم وجود به کار می رود و به صورت« $\nexists$ » نشان داده میشود و خوانده می شود.« وجود ندارد».

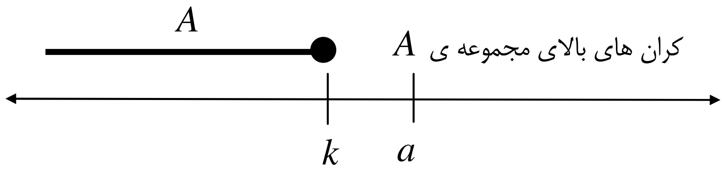
مثلاً: $\nexists x\in R: x^{۲}+۴=۰$

***

مجموعه های کراندار

مجموعه ی از بالا کراندار: مجموعه ی $A \subset R$ را از بالا کراندار گویند، هرگاه عددی مانند $a \in R$ موجود باشد که به ازای هر $x \in A$ در نامساوی $x \leq a$ صدق کند.

به عبارت دیگر $\exists a \in R, \forall x \in A \Rightarrow x \leq a$



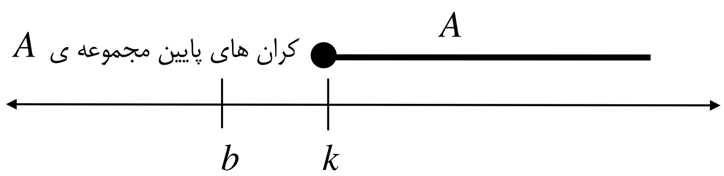
عدد a را یک کران بالا برای مجموعه ی A گویند. یک مجموعه ممکن است بیشمار کران بالا داشته باشد.

مثال : مجموعه ی $A = (-\infty, ۲]$ از بالا کراندار است. تمام اعداد حقیقی بزرگتر یا مساوی ۲ کران بالای مجموعـه ی A می باشند. کوچکترین کران بالای این مجموعه ۲ است.

***

مجموعه ی از پایین کراندار: مجموعه ی $A \subset R$ را از پایین کراندار گویند، هرگـاه عـددی مانـند $b \in R$ موجـود باشد که به ازای هر $x \in A$ در نامساوی $x \geq b$ صدق کند.

به عبارت دیگر $\exists b \in R, \forall x \in A \Rightarrow x \geq b$

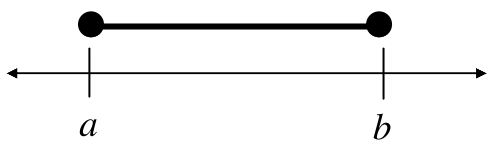


عدد b را یک کران پایین برای مجموعه ی A گویند. یک مجموعه ممکن است بیشمار کران پایین داشته باشد.

مثال : مجموعه ی $A = (۳, +\infty)$ از پایین کراندار است. تمام اعداد حقیقی کوچکتر یا مساوی ۳ کران پایین مجموعـه ی A می باشند. بزرگترین کران پایین این مجموعه ۳ است.

***

مجموعه ی کراندار: مجموعه ی $A \subset R$ را کراندار می گوییم، هرگاه هم از بالا و هم از پایین کرانـدار باشـد، در غیـر این صورت آن را مجموعه ی بی کران می نامند.



مثال: مجموعه ی $A=\{x \mid x\in R, |x-۱|<۳\}$ یک مجموعه ی کراندار است.

$$|x-۱|<۳ \to -۳<x-۱<۳ \xrightarrow{+۱} -۲<x<۴$$

در این صورت ۴ و هر عدد حقیقی بزرگتر از ۴ یک کران بالای مجموعه ی A و عدد ۲- و هر عـدد کـوچکتر از ۲- یـک کران پایین مجموعه ی A خواهند بود.

کوچکترین کران بالای یک مجموعه مانند A را سوپریمم و بزرگترین کران پایین مجموعه را اینفیمم می نامند.

در این مثال داریم.

$$\inf(A)=-۲ \text{ و } \sup(A)=۴$$

توجه:

۱ : مجموعه ی اعداد حقیقی بیکران و مجموعه ی تهی کراندار است.

۲ : زیر مجموعه ی هر مجموعه ی کراندار،کراندار است.

۳ : مجموعه ی اعداد حقیقی کامل است، یعنی هر زیر مجموعه ی غیر تهی از اعداد حقیقی که از بالاکرانـدار باشـد، دارای کوچکترین کران بالا است.[3] (اصل کمال یا اصل تمامیت)

تمرین: ثابت کنید که مجموعه ی اعداد طبیعی از بالا کراندار نیست.

حل (به کمک برهان خلف): فرض کنیم که مجموعه ی اعداد طبیعی از بالا کراندار باشد و عدد n کـران بـالای آن اسـت، پس طبق تعریف کران بالا داریم. $\forall x\in N \to x\le n$

و چون $n\in N$ پس $(n+۱)\in N$ حال قرار می دهیم. $x=n+۱$

$$(n+۱)\le n \to ۱\le ۰$$

و این تناقض است، لذا فرض خلف باطل و حکم ثابت است یعنی مجموعه ی اعداد طبیعی از بالا کراندار نیست.

***

تمرین : درستی یا نادرستی احکام زیر را بنویسید.

۱ : هر مجموعه ی از بالا کراندار، دارای کوچکترین کران بالا است. (.........)

[3] . این اصل معادل با اصل زیر است. یک زیر مجموعه غیر تهی از اعداد حقیقی که از پایین کراندار باشد، دارای بزرگترین کران پایین است.

۲ : هر مجموعه ی از پایین کراندار ، دارای بزرگترین کران پایین است. (.........)

۳ : اگر مجموعه ای کراندار و ناتهی باشد، هم کوچکترین کران بالا و هم بزرگترین کران پایین دارد. (.........)

۴ : هرگاه A یک مجموعه ی غیر تهی و $A \subseteq B$ و u یک کران بالای B باشد، u یک کران بالای A می باشد. (.........)

تمرین : ثابت کنید که مجموعه ی $A = \{\frac{x^2+1}{x^2+2} \mid x \in R\}$ کراندار است. سپس بزرگترین کران پایین و کوچکترین کران بالای آن را بدست آورید.

حل :

$$\frac{x^2+1}{x^2+2} = \frac{x^2+2-1}{x^2+2} = \frac{x^2+2}{x^2+2} + \frac{-1}{x^2+2} = 1 - \frac{1}{x^2+2}$$

از طرفی $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2+2} = \frac{1}{2}$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2+2} = 0$ پس : $0 < \frac{1}{x^2+2} < \frac{1}{2}$

در نتیجه :

$$0 < \frac{1}{x^2+2} < \frac{1}{2} \xrightarrow{\times(-1)} 0 > -\frac{1}{x^2+2} > -\frac{1}{2} \to -\frac{1}{2} < -\frac{1}{x^2+2} < 0$$

$$\xrightarrow{+1} \frac{1}{2} < 1 - \frac{1}{x^2+2} < 1 \to \frac{1}{2} < \frac{x^2+1}{x^2+2} < 1$$

یعنی مجموعه ی $A = \{\frac{x^2+1}{x^2+2} \mid x \in R\}$ کراندار است و بزرگترین کران پایین آن $\frac{1}{2}$ و کوچکترین کران بالای آن ۱ است.

تمرین برای حل :

۱ : نشان دهید که تابع $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ در دامنه اش کراندار است.

۲ : نشان دهید که تابع $f(x) = [x]$ روی مجموعه ی $A = \{x \in R \mid -1 < x < 1\}$ کراندار است.

۳ : نشان دهید که تابع $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ در دامنه اش کراندار است.

***

حساب دیفرانسیل و انتگرال

فصل اول : دنباله

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی دبیرستان های اهواز و باوی

دنباله

هر تابع مانند a که دامنه اش مجموعه ی اعداد طبیعی و برد آن زیر مجموعه ای از اعداد حقیقی باشد را یک دنباله ی نامتناهی (یا به اختصار دنباله) از اعداد حقیقی می نامند.

$$a: N \to R$$
$$a(n) = a_n$$

مثال: تابع زیر یک دنباله است.

$$a: N \to R$$
$$a(n) = \frac{n}{n+1}$$

و لذا داریم :

$$a(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$
$$a(2) = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$$
$$a(3) = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$$
....

معادله ی تابع یعنی $a(n)$ یا a_n را **جمله ی عمومی** دنباله می نامند. معمولاً دنباله را با جمله ی عمومی آن به صورت $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ یا $\{a_n\}_{n=1}$ یا بطور مختصر $\{a_n\}$ یا با مقادیرش یعنی $a_1, a_2, a_3, \ldots.$ نمایش می دهند. هر یک از مقادیر دنباله یک **جمله** نامیده می شود.

توجه : برخی دنباله های دارای تابع یا قانون نمی باشند و جملات چنین دنباله هایی را فقط یکی یکی و به دنبال هم نام می بریم و از نماد دنباله استفاده نمی کنیم.

مثال : دنباله ی $\{a_n\}$ به صورت زیر تعریف شده است.

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \text{ فرد} \\ n^2 & n \text{ زوج} \end{cases}$$

مجموعه ی مقادیر این دنباله عبارتند از:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = \frac{1}{1} = 1 \\ a_2 = 2^2 = 4 \\ a_3 = \frac{1}{3} \\ a_4 = 4^2 = 16 \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \Rightarrow 1, 4, \frac{1}{3}, 16, \dots$$

مثال: هر یک از توابع زیر یک دنباله مشخص می کند.

ردیف	دنباله	مقادیر دنباله	توضیح
۱	$\{\frac{1}{n}\}$	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$	دنباله ی معکوس های اعداد طبیعی
۲	$\{(-1)^n\}$	$-1, 1, -1, 1, -1, \dots$	دنباله، نوسانات منظم دارد.
۳	$\{\frac{(-1)^n}{n}\}$	$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$	دنباله ، نوسانات نامنظم دارد.
۴	$\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\}$	$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots$	دنباله نوسانات نامنظم دارد.
۵	$\{(-1)^n n^2\}$	$-1, 4, -9, 16, \dots$	دنباله نوسانات نامنظم دارد.
۶	$\{(0/1)^{n-1}\}$	$1, 0/1, 0/01, 0/001, \dots$	دنباله ی هندسی نزولی
۷	$\{\cos n\pi\}$	$-1, 1, -1, 1, -1, \dots$	دنباله، نوسانات منظم دارد.
۸	$\{\cos 2n\pi\}$	$1, 1, 1, 1, 1, \dots$	دنباله ی ثابت
۹	$\{1 + 2n\}$	$3, 5, 7, 9, \dots$	دنباله ی حسابی
۱۰	$\{2^n\}$	$2, 4, 8, 16, \dots$	دنباله ی هندسی
۱۱	$\{(\frac{1}{2})^n\}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$	دنباله ی هندسی نزولی

توجه : دنباله های حسابی و هندسی نیز نوع خاصی از دنباله ها هستند.

مثال الف : دنباله ی زیر یک دنباله ی حسابی می باشد. جمله ی عمومی آن به صورت $a_n = 3n - 1$ می باشد.

.... و ۱۱ و ۸ و ۵ و ۲

مثال ب : دنباله ی زیر یک دنباله ی هندسی می باشد. جمله ی عمومی آن به صورت $a_n = ۲(\sqrt{۳})^{n-۱}$ می باشد.

.... و $۶\sqrt{۳}$ و ۶ و $۲\sqrt{۳}$ و ۲

توجه : برای برخی از دنباله ها یک رابطه بین جملات تعریف می شود. این رابطه را در اصطلاح **رابطه ی بازگشتی** می نامند.

مثال الف : دنباله ی حسابی زیر که جمله ی عمومی آن $a_n = ۳n - ۱$ می باشد. دارای رابطه ی بازگشتی به شکل $a_۱ = ۲ \ , \ a_{n+۱} = a_n + ۳$ می باشد.

.... و ۱۱ و ۸ و ۵ و ۲

مثال ب : دنباله ی زیر که دنباله ی فیبوناتچی نامیده می شود. دارای رابطه ی بازگشتی به شکل $a_۱ = a_۲ = ۱ , \ a_n + a_{n+۱} = a_{n+۲}$ می باشد.

.... و ۸ و ۵ و ۳ و ۲ و ۱ و ۱

توجه : هر عدد گنگ نمایش اعشاری ندارد، ولی می توان متناظر با آن یک دنباله ی تقریبات اعشاری نوشت. برای مثال دنباله ی تقریبات اعشاری $\sqrt{۲}$ به صورت زیر است.

.... و ۱/۴۱۴۲ و ۱/۴۱۴ و ۱/۴۱ و ۱/۴

همچنین دنباله ی تقریبات اعشاری عدد π به شکل زیر است.

.... و ۳/۱۴۱۵ و ۳/۱۴۱ و ۳/۱۴ و ۳/۱

دنباله ی ثابت : هر دنباله که تمام جمله های آن مساوی باشند، را دنباله ی ثابت می نامند. مانند:

.... و ۳ و ۳ و ۳ و ۳ و ۳

هر دنباله ی ثابت دارای جمله عمومی به صورت $a_n = k$ می باشد. (k یک عدد حقیقی است.)

تمرین : نشان دهید که هیچ یک از جملات دنباله ی $\{\frac{۱}{n}\}$ برابر نیستند.

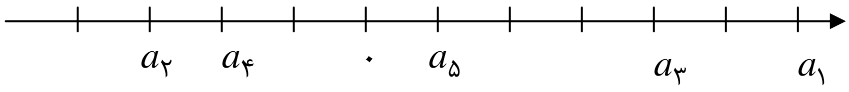
حل :
$$n + ۱ > n \rightarrow \frac{۱}{n+۱} < \frac{۱}{n} \rightarrow a_{n+۱} < a_n$$

***

نمایش هندسی دنباله ها

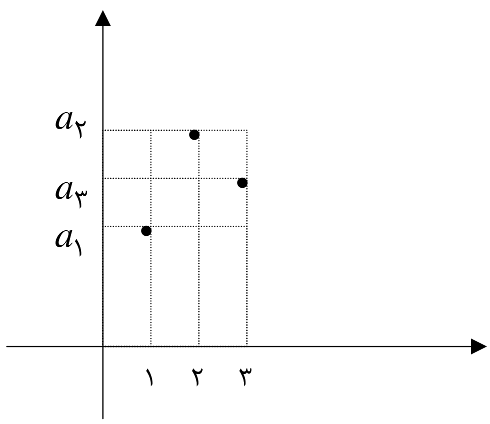
برای هر دنباله مانند $\{a_n\}$ دو نوع نمودار هندسی می توان رسم کرد.

نوع اول: روی یک محور نقاط متناظر با مقادیر دنباله یعنی $a_1, a_2, a_3, \ldots$ را با توجه به مبدأ محور مشخص می کنیم.



نوع دوم: روی یک دستگاه محور های مختصات نقاط ... و $(3, a_3)$

و $(2, a_2)$ و $(1, a_1)$ را مشخص می کنیم.

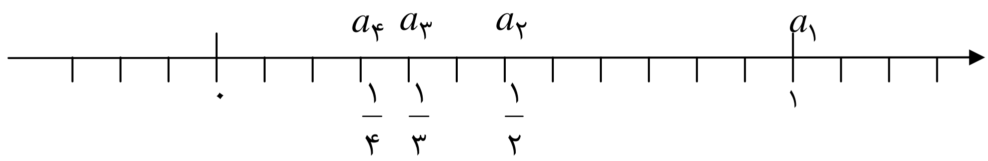


تمرین: نمودار دنباله ی $\{\frac{1}{n}\}$ را رسم کنید.

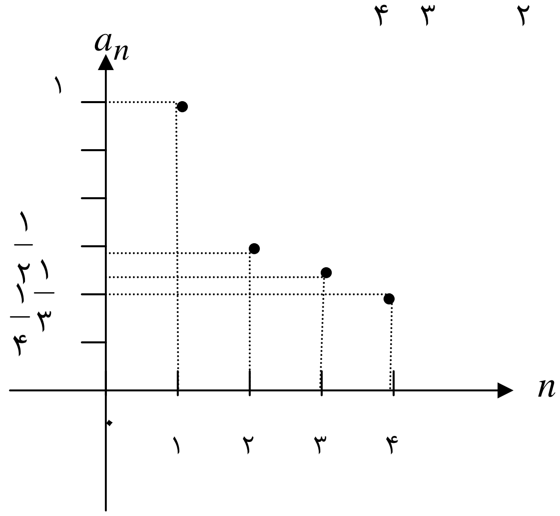
حل:

$$a_1 = 1 \text{ و } a_2 = \frac{1}{2} \text{ و } a_3 = \frac{1}{3} \text{ و } a_4 = \frac{1}{4} \text{ و } \ldots$$

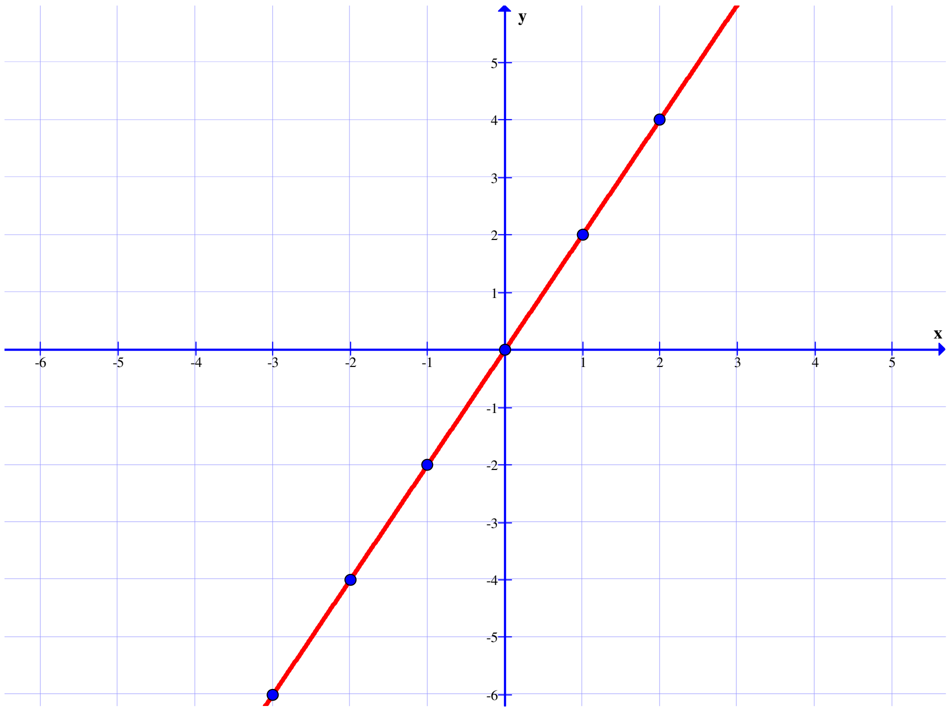
نمودار نوع اول



نمودار نوع دوم



یادداشت : می توان نقاط نمودار تابع در مجموعه ی اعداد حقیقی و نمودار دنباله ی متناظر آن را مقایسه نمود و با مشاهده ی رفتار تابع، می توان رفتار دنباله را نیز مشاهده نمود. برای مثال در شکل زیر نمودار خط به معادله ی $f(x)=۲x$ و نمودار دنباله ی $a_n=۲n$ را رسم نموده ایم. مشاهده می کنیم که نمودار دنباله به صورت نقاط مجزا و توپر روی این خط قرار دارند.

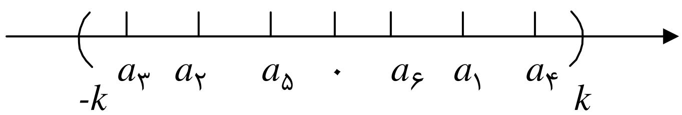


***

دنباله های کراندار

اگر برای دنباله ی $\{a_n\}$ عدد حقیقی $k>۰$ وجود داشته باشد که به ازای هر $n\in N$ نامساوی $|a_n|<k$ برقرار باشد. دنباله را کراندار و در غیر این صورت آن را بی کران می نامند.

از نظر هندسی دنباله ی کراندار دنباله ای است که برای یک عدد $k>۰$ مناسب،کلیه ی جملات آن در همسایگی صفر به شعاع k قرار گیرند.



تمرین: ثابت کنید که دنباله ی $\{\frac{۱}{n}\}$ کراندار است.

حل: $0 < \frac{1}{n} \leq 1 \rightarrow -1 \leq \frac{1}{n} \leq 1 \rightarrow |\frac{1}{n}| \leq 1$

تمرین: در مورد کرانداری دنباله ی $\{n^2\}$ بحث کنید؟

حل: چون مجموعه ی اعداد طبیعی از بالا کراندار نیست، پس دنباله ی $\{n^2\}$ از پایین کران دار است ولی کران بالا نـدارد، لذا کراندار نیست.

$$n^2 : 1, 4, 9, 16, 25, \ldots$$

توجـــه: دنبالـه هــای $\{\frac{1}{n}\}$ و $\{1+\frac{1}{n^2}\}$ و $\{2\}$ و $\{(-1)^n\}$ کرانــدار هــستند و دنبالــه هــای $\{n\}$ و $\{1+n^2\}$ و $\{(-1)^n n\}$ بیکران هستند.

***

دنباله های یکنوا

دنباله ی صعودی : دنباله ی $\{a_n\}$ را صعودی گویند، اگر و فقط اگر به ازای هر $n \in N$ داشته باشیم.

$$a_{n+1} \geq a_n$$

به عبارت دیگر:

$$\forall n \in N \rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

دنباله ی نزولی : دنباله ی $\{a_n\}$ را نزولی گویند، اگر و فقط اگر به ازای هر $n \in N$ داشته باشیم.

$$a_{n+1} \leq a_n$$

به عبارت دیگر:

$$\forall n \in N \rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$$

دنباله ی یکنوا : دنباله ی $\{a_n\}$ را یکنوا گویند، هرگاه صعودی یا نزولی باشد.

تمرین: ثابت کنید که دنباله های زیر یکنوا هستند.

الف) $\{\frac{1}{n}\}$ ب) $\{n^2\}$

حل:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\frac{n}{n+1}\le 1$$

لذا دنباله ی $\{\frac{1}{n}\}$ نزولی است.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^2}{n^2}=\frac{n^2+2n+1}{n^2}=\frac{n^2}{n^2}+\frac{2n+1}{n^2}=1+\frac{2n+1}{n^2}\ge 1$$

لذا دنباله ی $\{n^2\}$ صعودی است.

توجه: دنباله های $\{1-\frac{1}{n}\}$ و $\{n^2\}$ صعودی و دنباله های $\{1+\frac{1}{n}\}$ و $\{-n^2\}$ نزولی همچنین دنباله های $\{(-1)^n\}$ و $\{1+\frac{(-1)^n}{n}\}$ و $\{(-1)^n n^2\}$ به دلیل نوسانی[1] بودن نه نزولی و نه صعودی هستند.

تمرین : یک دنباله بنویسید که کراندار باشد، اما صعودی نباشد.

حل : $\{(-1)^n\}$

تمرین : یک دنباله بنویسید که هم کراندار و هم نزولی باشد.

حل : $\{\frac{1}{n}\}$

تمرین برای حل :

۱ : ابتدا تعدادی از جملات دنباله های زیر را بنویسید و سپس در مورد صعودی یا نزولی بودن آن بحث کنید.

الف) $\{n+1\}$ ب) $\{(-1)^{n+1}\}$ ج) $\{\frac{n}{n+1}\}$ د) $\{1+(-\frac{1}{2})^n\}$

۲ : دنباله های زیر را از نظر صعودی یا نزولی بودن و کراندار یا بیکران بودن بررسی کنید.

الف) $\{1+(\frac{1}{2})^n\}$ ب) $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ ج) $\{\frac{n^2}{2^n}\}$ د) $\{1+(-1)^n\}$ هـ) $\{\cos(\frac{n\pi}{2^n})\}$

۳ : یک دنباله بنویسید که هم کراندار و هم صعودی باشد.

[1] . یعنی جملات آنها یک در میان تغییر وضعیت می دهند.

حد دنباله

می گوییم دنباله ی $\{a_n\}$ دارای حد L است، هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد طبیعی M وجود داشته باشد بطوری که به ازای $n \geq M$ داشته باشیم: $|a_n - L| < \varepsilon$

یعنی با زیاد شدن شماره ی جملات دنباله ($n \geq M$) بتوانیم ، مقادیر دنباله (یعنی a_n) را تا حد دلخواه به عدد L نزدیک کنیم.بطوری که فاصله ی a_n با عدد L از ε مثبت و دلخواه هم کوچکتر شود.

اگر دنباله ی $\{a_n\}$ دارای حد L باشد. می گوییم این دنباله به عدد L همگرا است و می نویسیم:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

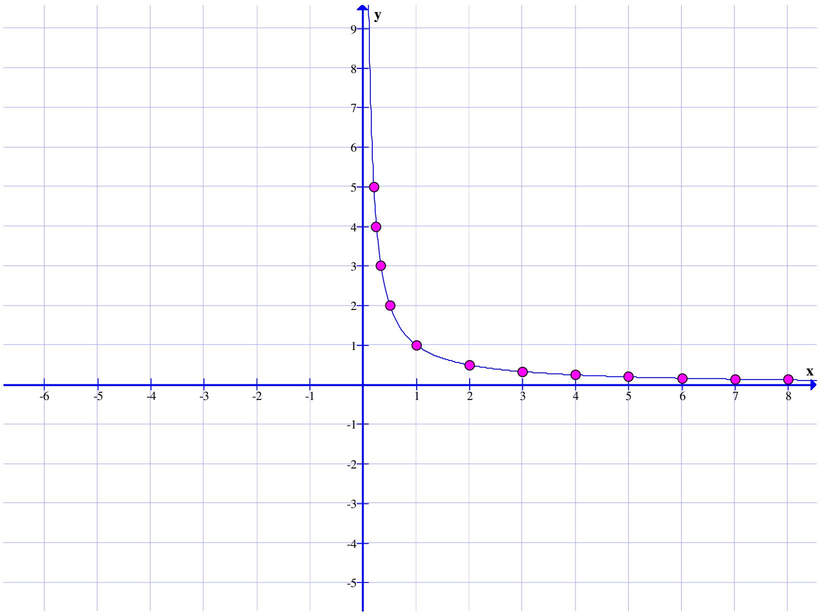
دنباله ای که حد متناهی(عدد ثابت) نداشته باشد، واگرا نامیده می شود.

مثال: دنباله ی $\{\frac{1}{n}\}$ را در نظر بگیرید.

واضح است که با بزرگ شدن n جملات دنباله کوچک و کوچکتر می شوند و به صفر نزدیک می شوند.پس دنباله ی $\{\frac{1}{n}\}$ دارای حدی برابر صفر است . پس می نویسند:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

در شکل زیر، نمودار دنباله ی $\{\frac{1}{n}\}$ رسم شده است. مشاهده می شود که جملات دنباله به خط $y = 0$ نزدیک و نزدیکتر می شوند. یعنی دنباله به صفر همگرا است.



تمرین : با تعیین چند جمله ی اولیه حدس بزنید که آیا دنباله همگرا است یا خیر، اگر همگرا باشد، به چـه عـددی همگـرا می باشد. با رسم نمودار حدس خود را بررسی کنید.

الف) $\{\frac{2n}{n+1}\}$

ب) $\{n^2\}$

***

تعریف ریاضی دنباله ی همگرا

دنباله ی $\{a_n\}$ را همگرا به L می نامند و می نویسند $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

هرگاه داشته باشیم:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M \in N, n \geq M \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

دنباله ای که همگرا نباشد، واگرا نامیده می شود.

تمرین: با استفاده از تعریف ثابت کنید که دنباله ی $\{\frac{1}{n}\}$ همگرا به صفر است.

حل:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M \in N, n \geq M \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

$$|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon \to |\frac{1}{n}| < \varepsilon \xrightarrow{n\in N} \frac{1}{n} < \varepsilon \to n > \frac{1}{\varepsilon}$$

پس با انتخاب $M \geq [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$ دنباله همگرا به صفر می شود.

تمرین: با استفاده از تعریف ثابت کنید که دنباله ی $\{\frac{2n+3}{n}\}$ همگرا به ۲ است.

حل:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M \in N, n \geq M \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

$$|\frac{2n+3}{n} - 2| < \varepsilon \to |\frac{2n+3-2n}{n}| < \varepsilon \to |\frac{3}{n}| < \varepsilon \xrightarrow{n\in N} \frac{3}{n} < \varepsilon \to n > \frac{3}{\varepsilon}$$

پس با انتخاب $M \geq [\frac{3}{\varepsilon}] + 1$ دنباله همگرا به ۲ می شود.

تمرین: با استفاده از تعریف ثابت کنید که دنباله ی $\{\frac{(-1)^n}{n+2}\}$ همگرا به صفر است.

حل:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M \in N, n \ge M \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{(-1)^n}{n+2} - 0\right| < \varepsilon \rightarrow \left|\frac{(-1)^n}{n+2}\right| < \varepsilon \rightarrow \frac{|(-1)^n|}{|n+2|} < \varepsilon \rightarrow \frac{1}{n+2} < \varepsilon$$

$$\rightarrow n+2 > \frac{1}{\varepsilon} \rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 2$$

پس با انتخاب $M \ge [\frac{1}{\varepsilon} - 2] + 1$ یا $M \ge [\frac{1}{\varepsilon}] - 1$ دنباله همگرا به صفر می شود.

(توجه: $n \in N \rightarrow |(-1)^n| = 1$)

تمرین: با استفاده از تعریف حد دنباله ها ثابت کنید: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3n^2 - 1} = \frac{1}{3}$

حل:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M \in N, n \ge M \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{n^2}{3n^2 - 1} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon \rightarrow \left|\frac{3n^2 - 3n^2 + 1}{3(3n^2 - 1)}\right| < \varepsilon \rightarrow \frac{|1|}{3|3n^2 - 1|} < \varepsilon$$

$$\xrightarrow{n>1 \rightarrow n^2 > 1 \rightarrow 3n^2 > 1 \rightarrow 3n^2 - 1 > 0} 3n^2 - 1 > \frac{1}{3\varepsilon} \rightarrow n^2 > \frac{1}{9\varepsilon} + \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow n > \sqrt{\frac{1}{9\varepsilon} + \frac{1}{3}}$$

پس با انتخاب $M \ge [\sqrt{\frac{1}{9\varepsilon} + \frac{1}{3}}] + 1$ دنباله همگرا به $\frac{1}{3}$ می شود.

تمرین: با استفاده از تعریف حد دنباله ها ثابت کنید: $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$

حل:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M \in N, n \ge M \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

$$|\sqrt{n+1} - \sqrt{n} - 0| < \varepsilon \xrightarrow{\text{گویا کردن صورت}} \left|\frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}\right| < \varepsilon$$

$$\to \left|\frac{۱}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}\right|<\varepsilon \to \frac{۱}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}<\varepsilon \to \sqrt{n+۱}+\sqrt{n}>\frac{۱}{\varepsilon}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty \Rightarrow \sqrt{n+۱}\approx\sqrt{n}} ۲\sqrt{n}>\frac{۱}{\varepsilon} \to \sqrt{n}>\frac{۱}{۲\varepsilon} \to n>\frac{۱}{۴\varepsilon^{۲}}$$

پس با انتخاب $M \geq [\frac{۱}{۴\varepsilon^{۲}}]+۱$ دنباله همگرا به صفر می شود.

تمرین: با استفاده از تعریف حد دنباله ها ثابت کنید: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{۲n}{n+۴\sqrt{n}}=۲$

حل:

$$\forall \varepsilon>۰ \; \exists M \in N, n \geq M \Rightarrow |a_n - L|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{۲n}{n+۴\sqrt{n}}-۲\right|<\varepsilon \to \left|\frac{-۸\sqrt{n}}{n+۴\sqrt{n}}\right|<\varepsilon \to \frac{n+۴\sqrt{n}}{۸\sqrt{n}}>\frac{۱}{\varepsilon} \to \frac{۱}{۸}\sqrt{n}+\frac{۱}{۲}>\frac{۱}{\varepsilon}$$

$$\to \frac{۱}{۸}\sqrt{n}>\frac{۱}{\varepsilon}-\frac{۱}{۲} \to \sqrt{n}>\frac{۸}{\varepsilon}-۴ \to n>(\frac{۸}{\varepsilon}-۴)^{۲}$$

پس با انتخاب $M \geq [(\frac{۸}{\varepsilon}-۴)^{۲}]+۱$ دنباله همگرا به ۲ می شود.

تمرین: ثابت کنید که دنباله ی $\{\frac{۲^{n-۱}+(-۱)^n}{۲^n}\}$ همگرا است.

حل:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۲^{n-۱}+(-۱)^n}{۲^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{۲^{n-۱}}{۲^n}+\lim_{n\to\infty}\frac{(-۱)^n}{۲^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{۲^n}{۲^n}\times\frac{۱}{۲}+\lim_{n\to\infty}\frac{(-۱)^n}{۲^n}=\frac{۱}{۲}+۰=\frac{۱}{۲}$$

$$\forall \varepsilon>۰ \; \exists M \in N, n \geq M \Rightarrow |a_n - L|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{۲^{n-۱}+(-۱)^n}{۲^n}-\frac{۱}{۲}\right|<\varepsilon \to \left|\frac{۲^{n-۱}+(-۱)^n-۲^{n-۱}}{۲^n}\right|<\varepsilon \to \left|\frac{(-۱)^n}{۲^n}\right|<\varepsilon \to \frac{۱}{۲^n}<\varepsilon$$

$$۲^n>\frac{۱}{\varepsilon} \to \log_{۲}^{۲^n}>\log_{۲}^{\frac{۱}{\varepsilon}} \to n\log_{۲}^{۲}>\log_{۲}^{\frac{۱}{\varepsilon}} \to n>\log_{۲}^{\frac{۱}{\varepsilon}}$$

کافی است که قرار دهیم $M \geq [\log_{۲}^{\frac{۱}{\varepsilon}}]+۱$

تمرین: با استفاده از تعریف حد ثابت کنید که دنباله ی $\{\frac{1+(-1)^n}{n^2}\}$ همگرا به صفر است.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M \in N, n \geq M \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{1+(-1)^n}{n^2} - 0\right| < \varepsilon \to \left|\frac{1+(-1)^n}{n^2}\right| \leq \frac{2}{n^2} < \varepsilon \to \frac{n^2}{2} > \frac{1}{\varepsilon} \to n^2 > \frac{2}{\varepsilon} \to n > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$$

کافی است که قرار دهیم $M \geq [\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}] + 1$

توجه: $0 \leq \frac{1+(-1)^n}{n^2} \leq \frac{2}{n^2}$

تمرین: جملات دنباله ی $\{\frac{2n^2-32}{n^2-41}\}$ برای مقادیر $n > 71$ در کدام همسایگی قرار می گیرند؟

حل:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-32}{n^2-41} = 2$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M \in N, n \geq M \Rightarrow \left|\frac{2n^2-32}{n^2-41} - 2\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{50}{n^2-41}\right| < \varepsilon \xrightarrow{n>71 \to n^2-41>0} n^2 - 41 > \frac{50}{\varepsilon} \to n^2 > \frac{50}{\varepsilon} + 41 \to n > \sqrt{\frac{50}{\varepsilon} + 41}$$

$$\xrightarrow{n>71} \sqrt{\frac{50}{\varepsilon} + 41} = 71 \to \frac{50}{\varepsilon} + 41 = 5041 \to \varepsilon = 0/01$$

$$|a_n - L| < \varepsilon \to L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \to 2 + 0/01 < a_n < 2 + 0/01 \to 1/99 < a_n < 2/01$$

تمرین: در دنباله ی $\{\frac{2n+3}{n}\}$ به ازای چه مقادیر n داریم: $1/997 < \frac{2n+3}{n} < 2/003$

حل:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n} = 2$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M \in N, n \geq M \Rightarrow \left|\frac{2n+3}{n} - 2\right| < \varepsilon$$

$$|\frac{۳}{n}| < \varepsilon \to \frac{۳}{n} < \varepsilon \to n > \frac{۳}{\varepsilon} \quad (۱)$$

$$۱/۹۹۷ < \frac{۲n+۳}{n} < ۲/۰۰۳ \to \xrightarrow{a=\frac{۱/۹۹۷+۲/۰۰۳}{۲}=۲} -۰/۰۰۳ < \frac{۲n+۳}{n} - ۲ < ۰/۰۰۳$$

$$\to |\frac{۲n+۳}{n} - ۲| < ۰/۰۰۳ \to \varepsilon = ۰/۰۰۳ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} n > \frac{۳}{۰/۰۰۳} \to n > ۱۰۰۰$$

تمرین: اگر $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{۵-n}{۲+۳n} = -\frac{۱}{۳}$ باشد. تعیین کنید که از کدام مرتبه به بعد فاصله ی جملات دنباله از حدش کمتر از $\frac{۱}{۳۴۰}$ می شود.

حل:

$$\varepsilon = \frac{۱}{۳۴۰} \xrightarrow{\exists M\in N, n\geq M} |\frac{۵-n}{۲+۳n} + \frac{۱}{۳}| < \frac{۱}{۳۴۰} \to |\frac{۱۷}{۳(۲+۳n)}| < \frac{۱}{۳۴۰}$$

$$\to ۲+۳n > \frac{۵۷۸۰}{۳} \to n > ۶۴۱/۵$$

$$\therefore M \geq [۶۴۱/۵]+۱ \to M \geq ۶۴۲$$

تمرین: اگر $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-۱)^n \times ۲}{۵\sqrt[۳]{n}+۱} = ۰$ باشد.از کدام مرتبه به بعد جملات دنباله در فاصله ی $(\frac{-۱}{۱۰}, \frac{۱}{۱۰})$ قرار می گیرند.

حل:

$$\varepsilon = \frac{۱}{۱۰} \xrightarrow{\exists M\in N, n\geq M} |\frac{(-۱)^n \times ۲}{۵\sqrt[۳]{n}+۱} - ۰| < \frac{۱}{۱۰} \to \frac{۲}{۵\sqrt[۳]{n}+۱} < \frac{۱}{۱۰}$$

$$\to ۵\sqrt[۳]{n}+۱ > ۲۰ \to \sqrt[۳]{n} > \frac{۱۹}{۵} \to n > (\frac{۱۹}{۵})^۳$$

$$\therefore M \geq [(\frac{۱۹}{۵})^۳]+۱ \to M \geq [۵۴/۸۷۲]+۱ \to M \geq ۵۵$$

تمرین: دنباله ی $\{\frac{۱-۲n}{n+۲}\}$ را در نظر بگیرید.کمترین عدد طبیعی M را چنان تعیین کنید که از $n \geq M$ نتیجه شود:

$$-۲/۰۰۱ < \frac{۱-۲n}{n+۲} < -۱/۹۹۹$$

حل:

$a=\frac{-۲/۰۰۱+(-۱/۹۹۹)}{۲}=\frac{-۴}{۲}=-۲$ مرکز همسایگی

$$\to -۰/۰۰۱<\frac{۱-۲n}{n+۲}+۲<۰/۰۰۱\to \left|\frac{۱-۲n+۲n+۴}{n+۲}\right|<۰/۰۰۱\to \frac{۵}{n+۲}<۰/۰۰۱$$

$$\xrightarrow{\times(\frac{۱}{۵})}\frac{۱}{n+۲}<\frac{۱}{۵۰۰۰}\to n+۲>۵۰۰۰\to n>۴۹۹۸$$
$$\therefore M\geq[۴۹۹۸]+۱=۴۹۹۹\to Min(M)=۴۹۹۹$$

تمرین: در دنباله ی $\{\frac{۲n^۲}{n^۲+۱}\}$ کمترین مقدار M بطوری که وقتی $n>M$ آنگاه $\frac{۱}{۴۱}>\left|\frac{۲n^۲}{n^۲+۱}-۲\right|$ را بیابید.

حل:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۲n^۲}{n^۲+۱}=۲$$

$$\left|\frac{۲n^۲}{n^۲+۱}-۲\right|<\frac{۱}{۴۱}\to\left|\frac{-۲}{n^۲+۱}\right|<\frac{۱}{۴۱}\to\frac{۲}{n^۲+۱}<\frac{۱}{۴۱}\to n^۲+۱>۸۲\to n^۲>۸۱$$
$$\to n>۹\to M\geq[۹]+۱=۱۰$$
$$\therefore Min(M)=۱۰$$

***

تمرین: با استفاده از تعریف حد دنباله ها ثابت کنید که دنباله ی $\{\frac{n^۲+۱}{n}\}$ واگرا است.

حل: اثبات با استفاده از برهان خلف

فرض کنیم که دنباله ی فوق به L همگرا باشد. پس:

$$\forall\varepsilon>۰\ \exists M\in N,n\geq M\Rightarrow\left|\frac{n^۲+۱}{n}-L\right|<\varepsilon\to L-\varepsilon<\frac{n^۲+۱}{n}<L+\varepsilon$$

$$\to L-\varepsilon<n+\frac{۱}{n}<L+\varepsilon\xrightarrow{n\in N\to\frac{۱}{n}>۰\to n<n+\frac{۱}{n}}n<n+\frac{۱}{n}<L+\varepsilon$$
$$\to n<L+\varepsilon$$

و با انتخاب $\varepsilon=۱$ داریم $n<L+۱$ یعنی مجموعه ی اعداد طبیعی از بالا کراندار است و این نادرست می باشد. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

تمرین: ثابت کنید که دنباله ی $\{n^{۲}\}$ واگرا است.

حل: (اثبات با استفاده از برهان خلف) فرض کنیم که $\lim\limits_{n\to\infty} n^{۲} = L$ پس:

$$\forall\varepsilon>۰\ \exists M\in N, n\geq M \Rightarrow |n^{۲}-L|<\varepsilon \to L-\varepsilon<n^{۲}<L+\varepsilon$$
$$\to \sqrt{L-\varepsilon}<n<\sqrt{L+\varepsilon}$$

یعنی مجموعه ی اعداد طبیعی کراندار است و این غیر ممکن است. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

تمرین: نشان دهید که دنباله ی $\{(-۱)^{n}\}$ واگرا است.

حل: (اثبات با استفاده از برهان خلف) فرض کنیم که $\lim\limits_{n\to\infty} (-۱)^{n} = L$ پس:

$$\forall\varepsilon>۰\ \exists M\in N, n\geq M \Rightarrow |(-۱)^{n}-L|<\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon=\frac{۱}{۲}} |(-۱)^{n}-L|<\frac{۱}{۲}$$

$$\to \begin{cases} \xrightarrow{n \text{ زوج}} |۱-L|<\frac{۱}{۲} \\ \xrightarrow{n \text{ فرد}} |-۱-L|<\frac{۱}{۲} \to |۱+L|<\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

دو نامساوی بدست آمده نمی توانند همزمان برقرار باشند. زیرا

$$۲=|(۱-L)+(۱+L)|\leq|۱-L|+|۱+L|<\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۱\Rightarrow ۲<۱$$

و این ممکن نیست.

***

تعریف: دنباله ای که همه ی جملات آن ثابت و برابر عدد حقیقی c باشند را دنباله ثابت $\{c\}$ می نامند.

تمرین: ثابت کنید که دنباله ی ثابت $\{c\}$ همگرا و حد آن c است.

حل:

$$\forall\varepsilon>۰\ \exists M\in N, n\geq M \Rightarrow |a_n-L|<\varepsilon$$
$$\to |c-c|<\varepsilon \to ۰<\varepsilon$$

و با توجه به اینکه $\varepsilon>۰$ لذا حکم ثابت است.

نکته:

۱) اگر $|r|>۱$ باشد. در این صورت دنباله ی $\{r^n\}$ واگرا است.

۲) اگر $|r|<۱$ باشد. در این صورت دنباله ی $\{r^n\}$ همگرا بوده وحد آن برابر صفر است.

۳) دنباله ی $\{۱^n\}$ ثابت بوده و همواره همگرا به ۱ است.

۴) دنباله ی $\{(-۱)^n\}$ واگرا است.

تمرین: کدام یک از دنباله های زیر واگرا است؟

۱) $\{(\frac{-۱}{۲})^n\}$ ۲) $\{(\frac{۳}{۵})^n\}$ ۳) $\{e^{-n}\}$ ۴) $\{(\frac{۴}{۳})^n\}$

حل: با توجه به نکته ی فوق چون $|\frac{۴}{۳}|>۱$ دنباله ی گزینه ی ۴ واگرا است.[2]

***

انواع دنباله های واگرا

۱) دنباله هایی که حدشان بی نهایت است. مانند: $\{n^۴\}$ و $\{\sqrt{n}\}$ و $\{۳n-۲\}$

۲) دنباله هایی که نوسانات منظم دارند. مانند: $\{(-۱)^n\}$ و $\{\cos n\pi\}$

۳) دنباله هایی که دارای یک زیر دنباله ی واگرا هستند.

مانند:
$$a_n=\begin{cases} ۲n & \text{زوج } n \\ \frac{۱}{n} & \text{فرد } n \end{cases}$$

که در آن $\{۲n\}$ واگرا و $\{\frac{۱}{n}\}$ همگرا است.این دو دنباله زیر دنباله ی $\{a_n\}$ هستند.

۴) دنباله ای که از مجموع یا تفریق یک دنباله ی واگرا و یک دنباله ی همگرا بدست می آید.

مانند: $\{\frac{۱}{n}+(-۱)^n\}$ که در آن $\{(-۱)^n\}$ واگرا و $\{\frac{۱}{n}\}$ همگرا است.

---

[2] . عدد e مقدار تقریبی ۲/۷۱ که یک عدد اصم است، را عدد نپرین می نامند. هر لگاریتم در مبنای e را لگاریتم طبیعی می نامند و آن را به صورت L_n نمایش می دهند.

قضیه: اگر دنباله ی $\{a_n\}$ همگرا باشد،آنگاه حد آن یکتا است.

اثبات: به روش برهان خلف

گیریم که دنباله ی $\{a_n\}$ دارای دو حد نابرابر $L_۲$ و $L_۱$ باشد. پس:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L_۱ \xrightarrow{\exists M_۱\in N, n\geq M_۱} |a_n - L_۱| < \varepsilon_۱$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L_۲ \xrightarrow{\exists M_۲\in N, n\geq M_۲} |a_n - L_۲| < \varepsilon_۲$$

فرض کنیم که $M = \max\{M_۱, M_۲\}, \varepsilon_۱ = \varepsilon_۲ = \dfrac{\varepsilon}{۲}$ پس برای $n \geq M$ داریم.

$$|L_۱ - L_۲| = |L_۱ - a_n + a_n - L_۲| \leq |L_۱ - a_n| + |a_n - L_۲| = |a_n - L_۱| + |a_n - L_۲|$$
$$< \varepsilon_۱ + \varepsilon_۲ = \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon$$

لذا $۰ \leq |L_۱ - L_۲| < \varepsilon$ پس طبق تمرینی در فصل صفر $|L_۱ - L_۲| = ۰ \to L_۱ = L_۲$

و این با نابرابر بودن $L_۲$ و $L_۱$ تناقض دارد.

توجه: $|a - b| = |b - a|$

نتیجه: اگر دنباله ی $\{a_n\}$ به عدد L همگرا $(\lim_{n\to\infty} a_n = L)$ و $a_n \geq ۰$ باشد.آنگاه $L \geq ۰$ است.

***

تمرین برای حل :

۱ : ثابت کنید که هرگاه دنباله ی $\{a_n\}$ کراندار باشد، عدد مثبتی مانند M وجود دارد به قسمی که برای هر n ، $|a_n| \leq M$ و برعکس

۲ : برای چندین جمله ی اولیه، فاصله ی جملات دنباله ی $\{\dfrac{۲n}{n+۱}\}$ را تا ۲ حساب کنید. n از چه عددی باید بزرگتر باشد تا نابرابری $|\dfrac{۲n}{n+۱} - ۲| < ۰/۰۰۱$ برقرار گردد.

۳ : آیا دنباله ی $\{۲n + ۱\}$ همگرا است؟ چرا؟

۴ : درستی یا نادرستی گزاره های زیر را تعیین کنید.

الف : هرگاه $\{a_n\}$ دنباله ای صعودی و c عدد ثابتی باشد. دنباله ی $\{ca_n\}$ نیز صعودی است. (..............)

ب : هرگاه $\{a_n\}$ دنباله ای نزولی و c عدد ثابتی باشد. دنباله ی $\{ca_n\}$ نیز نزولی است. (..............)

ج : هرگاه $\{a_n\}$ دنباله ای یکنوا و c عدد ثابتی باشد. دنباله ی $\{ca_n\}$ نیز یکنوا است. (..............)

د : هرگاه $\{a_n\}$ یک دنباله و برای هر عدد طبیعی n و هر عدد حقیقی $\varepsilon > ۰$، نامساوی $|a_n - ۳| < \varepsilon$ آنگاه دنباله $\{a_n\}$ به ۳ همگرا است. (..............)

ه : اگر $|a_n - ۳| < ۵$ آنگاه دنباله ی $\{a_n\}$ کراندار است. (..............)

و : دنباله ی $\{(\frac{۱}{\sqrt{۲}})^n\}$ همگرا به صفر است.(............)

ز : دنباله ی $\{۱ + \frac{۱}{n}\}$ صعودی است (.............)

۵ : کدام دنباله همگرا و کدام دنباله واگرا است. اگر همگرا باشد، پاسخ خود را ثابت کنید.

الف) $\{۳ - (\frac{۱}{۲})^n\}$ ب) $\{\sin\frac{n\pi}{۲}\}$ ج) $\{(\frac{۱}{۳})^{n-۱}\}$

د) $\{۳^n\}$ ه) $\{\log n\}$ و) $\{\log\frac{۱}{n}\}$

***

دنباله های واگرا به بی نهایت

همانطور که تاکنون دیده اید، دنباله های واگرا به دو دسته ی مهم تبدیل می شوند.

الف : دنباله هایی که حد متفاوت دارند. مانند $\{(-۱)^n\}$

ب : دنباله هایی که حد آنها $\pm\infty$ می شود. مانند $\{۱ + n^۲\}$

برای اثبات واگرایی دنباله های واگرای نوع دوم ، از گزاره های منطقی زیر نیز می توان استفاده کرد.

۱ : دنباله ی $\{a_n\}$ واگرا به $+\infty$ است هرگاه :

برای هر عدد حقیقی و مثبت K، عددی طبیعی مانند M یافت شود که اگر برای هر n طبیعی $n \geq M$ نتیجه می شود $a_n > K$

و می نویسند $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall k > ۰\ \exists M \in N \ni \forall n(n \geq M \to a_n < k)$$

۲ : دنباله ی $\{a_n\}$ واگرا به $-\infty$ است هرگاه :

برای هر عدد حقیقی و مثبت K، عددی طبیعی مانند M یافت شود که اگر برای هر n طبیعی $n \geq M$ نتیجه می شود $a_n < K$

و می نویسند $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall k < ۰\ \exists M \in N \ni \forall n(n \geq M \to a_n < k)$$

تمرین : ثابت کنید که دنباله ی $\{n^۲\}$ واگرا به $+\infty$ است.

اثبات : ثابت می کنیم که برای هر عدد حقیقی و مثبت K، عددی طبیعی مانند M یافت شود که اگر برای هر n طبیعی $n \geq M$ نتیجه می شود $a_n > K$

$$a_n > K \to n^۲ > K \to n > \sqrt{K}$$

پس قرار می دهیم $M = [\sqrt{K}] + ۱$ تا نامساوی مورد نظر برقرار شود.

تمرین : ثابت کنید که دنباله ی $\{۳ - n^۲\}$ واگرا به $-\infty$ است.

ثابت می کنیم که برای هر عدد حقیقی و مثبت K، عددی طبیعی مانند M یافت شود که اگر برای هر n طبیعی $n \geq M$ نتیجه می شود $a_n < K$

$$a_n > K \to ۳ - n^۲ > K \to -n^۲ > K - ۳ \to n^۲ < ۳ - K \to n > \sqrt{۳ - K}$$

پس قرار می دهیم $M = [\sqrt{۳ - K}] + ۱$ تا نامساوی مورد نظر برقرار شود.

حل چند تمرین :

۱ : ثابت کنید که $\lim_{n\to\infty} \frac{n^۲ + ۱}{n} = \infty$

اثبات :

$$\forall k < ۰\ \exists M \in N \ni \forall n(n \geq M \to \frac{n^۲ + ۱}{n} < k)$$

$$\frac{n^{۲}+۱}{nn}<k \to n+\frac{۱}{n}<k \xrightarrow{n<n+\frac{۱}{n}} n>k$$

پس قرار می دهیم $M=[k]+۱$ تا نامساوی مورد نظر برقرار شود.

۲ : ثابت کنید که $\lim\limits_{n\to\infty}(-۱)^n\frac{n^{۲}-۱}{n}$ موجود نیست.

اثبات :

اگر n فرد باشد. در این صورت

$$\lim_{n\to\infty}(-۱)^n\frac{n^{۲}-۱}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{۲}-۱}{-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{۲}}{-n}=\lim_{n\to\infty}-n=-\infty$$

اگر n زوج باشد. در این صورت

$$\lim_{n\to\infty}(-۱)^n\frac{n^{۲}-۱}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{۲}-۱}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{۲}}{n}=\lim_{n\to\infty}n=+\infty$$

پس $\lim\limits_{n\to\infty}(-۱)^n\frac{n^{۲}-۱}{n}$ موجود نیست.

۳ : ثابت کنید، اگر $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$ آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{۱}{a_n}=۰$

اثبات :

۴ : فرض کنید که $a_n>۰$ و $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{۱}{a_n}=۰$. ثابت کنید که $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$

اثبات :

۵ : فرض کنید که $a_n<۰$ و $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{۱}{a_n}=۰$. ثابت کنید که $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$

اثبات :

۶ : ثابت کنید $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=+\infty$. آیا از این تساوی می توان نتیجه گرفت که $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+۱}=+\infty$ ؟

حل :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty \Leftrightarrow \forall k > ۰ \; \exists M \in N \ni \forall n (n \geq M \to \sqrt{n} < k)$$

$$\sqrt{n} < k \to n < k^۲ \to n \geq [k^۲] + ۱$$

لذا قرار می دهیم. $M = [k^۲] + ۱$

بله،کافی قرار دهیم $M = [k^۲]$. زیرا

$$\sqrt{n+۱} < k \to n + ۱ < k^۲ \to n < k^۲ - ۱ \to n \geq [k^۲ - ۱] + ۱ = [k^۲]$$

۷ : کدام دنباله همگرا و کدام دنباله واگرا است. پاسخ خود را ثابت کنید.

الف) $a_n = \dfrac{۵n^۲ - ۳n + ۱۱}{۲n + ۱}$ ب) $b_n = \dfrac{n^۲ - ۱}{۶n^۳ + ۱}$ ج) $c_n = \dfrac{۳n^۲ + ۱}{۲n^۲ + ۷}$

حل :

الف) چون درجه ی صورت از درجه ی مخرج بیشتر است.پس دنباله واگرا است.

اثبات :

$$\forall k > ۰ \; \exists M \in N \ni \forall n (n \geq M \to \frac{۵n^۲ - ۳n + ۱۱}{۲n + ۱} < k)$$

$$\frac{۵n^۲ - ۳n + ۱۱}{۲n + ۱} > \frac{۵n^۲ - ۳n + ۱۱ - ۱۹}{۲n + ۱ + ۱} > k \to \frac{۵n^۲ - ۳n - ۸}{۲n + ۲} > k \to \frac{(۵n - ۸)(n + ۱)}{۲(n + ۱)} > k$$

$$\to \frac{(۵n - ۸)}{۲} > k \to ۵n - ۸ > ۲k \to n > \frac{۲k + ۸}{۵}$$

لذا قرار می دهیم. $M = [\frac{۲k + ۸}{۵}] + ۱$

ب) چون درجه ی صورت از درجه ی مخرج کمتر است. پس دنباله همگرا به صفر است.

اثبات :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M \in N, n \geq M \Rightarrow \left|\frac{n^2-1}{6n^3+1} - 0\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{n^2-1}{6n^3+1} - 0\right| < \varepsilon \rightarrow \left|\frac{n^2-1}{6n^3+1}\right| < \varepsilon \rightarrow \left|\frac{n^2}{6n^3}\right| < \varepsilon \rightarrow \left|\frac{1}{6n}\right| < \varepsilon \rightarrow \frac{1}{6n} < \varepsilon \rightarrow 6n > \frac{1}{\varepsilon} \rightarrow n > \frac{1}{6\varepsilon}$$

لذا قرار می دهیم. $M = [\frac{1}{6\varepsilon}] + 1$

ج) چون درجه ی صورت و درجه ی مخرج مساوی است. پس دنباله همگرا به $\frac{3}{2}$ است.

اثبات :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M \in N, n \geq M \Rightarrow \left|\frac{3n^2+1}{2n^2+7} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{3n^2+1}{2n^2+7} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon \rightarrow \left|\frac{2(3n^2+1) - 3(2n^2+7)}{2(2n^2+7)}\right| < \varepsilon \rightarrow \left|\frac{-19}{2(2n^2+7)}\right| < \varepsilon$$

$$\rightarrow \frac{19}{2(2n^2+7)} < \varepsilon \rightarrow \frac{2(2n^2+7)}{19} > \frac{1}{\varepsilon} \xrightarrow{\times\frac{19}{2}} (2n^2+7) > \frac{19}{2\varepsilon} \rightarrow n^2 > \frac{19}{4\varepsilon} - \frac{7}{2} \rightarrow n > \sqrt{\frac{19}{4\varepsilon} - \frac{7}{2}}$$

لذا قرار می دهیم. $M = [\sqrt{\frac{19}{4\varepsilon} - \frac{7}{2}}] + 1$

***

روش بررسی همگرایی دنباله با معلوم بودن رابطه ی بازگشتی آن

برای بررسی همگرایی یک دنباله وقتی که رابطه ی بازگشتی آن داده شده باشد، به ترتیب زیر عمل می کنیم.

۱ : فرض می کنیم که دنباله به عدد L همگرا است. سپس با جایگزین کردن $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+۱} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ ، یک معادله ، تشکیل می دهیم.

۲ : با تشکیل این معادله ۳ حالت زیر رخ می دهد.

الف : اگر در معادله به یک تناقض رسیده ایم، نتیجه اینکه دنباله واگرا است.

ب : اگر در معادله به یک رابطه ی بدیهی برسیم، نتیجه اینکه دنباله همگرا است،اما مقدار همگرایی آن مشخص نیست.

ج : اگر در معادله مقدار مشخصی برای L به دست آید، به شرط قابل قبول بودن آن، نتیجه می شود، L مقدار همگرایی دنباله است.

تمرین : دنباله ی $\{a_n\}$ به صورت $a_{n+۱} = \sqrt{۶ + a_n}$ و $a_۱ = ۱$ تعریف شده است.

الف : ثابت کنید این دنباله همگرا است. ب : حد این دنباله را به دست آورید.

حل : قرار می دهیم.

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+۱} = \lim_{n\to\infty} a_n = L$$

$$\to L = \sqrt{۶ + L} \to L^۲ - L - ۶ = ۰ \to (L - ۳)(L + ۲) = ۰ \to \begin{cases} L = ۳ \\ L = -۲ \end{cases}$$

ولی با قدر دقت در جملات اولیه ی آن می توان گفت که دنباله صعودی و تمام جملات آن مثبت و بزرگتر از یک هستند.

بنابر این دنباله به ۳ همگرا است.

جملات اولیه دنباله ۱ و $\sqrt{۷}$ و $\sqrt{۶+\sqrt{۷}}$ و $\sqrt{۶+\sqrt{۶+\sqrt{۷}}}$ و ......

$$\lim_{n\to\infty} a_n = ۳$$

تمرین : ثابت کنید که دنباله ی $a_{n+۱} = a_n + ۴$ و $a_۱ = ۳$ واگرا است.

حل : قرار می دهیم.

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+۱} = \lim_{n\to\infty} a_n = L$$

$\rightarrow L = L + ۴ \rightarrow ۰ = ۴$

واین نتیجه ممکن نیست ، لذا دنباله واگرا است.

تمرین : ابتدا رابطه ی بازگشتی دنباله ی فیبوناتچی را نوشته و سپس ثابت کنید که این دنباله واگرا است.

***

همگرایی و کرانداری دنباله ها

در این قسمت دو مفهوم همگرایی و کرانداری دنباله ها را با همدیگر بررسی می کنیم. به قضیه های زیر توجه کنید.

قضیه ی ۱ : هر دنباله ی صعودی و از بالا کراندار همگرا است.

اثبات : قرار می دهیم $S = \{a_n : n \in N\}$ ، یعنی S مجموعه ی مقادیر عددی جملات دنباله ی مورد بحث است. پس $S \neq \Phi$ و S دارای کران بالایی مانند K است. بنابر اصل موضوع تمامیت S دارای کوچکترین کران بالا است. این کوچکترین کران بالای S را L می نامیم. نشان می دهیم که $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L$.

برای هر n طبیعی $a_n \leq L$ حال فرض کنیم که $\varepsilon > ۰$ عدد دلخواهی باشد. پس $L - \varepsilon$ یک کران بالای S نیست، زیر $L - \varepsilon < L$ و L کوچکترین کران بالای S فرض شده است.

چون $L - \varepsilon$ کران بالای S نیست، حداقل یک عضو S مانند a_m وجود دارد. به طوری که $L - \varepsilon < a_m$. حال برای هر $n \geq m$

$$a_n \geq a_m > L - \varepsilon$$

از طرف دیگر $a_n < L$ در نتیجه برای هر n که $n \geq m$

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$$

یعنی برای هر $n \geq m$

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

پس:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

یعنی دنباله ی a_n همگرا است.

قضیه ی ۲ : هر دنباله ی نزولی و از پایین کراندار همگرا است.

نتیجه : هر دنباله ی یکنوا و کراندار همگرا است.

توجه : با توجه به قضیه های فوق می توان همگرایی دنباله را بدون محاسبه ی مقدار حد نشان داد.

تمرین : ثابت کنید که دنباله ی $\{\sin\frac{\pi}{۲n}\}$ همگرا است.

حل : با توجه به طبیعی بودن عدد n واضح است که $\alpha=\frac{\pi}{۲n}$ در ربع اول دایره ی مثلثاتی قرار دارد. با توجه به نزولی بودن تابع

$$n=۱\Rightarrow\sin\frac{\pi}{۲(۱)}=۱$$

$$n\to\infty\Rightarrow\sin\frac{\pi}{۲(\infty)}=\sin ۰=۰$$

یعنی دنباله نزولی بوده و مقادیر آن در فاصله ی $[۰,۱)$ قرار دارند. پس دنباله یکنوا و کراندار می باشد، در نتیجه همگرا است.

تمرین: به کمک قضیه ی فوق نشان دهید که دنباله ی $\{\frac{n^۲}{۲^n}\}$ همگرا است.

حل: کافی است نشان دهیم که دنباله ی فوق یکنوا و کراندار است.

$$\frac{n^۲}{۲^n}:\frac{۱}{۲},۱,\frac{۹}{۸},۱,\frac{۲۵}{۳۲},\frac{۳۶}{۶۴},\frac{۴۹}{۱۲۸},...$$

$$\frac{a_{n+۱}}{a_n}=\frac{\frac{(n+۱)^۲}{۲^{n+۱}}}{\frac{n^۲}{۲^n}}=\frac{\frac{n^۲+۲n+۱}{۲^n\times ۲}}{\frac{n^۲}{۲^n}}=\frac{۲^n\times(n^۲+۲n+۱)}{۲^n\times ۲\times n^۲}$$

$$=\frac{۲^n\times(n^۲+۲n+۱)}{۲^n\times ۲\times n^۲}=\frac{n^۲}{۲n^۲}+\frac{۲n}{۲n^۲}+\frac{۱}{۲n^۲}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{n}+\frac{۱}{۲n^۲}\le ۱$$

این رابطه برای $n\ge ۳$ بدیهی است. لذا دنباله برای $n\ge ۳$ نزولی است.

از طرفی با توجه به تمرین درس جبر واحتمال داشتیم.

$$2^n > n^2 \rightarrow \frac{n^2}{2^n} \leq 1 \rightarrow \left|\frac{n^2}{2^n}\right| \leq 1$$

یعنی دنباله کراندار است.

قضیه: هر دنباله ی همگرا کراندار است.

اثبات: گیریم که دنباله ی $\{a_n\}$ همگرا باشد.پس:

$$\lim_{n\rightarrow\infty} a_n = L \xrightarrow{\forall\varepsilon>0\ \exists M\in N,n\geq M} |a_n - L| < \varepsilon$$
$$\rightarrow -\varepsilon < a_n - L < \varepsilon \rightarrow L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon$$

یعنی دنباله ی $\{a_n\}$ کراندار است.

تمرین: ثابت کنید که دنباله ی $\{\frac{n}{2n+1}\}$ کراندار است.

حل: واضح است که این دنباله همگرا است پس کراندار می باشد.

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$$

نکته: عکس قضیه ی بالا درست نیست، یعنی ***<u>دنباله ی کراندار ممکن است همگرا نباشد.</u>***

مثلاً: دنباله ی نوسانی $\{(-1)^n\}$ همگرا نیست.چون جملات آن برای n زوج برابر ۱ و بـرای n فـرد برابـر ۱- هـستند، ولی کراندار است. زیرا $-1 \leq a_n \leq 1 \rightarrow |a_n| \leq 1$

***

نکته: با توجه به عکس نقیض قضیه ی فوق داریم: ***<u>هر دنباله ی بیکران، واگرا است.</u>***

تمرین : یکنوایی و کرانداری و همگرایی دنباله ی $\{\frac{\cos n\pi}{n^2}\}$ را بررسی کنید.

حل:

$$\frac{\cos n\pi}{n^2} : -1, \frac{1}{4}, \frac{-1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$$

پس جملات دنباله تغییرات منظم ندارد و لذا دنباله یکنوا نیست.

$$\forall n\in N: -1\le \cos n\pi \le 1 \rightarrow -\frac{1}{n^2}\le \frac{\cos n\pi}{n^2}\le \frac{1}{n^2}$$

$$\rightarrow -1\le -\frac{1}{n^2}\le \frac{\cos n\pi}{n^2}\le \frac{1}{n^2}\le 1 \rightarrow -1\le \frac{\cos n\pi}{n^2}\le 1 \rightarrow \left|\frac{\cos n\pi}{n^2}\right|\le 1$$

لذا دنباله کراندار است.

چون این دنباله یکنوا نیست، لذا با وجود کراندار بودن همگرا نیست.

تمرین : ثابت کنید که دنباله ی $\{\frac{(-1)^n}{n^2}\}$ غیر یکنوا، کراندار و همگرا است.

حل:

$$\frac{(-1)^n}{n^2}: -1, \frac{1}{4}, \frac{-1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$$

پس جملات دنباله تغییرات منظم ندارد و لذا دنباله یکنوا نیست.

$$\forall n\in N: -1\le (-1)^n \le 1 \rightarrow -\frac{1}{n^2}\le \frac{(-1)^n}{n^2}\le \frac{1}{n^2}$$

$$\rightarrow -1\le -\frac{1}{n^2}\le \frac{(-1)^n}{n^2}\le \frac{1}{n^2}\le 1 \rightarrow -1\le \frac{(-1)^n}{n^2}\le 1 \rightarrow \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right|\le 1$$

لذا دنباله کراندار است.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}=0$$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists M\in N, n\ge M \rightarrow \left|\frac{(-1)^n}{n^2}-0\right|<\varepsilon$$

$$\rightarrow \frac{1}{n^2}<\varepsilon \rightarrow n^2>\frac{1}{\varepsilon} \rightarrow n>\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$$

کافی است که $M\ge [\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}]+1$ تا دنباله به صفر همگرا شود.

تمرین : کرانداری و یکنوایی دنباله ی $\{\frac{n^۲+۱}{n^۲}\}$ را تحقیق کنید.در صورت همگـرا بودن،عـدد همگرایـی ایـن دنبالـه را بیابید.

حل:

$$a_n=\frac{n^۲+۱}{n^۲}=۱+\frac{۱}{n^۲}$$

$$\frac{a_{n+۱}}{a_n}=\frac{۱+\frac{۱}{(n+۱)^۲}}{۱+\frac{۱}{n^۲}}<۱$$ دنباله نزولی است.

توجه:

$$n+۱>n\to(n+۱)^۲>n^۲\to\frac{۱}{(n+۱)^۲}<\frac{۱}{n^۲}\to۱+\frac{۱}{(n+۱)^۲}<۱+\frac{۱}{n^۲}$$

$$۰\le\frac{۱}{n^۲}\le۱\to۰+۱\le۱+\frac{۱}{n^۲}\le۱+۱\to۱\le۱+\frac{۱}{n^۲}\le۲\to-۲\le۱+\frac{۱}{n^۲}\le۲\to|۱+\frac{۱}{n^۲}|\le۲$$

دنباله کراندار است.

حال چون دنباله ی داده شده یکنوا و کراندار است پس همگرا است و عدد همگرایی آن یک می شود.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^۲+۱}{n^۲}=۱$$

تمرین : ثابت کنید که دنباله ی $\{۱+\frac{(-۱)^n}{n}\}$ غیریکنوا، کراندار و همگرا است.

حل:

الف) بررسی کرانداری

$$a_n=۱+\frac{(-۱)^n}{n}$$

فرد n: $\quad a_n=۱-\frac{۱}{n}\xrightarrow{n\in N}۰\le۱-\frac{۱}{n}\le۱$

زوج n: $a_n = ۱ + \frac{۱}{n} \xrightarrow{n \in N} ۱ \le ۱ + \frac{۱}{n} \le ۲$

$\therefore \quad ۰ \le a_n < ۲ \to -۲ \le a_n < ۲ \to |a_n| < ۲$

ب) بررسی یکنوایی

$$\{a_n\} = \{۱ + \frac{(-۱)^n}{n}\} : ۰, \frac{۳}{۲}, \frac{۲}{۳}, \frac{۵}{۴}, \frac{۴}{۵}, ...$$

پس دنباله تغییرات نامنظم دارد.یعنی نه صعودی و نه نزولی است. لذا یکنوا نیست.

ج) بررسی همگرایی

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (۱ + \frac{(-۱)^n}{n}) = \lim_{n\to\infty} ۱ + \lim_{n\to\infty} \frac{(-۱)^n}{n} = ۱ + ۰ = ۱$$

پس دنباله همگرا است.

تمرین برای حل :

۱ : ابتدا نشان دهید که دنباله های زیر همگرا هستند و سپس حد آنها را حساب کنید.

الف) $\{۱ + \frac{۱}{n^۲ + ۱}\}$ ب) $\{۱ - \frac{۱}{n}\}$

۲ : فرض کنیم $\{a_n\}$ یک دنباله ی همگرا و برای هر n داشته باشیم $۵a_{n+۱} = ۲ + a_n$ حد این دنباله را پیدا کنید.

۳ : فرض کنیم دنباله ی $\{p_n\}$ همگرا و a و b دو عدد ثابت باشند، به قسمی کـه $p_{n+۱} = \frac{bp_n}{a + p_n}$. حـد دنبالـه ی $\{p_n\}$ را پیدا کنید

***

یک دنباله ی مهم

دنباله ی $a_n = (۱ + \frac{۱}{n})^n$ را در نظر بگیرید. چند جمله از این دنباله در جدول زیر محاسبه شده است. با توجه به جدول مشاهده می شود که با افزایش n ، مقادیر جملات دنباله نیز افزایش می یابند. اما روند رشد جملات بسیار کند است، بطوری که حاصل $(۱ + \frac{۱}{n})^n$ حتی به ۲/۸ هم نمی رسد و همواره کمتر از ۲/۸ است.

n	$a_n = (۱ + \frac{۱}{n})^n$
۱	۲
۲	۲/۲۵
۳	....۲/۳۷۰۳۷۰
۴	۲/۴۴۱۴۰۶۲۵
۱۰	....۲/۵۹۳۷۴۲۴۶
۱۰۰	....۲/۷۰۴۸۱۳۸۲۹
۱۰۰۰	....۲/۷۱۶۹۲۳۹۳۲
۱۰۰۰۰	....۲/۷۱۸۱۴۵۹۲۷
۱۰۰۰۰۰	....۲/۷۱۸۲۶۸۲۳۷
۱۰۰۰۰۰۰	....۲/۷۱۸۲۸۰۴۶۹

در ادامه ثابت می کنیم که دنباله ی $a_n = (۱ + \frac{۱}{n})^n$ همگرا است و اگر حد آن را عدد e بنامیم، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} (۱ + \frac{۱}{n})^n = e$$

عدد حقیقی e مانند π عددی گنگ است و بسط اعشاری آن تا چند رقم اعشار عبارت است از $e = ۲/۷۱۸۲۸۱....$

این عدد به صورت طبیعی در بیشتر پدیده های خلقت از جمله در فرایند های رشد و زوال ظاهر می شود.

نکته : لگاریتمی که پایه ی آن عدد e باشد را لگاریتم طبیعی می نامند و به شکل زیر نمایش می دهند.

$$\log_e^x = L_n\, x$$

نکته : همانطور که گفته شد.

$$\lim_{n\to\infty} (۱+\frac{۱}{n})^n = e$$

عدد e را عدد نپر می نامند و به افتخار لئونارد اویلر از حرف اول نام اویلر (Euler) اقتباس شده است[1].

قضیه : دنباله ی $\{b_n\}$ با ضابطه ی $b_n = (۱-\frac{۱}{n})^n$ صعودی است.

اثبات : ابتدا چند جمله از این دنباله را می نویسیم.

$$b_n : ۰ \text{ و } \frac{۱}{۴} \text{ و } \frac{۸}{۲۷} \text{ و } \frac{۸۱}{۲۵۶} \text{ و } \dots$$

ثابت می کنیم برای هر n داریم $\frac{b_{n+۱}}{b_n} > ۱$

$$\frac{b_{n+۱}}{b_n} = \frac{(۱-\frac{۱}{n+۱})^{n+۱}}{(۱-\frac{۱}{n})^n} = \frac{(۱-\frac{۱}{n+۱})^{n+۱}}{(۱-\frac{۱}{n})^{n+۱}} \times (۱-\frac{۱}{n}) = (\frac{\frac{n}{n+۱}}{\frac{n-۱}{n}})^{n+۱} \times (۱-\frac{۱}{n})$$

$$= (\frac{n^۲}{n^۲-۱})^{n+۱} \times (۱-\frac{۱}{n}) = (۱+\frac{۱}{n^۲-۱})^{n+۱} \times (۱-\frac{۱}{n}) > (۱+(n+۱)\times\frac{۱}{n^۲-۱}) \times (۱-\frac{۱}{n}) \quad *$$

$$= (۱+\frac{۱}{n-۱}) \times (۱-\frac{۱}{n}) = \frac{n}{n-۱} \times \frac{n-۱}{n} = ۱ \to \frac{b_{n+۱}}{b_n} > ۱$$

لذا دنباله ی $b_n = (۱-\frac{۱}{n})^n$ صعودی است.

توجه : در قسمت * از نامساوی برنولی استفاده شده است. این نامساوی[2] عبارت است از

$$\forall a \geq -۱ : (۱+a)^n \geq ۱+na$$

---

[1]. به طوری کلی می توان نوشت. $\lim_{n\to\infty} (۱+\frac{a}{n})^{bn} = e^{ab}$

[2]. اثبات این نامساوی در جبر و احتمال است.

قضیه : دنباله ی $\{a_n\}$ با ضابطه ی $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ صعودی است.

اثبات : ثابت می کنیم که برای هر n داریم $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}} \times (1+\frac{1}{n}) = (\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}})^{n+1} \times (1+\frac{1}{n})$$

$$= (\frac{n^2+2n}{(n^2+1)^2})^{n+1} \times (1+\frac{1}{n}) = (1-\frac{1}{(n^2+1)^2})^{n+1} \times (1+\frac{1}{n}) > (1-(n+1)\times\frac{1}{(n^2+1)^2}) \times (1-\frac{1}{n})$$

$$= (1-\frac{1}{n+1}) \times (1+\frac{1}{n}) = \frac{n}{n+1} \times \frac{n+1}{n} = 1 \to \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

قضیه : دنباله ی $\{a_n\}$ با ضابطه ی $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ کراندار است.

اثبات : طبق قضیه ای که پیشتر از این داشتیم. می دانیم که دنباله ی $b_n = (1-\frac{1}{n})^n$ صعودی و $b_2 = \frac{1}{4}$ است. بنـابر این:

$$\forall n > 2 : \frac{1}{4} < b_n \xrightarrow{\times a_n} \frac{1}{4} a_n < a_n b_n$$

از طرفی

$$a_n b_n = (1+\frac{1}{n})^n (1-\frac{1}{n})^n = (1-\frac{1}{n^2})^n < 1$$

پس :

$$\frac{1}{4} a_n < a_n b_n < 1 \to \frac{1}{4} a_n < 1 \to a_n < 4$$

یعنی دنباله ی $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ از بالا کراندار است.

نتیجه : دنباله ی $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ صعودی و از بالاکراندار است، لذا همگرا می باشد.

تمرین : مثال ص ٤٩

تمرین : حد دنباله ی $a_n = (١+\frac{١}{n})^{٢n}$ را به دست آورید.

حل :

$$a_n = (١+\frac{١}{n})^{٢n} = ((١+\frac{١}{n})^{n})^{٢} = e^{٢}$$

تمرین برای حل :

١ : حد دنباله های زیر را به دست آورید.

الف) $\{(١+\frac{١}{n})^{٣n}\}$ ب) $\{(١+\frac{١}{n})^{\frac{n}{٢}}\}$ ج) $\{(١+\frac{١}{n})^{\frac{٣n}{٢}}\}$

٢ : دنباله ای بنویسید که به $\sqrt[٣]{e}$ همگرا باشد.

***

اعمال اصلی روی دنباله ها

با استفاده از دو دنباله ی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ و چهار عمل اصلی می توان دنباله های جدیدی ساخت.این دنباله ها به شکل زیر هستند.

جمع دو دنباله	$\{a_n + b_n\}$	تفریق دو دنباله	$\{a_n - b_n\}$
ضرب دو دنباله	$\{a_n b_n\}$	تقسیم دو دنباله	$\{\frac{a_n}{b_n}\}, b_n \neq ۰$

تمرین: اگر $a_n = \frac{n}{n+۱}$ و $b_n = \frac{n(-۱)^n}{n+۱}$ دنباله ی حاصل جمع دو دنباله را به دست آورید.

قضیه: اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله ی همگرا باشند و c یک عدد حقیقی در نظر گرفته شود. در این صورت داریم:

۱) $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$

یعنی هر دنباله ی ثابت همگرا است.

۲) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

یعنی مجموع هر دو دنباله ی همگرا، همگرا است.

۲) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

یعنی تفاضل هر دو دنباله ی همگرا، همگرا است.

۴) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)(\lim\limits_{n\to\infty} b_n)$

یعنی حاصل ضرب هر دو دنباله ی همگرا، همگرا است.

۵) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}, \lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq ۰$

یعنی خارج قسمت هر دو دنباله ی همگرا، همگرا است. به شرط اینکه دنباله ی مخرج همگرا به صفر نباشد.

***

نتیجه:

۱) $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

۲) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^k = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)^k$

۳) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$ اگر k زوج باشد، باید $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq ۰$

تمرین: هر یک از موارد زیر را ثابت کنید.

۱) $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

۲) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

حل:

۱) فرض می کنیم که دنباله ی $\{a_n\}$ همگرا به L باشد. ثابت می کنیم که دنباله ی $\{ca_n\}$ همگرا به cL است.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \to (\forall \varepsilon > ۰\ \exists M \in N, n \geq M \to |a_n - L| < \varepsilon)$$

$$\xrightarrow{\varepsilon = \frac{\varepsilon_۱}{|c|}} |a_n - L| < \frac{\varepsilon_۱}{|c|} \to |c||a_n - L| < \varepsilon_۱ \to |ca_n - cL| < \varepsilon_۱$$

$$\xrightarrow{\forall \varepsilon_۱ > ۰\ \exists M \in N, n \geq M} \lim_{n\to\infty} ca_n = cL$$

۲) گیریم که $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_۱$ و $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_۲$ پس داریم.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L_۱ \xrightarrow{\forall \varepsilon_۱ > ۰\ \exists M_۱ \in N, n \geq M_۱} |a_n - L_۱| < \varepsilon_۱$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L_۲ \xrightarrow{\forall \varepsilon_۲ > ۰\ \exists M_۲ \in N, n \geq M_۲} |b_n - L_۲| < \varepsilon_۲$$

اگر قرار دهیم $M = \max\{M_۱, M_۲\}$ و $\varepsilon_۱ = \varepsilon_۲ = \frac{\varepsilon}{۲}$ لذا به ازای $n \geq M$ هر دو نامساوی اخیر برقرار است.پس

$$|(a_n + b_n) - (L_۱ + L_۲)| = |(a_n - L_۱) + (b_n - L_۲)| \leq |a_n - L_۱| + |b_n - L_۲|$$
$$< \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = L_۱ + L_۲$$

تمرین : به کمک تمرین قبل ثابت کنید که :

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

تمرین: ثابت کنید که دنباله ی $\{1-\cos\frac{2}{n}\}$ همگرا است.

حل:

$$\lim_{n\to\infty}(1-\cos\frac{2}{n}) = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty}\cos\frac{2}{n} = 1-\cos\frac{2}{\infty} = 1-\cos 0 = 1-1 = 0$$

تمرین: ثابت کنید که دنباله ی $\{\sqrt[n]{2^n+3^n}\}$ به ۳ همگرا است.

حل:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n(\frac{2^n}{3^n}+1)} = \lim_{n\to\infty} 3\ \sqrt[n]{(\frac{2}{3})^n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 3\times\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\frac{2}{3})^n+1} = 3\times\sqrt[n]{\lim_{n\to\infty}[(\frac{2}{3})^n+1]} = 3\times\sqrt[n]{0+1} = 3\times 1 = 3$$

تمرین: ثابت کنید که دنباله ی $\{[2+\frac{(-1)^n}{n^2+1}]\}$ واگرا است.

حل:

اگر n زوج باشد.

$$\lim_{n\to\infty}[2+\frac{(-1)^n}{n^2+1}] = \lim_{n\to\infty}[2+\frac{1}{n^2+1}] = \lim_{n\to\infty}(2+[\frac{1}{n^2+1}]) = 2+[0^+] = 2+0 = 2$$

اگر n فرد باشد.

$$\lim_{n\to\infty}[2+\frac{(-1)^n}{n^2+1}] = \lim_{n\to\infty}[2+\frac{-1}{n^2+1}] = \lim_{n\to\infty}(2+[\frac{-1}{n^2+1}]) = 2+[0^-] = 2+(-1) = 1$$

پس دنباله ی داده شده واگرا است.

***

قضیه ی فشار در دنباله ها : فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ و $\{c_n\}$ سه دنباله و $a_n \le c_n \le b_n$ باشد. اگر دنباله های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ به L همگرا باشند.آنگاه $\{c_n\}$ نیز به L همگرا است.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L \Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = L$$

اثبات :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \xrightarrow{\forall \varepsilon_1 > 0\ \exists M_1 \in N, n \ge M_1} |a_n - L| < \varepsilon_1$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L \xrightarrow{\forall \varepsilon_2 > 0\ \exists M_2 \in N, n \ge M_2} |b_n - L| < \varepsilon_2$$

قرار می دهیم $M = Max\{M_1, M_2\}$ و $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$. پس برای هر $n \ge M$ خواهیم داشت:

$$|a_n - L| < \varepsilon_1 \to |a_n - L| < \varepsilon \to L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$$

$$|b_n - L| < \varepsilon_2 \to |b_n - L| < \varepsilon \to L - \varepsilon < b_n < L + \varepsilon$$

و چون $a_n \le c_n \le b_n$. پس :

$$L - \varepsilon < a_n \le c_n \le b_n < L + \varepsilon \to L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon \to |c_n - L| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = L$$

تمرین: ثابت کنید که دنباله ی $\{\frac{\sin n}{n}\}$ همگرا به صفر است.

حل:

$$-1 \le \sin n \le 1 \xrightarrow{n \in N \to \frac{1}{n} > 0} \frac{-1}{n} \le \frac{\sin n}{n} \le \frac{1}{n}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{n\to\infty} (\frac{-1}{n}) = 0 \\ \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n}) = 0 \end{array}\right\} \to \lim_{n\to\infty} (\frac{\sin n}{n}) = 0$$

تمرین: با استفاده از قضیه ی فشار ثابت کنید که دنباله ی $\{(-1)^n \frac{1}{n}\}$ همگرا به صفر است.

حل: واضح است که $(-1)^n$ مساوی ۱ یا ۱- می شود. پس:

$$-۱ \leq (-۱)^n \leq ۱ \xrightarrow{n\in N \rightarrow \frac{۱}{n}>۰} \frac{-۱}{n} \leq \frac{(-۱)^n}{n} \leq \frac{۱}{n}$$

و چون $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{۱}{n}) = ۰$ و $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{-۱}{n}) = ۰$ پس طبق قضیه ی فشار داریم. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-۱)^n}{n} = ۰$

***

تمرین: ثابت کنید که $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n!}{n^n}) = ۰$

حل: گیریم که $a_n = \frac{n!}{n^n}$ پس:

$$۰ < a_n = \frac{۱}{n} \times \frac{۲\times۳\times۴\times...\times n}{n\times n\times n\times...\times n} \leq \frac{۱}{n} \rightarrow ۰ < a_n \leq \frac{۱}{n}$$

و چون $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{۱}{n}) = ۰$ و $\lim\limits_{n\to\infty} ۰ = ۰$ پس طبق قضیه ی فشار داریم. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = ۰$

***

قضیه : برای هر عدد حقیقی مانند r ،

الف: وجود دارد یک دنباله از اعداد گویا که به r همگرا است.

ب: وجود دارد یک دنباله از اعداد اصم که به r همگرا است.

اثبات :

الف: اگر $n\in N$. چون بین هر دو عدد حقیقی یک عدد گویا وجود دارد، پس بین دو عدد حقیقـی r و $r-\frac{۱}{n}$ همـواره یک عدد گویا قرار دارد. برای n های طبیعی مختلف ، قرار می دهیم $r-\frac{۱}{n} < a_n < r$. حال می توان نوشت.

$$\lim_{n\to\infty} (r-\frac{۱}{n}) = \lim_{n\to\infty} r = r$$

پس طبق قضیه ی فشار $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = r$. یعنی دنباله ی a_n همگرا به r است.

ب: اگر $n \in N$. چون بین هر دو عدد حقیقی یک عدد گنگ وجود دارد، پس بین دو عدد حقیقی r و $r-\frac{۱}{n}$ همواره یک عدد گنگ قرار دارد. برای n های طبیعی مختلف ، قرار می دهیم $r-\frac{۱}{n} < b_n < r$. حال می توان نوشت.

$$\lim_{n\to\infty}(r-\frac{۱}{n}) = \lim_{n\to\infty} r = r$$

پس طبق قضیه ی فشار $\lim_{n\to\infty} b_n = r$. یعنی دنباله ی b_n همگرا به r است.

توجه : بین هر دو عدد گویا مانند $x=\frac{a}{b}$ و $y=\frac{c}{d}$ اگر $x<y$ می توان دنباله ای از اعداد حقیقی نوشت. این دنباله می تواند به شکل زیر باشد.

$$a_n = \frac{a}{b} + \frac{۱}{bdn}$$

یا

$$a_n = \frac{c}{d} - \frac{۱}{bdn}$$

تمرین :

۱ : ده عدد گویا معرفی کنید که بین دو عدد $\frac{۱}{۱۰}$ و $\frac{۱}{۱۱}$ واقع باشند.

۲ : دنباله ای از اعداد گویا بسازید که جملات آن بین دو عدد ۳ و۴ واقع باشند.

حل : $a_n = ۳ + \frac{۱}{۲n}$

۳ : دنباله ای از اعداد گنگ بسازید که جملات آن بین دو عدد ۳ و۴ واقع باشند.

حل : $a_n = ۳ + \frac{۱}{۲n}(\sqrt{۲})$

۴ : دنباله ای از اعداد گویا بسازید که جملات آن بین دو عدد $\frac{۱}{۱۰}$ و $\frac{۱}{۱۱}$ واقع باشند.

$$a_n = \frac{۱}{۱۱} + \frac{۱}{۱۱۰n}$$

قضیه : هر عدد حقیقی دنباله ای از اعداد گویا است.

اثبات : فرض کنیم که u عدد حقیقی دلخواهی باشد. پس دو حالت زیر وجود دارد.

حالت اول : u عددی گویا است. قرار می دهیم $u_n = u$ (برای هر $n \in N$) پس $\{u_n\}$ دنباله ای ثابت و متـشکل از اعداد گویای u بوده و معلوم است که

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u$$

حالت دوم ک: u عددی گنگ است.. بسط اعشاری u را در نظر می گیریم.

$$u = u_۰ / u_۱ u_۲ u_۳ \ldots u_n \ldots$$

که در آن $u_۰$ جزء صحیح u بوده و عددی صحیح است. چون u گنگ است، بسط اعشاری u نامتناهی و البتـه نـامنظم می باشد. قرار می دهیم.

$$r_۱ = u_۰ / u_۱$$

$$r_۲ = u_۰ / u_۱ u_۲$$

$$r_۳ = u_۰ / u_۱ u_۲ u_۳$$

....

$$r_n = u_۰ / u_۱ u_۲ u_۳ \ldots u_n$$

لذا هر r_n چون بسط اعشاری مختوم دارد، پس عددی گویا است. بعلاوه

$$۰ < u - r_n = ۰/\underbrace{۰۰\ldots۰}_{n \text{ تا}} u_{n+۱} u_{n+۲} \ldots\ldots$$

در نتیجه

$$۱۰^n | u - r_n | = ۰ / u_{n+۱} u_{n+۲} \ldots u_{n+k} \ldots < ۱$$

و یا

$$۰ < | u - r_n | < \frac{۱}{۱۰^n}$$

چون $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{۱}{۱۰^n}$ ، به ازای عدد دلخواه $\varepsilon > ۰$ وجود دارد عدد طبیعی N که برای هر $n \geq N$ داریـم. $\frac{۱}{۱۰^n} < \varepsilon$ در

نتیجه برای هر n که $n \geq N$ ، $|u - r_n| < \frac{۱}{۱۰^n} < \varepsilon$ یعنی $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = u$

توجه : یکی از کاربرد های قضیه ی فوق ، استفاده از آن برای تعریف توان اعداد به نمـای گنـگ اسـت. فـرض کنـیم a عددی مثبت و x عددی گنگ باشد. بنابر این قضیه دنباله ای مانند $\{x_n\}$ از اعداد گویـا هـست کـه $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = x$ ،

اینک توان a^x را چنین تعریف می کنیم.

$$a^x = \lim_{x\to\infty} a^{x_n}$$

چون توان اعداد گویا تعریف شده است، a^x (a به نمای عدد گنگ) تعریف شده است. قواعد آشنای توان که برای اعـداد گویا برقرار است به توان های گنگ نیز منتقل می شود. فرض کنیم x و y دو عدد گنگ باشند، دنبالـه ای از اعـداد گویـا مانند $\{y_n\}$ هست که $\lim\limits_{x\to\infty} y_n = y$ بنابر این:

$$a^x.a^y = (\lim_{n\to\infty} a^{x_n})(\lim_{n\to\infty} a^{y_n}) = \lim_{n\to\infty} a^{x_n} a^{y_n}$$

چون x_n و y_n گویا هستند . پس

$$a^x.a^y = \lim_{n\to\infty} a^{x_n} a^{y_n} = \lim_{n\to\infty} a^{x_n + y_n}$$
$$= a^{\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n)} = a^{\lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n} = a^{x+y}$$

***

تمرین برای حل :

۱ : دنباله ای بنویسید که به ۵ همگرا باشد.

۲ : دو دنباله بنویسید که به $\frac{۱}{۲}$ همگرا باشند.

۳ : دو دنباله ای بنویسید که به $\sqrt{۳}$ همگرا باشد.

۴ : دو دنباله بنویسید که کراندار باشند ولی همگرا نباشند.

۵ : دنباله ای مثلثاتی بنویسید که همگرا به صفر باشد.

۶ : دو دنباله بنویسید که هر دو واگرا باشند، ولی دنباله ی مجموع آنها همگرا باشد.

۷ : جدول زیر را با بیان دلیل کامل کنید.

ردیف	دنباله	از بالا کراندار	از پایین کراندار	کراندار	صعودی	نزولی	همگرا	واگرا
۱	$\{\frac{۵n^۲}{n^۲+۱}\}$							
۲	$\{\frac{۲n}{n^۲+۱}\}$							
۳	$\{۴+\frac{(-۱)^n}{n}\}$	بله	بله	بله	خیر	خیر	بله	خیر
۴	$\{\sin\frac{۱}{n}\}$							
۵	$\{\frac{n^۲-۱}{n}\}$							
۶	$\{\frac{\cos n}{n}\}$							
۷	$\{n\cos\frac{n\pi}{۲}\}$							
۸	$\{n\sin\frac{n\pi}{۲}\}$							
۹	$\{n\cos\frac{(-۱)^n}{n}\}$							
۱۰	$\{(\frac{n+۱}{n})^n\}$							
۱۱	$\{(-۱)^n\frac{n+۱}{n}\}$							
۱۲	$\{\frac{n}{\sqrt{n+۱}}\}$							

حساب دیفرانسیل و انتگرال

فصل دوم : حد و پیوستگی

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی دبیرستان های اهواز و باوی

مفهوم حد

در کتاب حسابان با مفهوم حد آشنا شده اید، می دانیم که در این بحث ، با نزدیک شدن مقادیر x (در دامنه ی تابع f) به نقطه ای مانند a ، رفتار مقادیر $f(x)$ مد نظر است. اینکه این مقادیر به عدد ثابتی نزدیک می شوند یا نه و همچنین رفتار بیکران دارند یا خیر ، وجود یا عدم وجود حد تابع در آن نقطه معلوم می شود. در اینجا ضمن یادآوری، این مفهوم را دقیق تر و عمیق تر بررسی می کنیم. ابتدا به مثال زیر توجه کنید.

مثال : رفتار تابع $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ را در اطراف عدد $x=۰$ بررسی کنید. (x بر حسب رادیان)

تابع f در $x=۰$ تعریف نشده است. دو دنباله ی $\{(۰/۱)^n\}$ و $\{-(۰/۱)^n\}$ را در نظر می گیریم که هر دو به صفر همگرا هستند. یکی با مقادیر بزرگتر از صفر و دیگری با مقادیر کوچکتر از صفر ، یعنی از دو طرف به صفر همگرا هستند. سپس جدول زیر را تشکیل می دهیم.

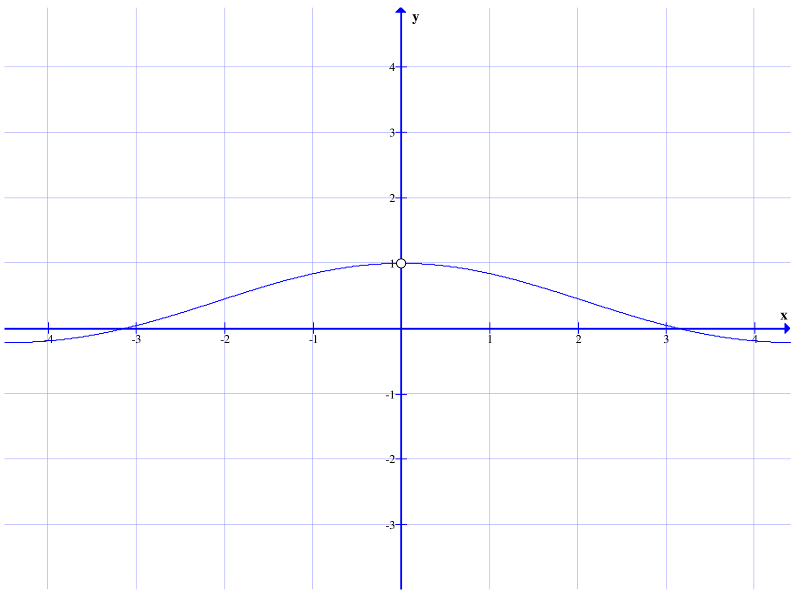
	متغیر x از سمت چپ به صفر میل می کند.					متغیر x از سمت راست به صفر میل می کند.			
x	۰/۱-	۰/۰۱-	۰/۰۰۱-	....	۰	....	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
$f(x)$	۰/۹۹۸۳	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹۹	$\rightarrow$	?	$\leftarrow$	۰/۹۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۸۳

مشاهده می شود که وقتی x در دامنه ی f به عدد صفر نزدیک می شود، مقادیر $f(x)$ به عدد یک نزدیک مـی شـوند.

در این صورت می نویسند.

$$\lim_{x\to ۰} f(x)=۱$$

نمودار زیر، این مطلب را نیز تأیید می کند.



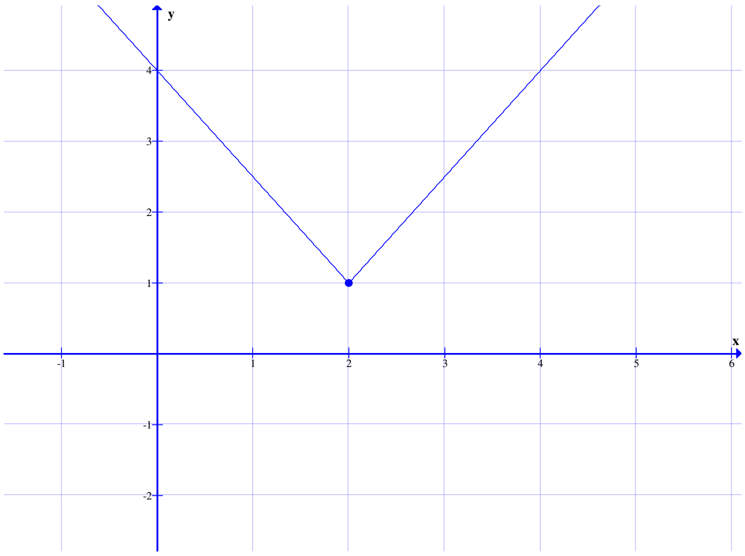
برای یک تابع مانند f ، اگر مقادیر متغیر x در دامنه ی f به عددی مانند a میل کنند و نتیجه شود که مقادیر $f(x)$ به عددی منحصر بفردی مانند L میل می کنند. در این صورت گوییم، تابع f در نقطه ی a حد دارد و می نویسیم:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

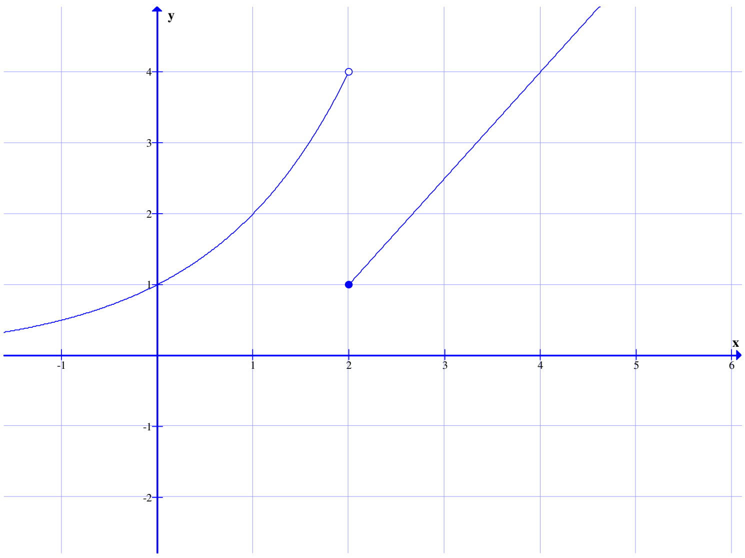
و می خوانیم : « حد $f(x)$ وقتی x به a میل می کند، برابر L است. »

تمرین : با توجه به نمودار های زیر تعیین کنید که کدام تابع در $x = ۲$ حد دارد.

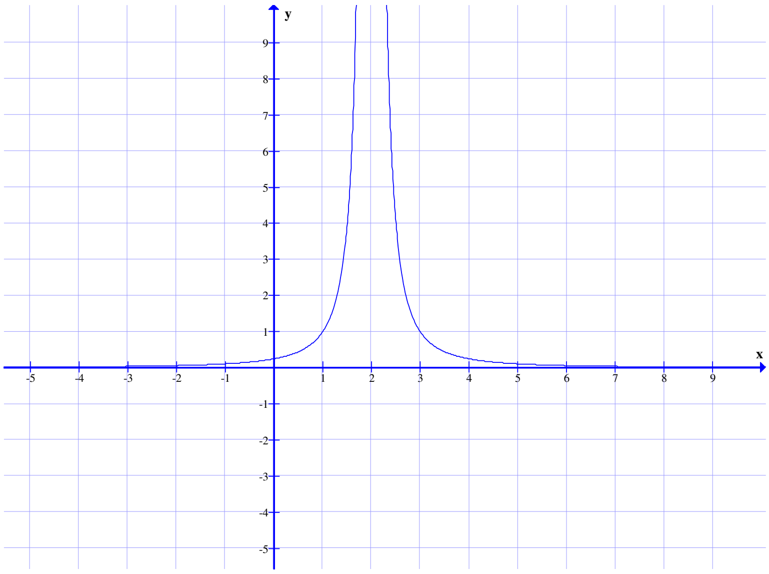
الف :



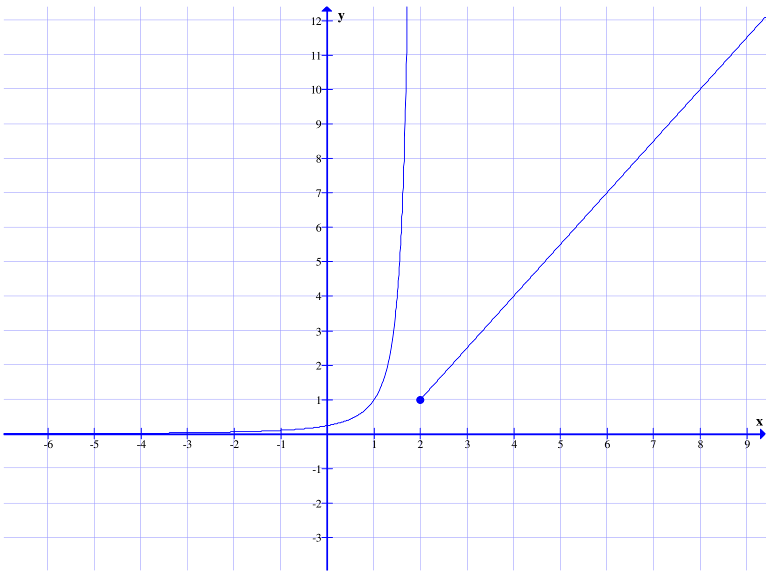
ب :



ج :



د :



توجه ۱ : وقتی می گوییم «x به a میل می کند» $x \neq a$ می باشد و اختلاف x و a کوچک و کوچکتر می شود و فرض بر این است که تابع f در یک همسایگی چپ یا راست (یا هر دو) نقطه ی a تعریف شده باشد.

توجه ۲ : مجدداً تأکید می شود که حد تابع در یک نقطه در صورت وجود[1] منحصر بفرد است و یک تابع در یک نقطه نمی تواند حد های متعدد داشته باشد.

[1] . منظور از درصورت وجود یعنی اینکه عدد ثابتی باشد و بی نهایت نباشد.

توجه ۳ : یکی از روش های معمول محاسبه ی حد تابع وقتی معادله ی آن داده شده باشد، جایگزینی مستقیم می باشد[۲]، برای مثال برای محاسبه ی حد تابع $f(x)=\sqrt{x+۱}$ وقتی x به سمت ۳ میل می کند.می توان به شکل زیر عمل کرد.

$$\lim_{x\to ۳} f(x)=\lim_{x\to ۳}\sqrt{x+۱}=\sqrt{۳+۱}=۲$$

تمرین : حد های زیر را محاسبه کنید.

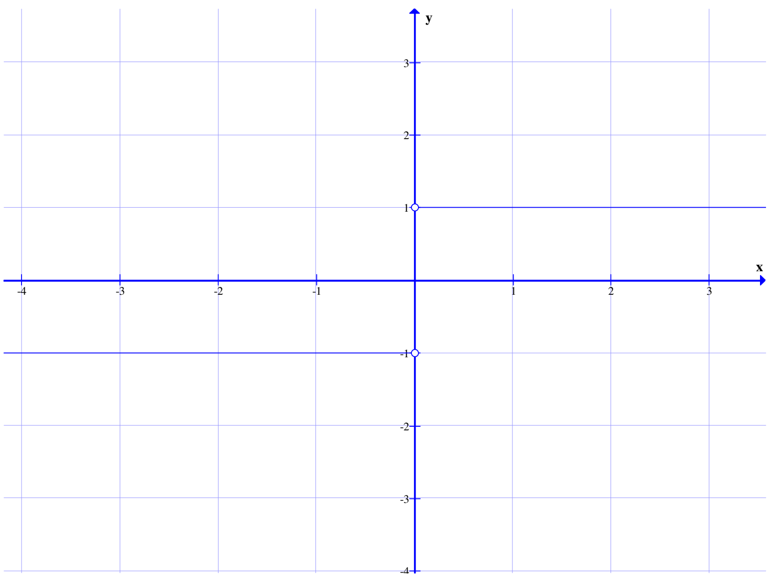
الف) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{x^{۲}-۳x+۷}{x+۲}=$ ب) $\lim\limits_{x\to ۰} ۲\sin x+۳\cos x+۵=$

❋❋❋

حد راست و حد چپ

گاهی برای بررسی رفتار تابع هایی مانند تابع $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ در اطراف عدد صفر ، لازم است، رفتار تابع را در طرف راست و چپ مشاهده کنیم. برای تابع $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ عدد $x=۰$ عضو دامنه نیست، ولی دو دنباله ی $\{(۰/۱)^{n}\}$ و $\{-(۰/۱)^{n}\}$ از اعضای دامنه ی f را در نظر می گیریم که هر دو به صفر همگرا هستند.[۳] حال بررسی می کنیم که $f(x)$ ها چگونه اند؟ این بررسی را با نمودار و جدول انجام می دهیم.

الف : نمودار



[۲] . مگر اینکه یکی از حالت های به اصطلاح مبهم پیش بیاید. این حالت ها را نیز در ادامه توضیح خواهیم داد.

[۳] . یکی با مقادیر بزرگتر از صفر و دیگری با مقادیر کوچکتر از صفر ، یعنی از دو طرف به صفر همگرا هستند.

ب : جدول

	متغیر x از سمت چپ به صفر میل می کند.					متغیر x از سمت راست به صفر میل می کند.			
x	−۰/۱	−۰/۰۱	−۰/۰۰۱	....	۰	....	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
$f(x)$	−۱	−۱	−۱	$\rightarrow$	?	$\leftarrow$	۱	۱	۱

با توجه به جدول بالا و نمودار تابع نتیجه می شود :

۱ : وقتی متغیر x با مقادیر بزرگتر از صفر به عدد صفر میل می کند، آنگاه مقادیر $f(x)$ به ۱ میل می کند.

۲ : وقتی متغیر x با مقادیر کوچکتر از صفر به عدد صفر میل می کند، آنگاه مقادیر $f(x)$ به ۱− میل می کند.

نتیجه : توابعی مانند $f(x)=\frac{|x|}{x}$ وجود دارند که با میل کردن متغیر x (در دامنه ی f) به عددی مانند a ، مقـادیر f به یک عدد معینی میل نمی کنند، بلکه به دو عدد متفاوت میل می کنند. در این صورت گوییم این گونه توابع در آن نقطـه حد ندارند.

تعریف حد راست :

در یک تابع مانند f ، اگر متغیر x (در دامنه ی f) با مقادیر بزرگتر از عددی مانند a به a نزدیک شوند و مقادیر $f(x)$ به عددی مانند $L_۱$ نزدیک شوند (میل کنند)، گوییم تابع f در نقطه ی a حد راست دارد و مقدار این حد $L_۱$اسـت و مـی نویسیم :

$$\lim_{x\rightarrow a^{+}} f(x)=L_۱$$

تعریف حد چپ :

در یک تابع مانند f ، اگر متغیر x (در دامنه ی f) با مقادیر کـوچکتر از عـددیماننـد a بـه a نزدیـک شـوند و مقـادیر $f(x)$ به عددی مانند $L_۲$ نزدیک شوند(میل کنند)، گوییم تابع f در نقطه ی a حد چپ دارد و مقدار این حد $L_۲$است و می نویسیم :

$$\lim_{x\rightarrow a^{-}} f(x)=L_۲$$

نتیجه : اگر تابعی در نقطه ای حد های چپ و راست متفاوت داشته باشد، در آن نقطه حد ندارد، اما اگر حدهای چپ و راست تابع در نقطه ای موجود و عددهای مساوی باشند، تابع در آن نقطه حد دارد و حد آن همان مقدار مشترک حد های چپ و راست است. در مثال قبل :

$$\lim_{x\to ۰^+} \frac{|x|}{x} = ۱$$ حد راست

$$\lim_{x\to ۰^-} \frac{|x|}{x} = -۱$$ حد چپ

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۰} \frac{|x|}{x} =$$ وجود ندارد.

توجه ۱ : وقتی می گوییم «x از سمت راست به a میل می کند» $x > a$ می باشد و اختلاف x و a کوچک و کوچکتر می شود و فرض بر این است که تابع f در یک همسایگی راست نقطه ی a تعریف شده باشد.

توجه ۲ : وقتی می گوییم «x از سمت چپ به a میل می کند» $x < a$ می باشد و اختلاف x و a کوچک و کوچکتر می شود و فرض بر این است که تابع f در یک همسایگی چپ نقطه ی a تعریف شده باشد.

قرار داد : شرط اولیه ی وجود حد تابع در نقطه ای مانند a این است که تابع حداقل در یک همسایگی چپ یا یک همسایگی راست یا یک همسایگی محذوف a (دوطرفه) تعریف شده باشد که در این صورت می توان نوشت : $x \to a$

نکته ۱: اگر در نقطه ی a ، تابع f فقط در یک همسایگی راست آن تعریف شده باشد و $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ باشد.

آنگاه گوییم تابع f در نقطه ی a حد دارد و حد آن برابر L است و می نویسیم :

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

نکته ۲: اگر در نقطه ی a ، تابع f فقط در یک همسایگی چپ آن تعریف شده باشد و $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ باشد.

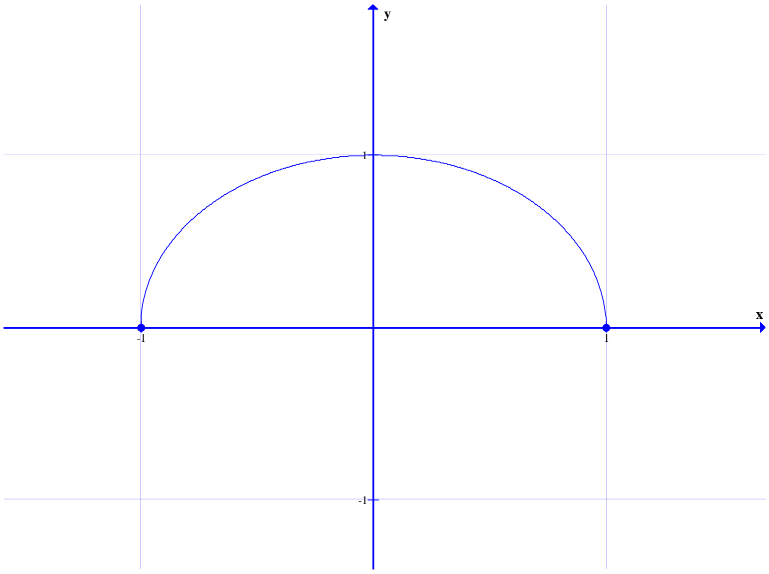
آنگاه گوییم تابع f در نقطه ی a حد دارد و حد آن برابر L است و می نویسیم :

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

نکتــــه ۳: اگــر در نقطــه ی a ، تــابع f در یــک همــسایگی محــذوف a (دوطرفــه) آن تعریــف شــده باشــد و $\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=L$ باشد. آنگاه گوییم تابع f در نقطه ی a حد دارد و حـد آن برابـر L اسـت و می نویسیم :

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$

مثال : تابع $f(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ را در نظر بگیرید. نمودار آن را رسم کنید و با توجه بـه آن، وجـود حـد تـابع f در نقـاط $x=۱$ و $x=۰$ و $x=-۱$ را بررسی کنید.



$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=۰ \to \lim_{x\to ۱} f(x)=۰$$

$$\lim_{x\to (-۱)^+} f(x)=۰ \to \lim_{x\to (-۱)} f(x)=۰$$

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^-} f(x)=۱ \to \lim_{x\to ۰} f(x)=۱$$

توجه کنید که در مورد $\lim_{x\to ۱^+} f(x)$ به جهت اینکه در دامنه ی تابع تعریف نشده است. نمی توان صحبت کرد.

تمرین : دامنه ی تابع $f(x)=\dfrac{۱}{[x]-۳}$ را تعیین کرده و در مورد وجود یا عدم وجود تساوی های زیر بحث کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)=$

۲) $\lim\limits_{x\to ۴^+} f(x)=$

۳) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=$

۴) $\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)=$

۵) $\lim\limits_{x\to ۴^-} f(x)=$

***

حد هایی که وجود ندارند:

اگر تابع f در یک همسایگی محذوف a (دوطرفه) آن تعریف شده باشد و حد چپ یا حد راست تابع در نقطه ی a موجود نباشد یا هر دو عددی مساوی نباشند، گوییم تابع f در نقطه ی a حد ندارد. بر این اساس توابع را به سه دسته تبدیل می کنیم.

۱) توابعی که حد چپ و راست آنها متفاوت اند.

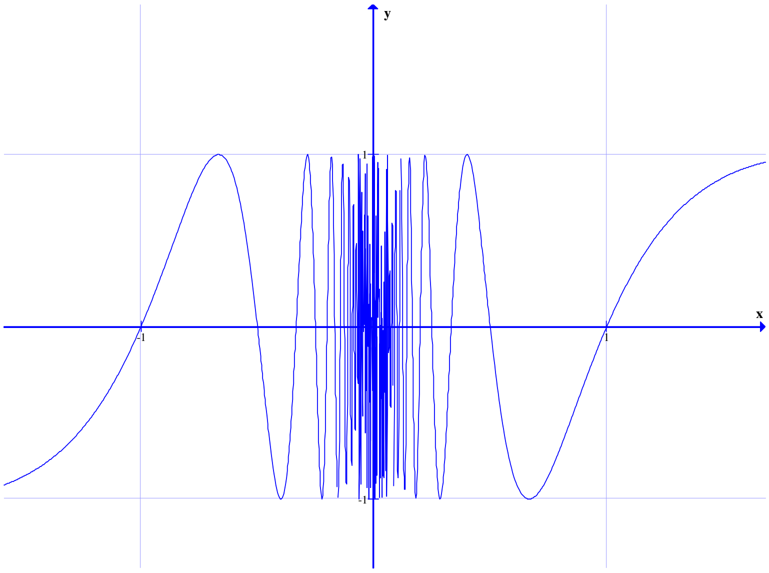
۲) توابعی که رفتار نوسانی دارند.

۳) توابعی که رفتار بی کران دارند.

دسته ی اول : تابعی مانند $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ در نقطه ی $x=۰$ حد چپ و راست متفاوت دارد. بنابر این در نقطه حد ندارد.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{|x|}{x}=۱\\ \lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{|x|}{x}=-۱\end{array}\right\}\to \lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{|x|}{x}=\text{وجود ندارد.}$$

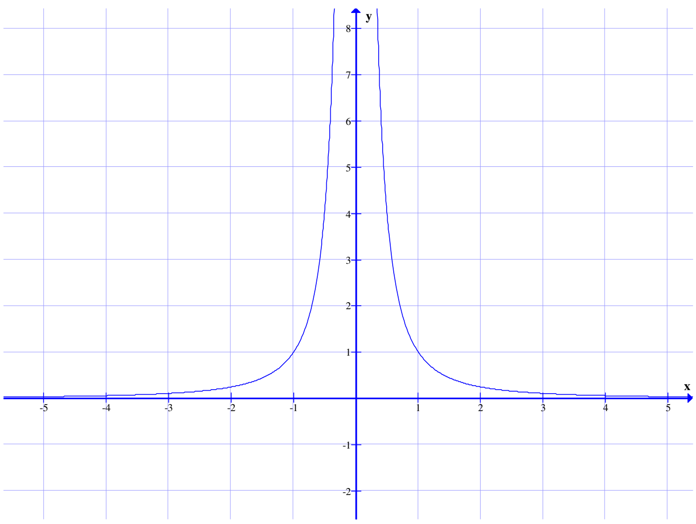
دسته ی دوم : تابعی مانند $f(x)=\sin\dfrac{\pi}{x}$ که مقادیر آن در مجاورت $x=۰$ بین دو عدد ثابت ۱ و ۱- دائماً کم و زیاد می شود. در این صورت گفته می شود تابع در مجاورت $x=۰$ رفتاری نوسانی دارد و نیز نمودار تابع به صورت موج های فشرده تری به محور y گرایش دارند. بنابراین $\lim\limits_{x\to ۰}\sin\dfrac{\pi}{x}$ وجود ندارد. « در ادامه این مطلب را ثابت می کنیم.»



دسته ی سوم : توابعی که رفتار بیکران دارند. مثلاً تابع $f(x)=\frac{۱}{x^{۲}}$ که در اطراف $x=۰$ رفتار بیکران دارد. جدول و نمودار زیر نشان می دهند که وقتی متغیر x (در دامنه ی f) به عدد صفر نزدیک می شود، مقادیر $f(x)$ با مقادیر مثبت دلخواه بزرگ و بزرگتر می شوند. به عبارتی دیگر $f(x)$ بی کران و با مقادیر مثبت افزایش می یابد که در اصطلاح می گوییم تابع f در نقطه ی $x=۰$ دارای **حد نامتناهی** یا **بیکران** است و از نماد زیر استفاده می کنیم.

$$\lim_{x\to ۰} f(x)=+\infty$$

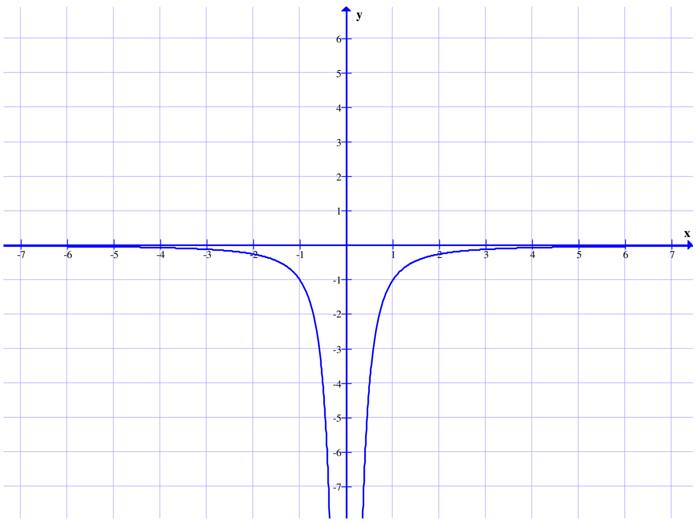
x	$-۰/۱$	$-۰/۰۱$	$-۰/۰۰۱$	....	۰	....	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
$f(x)$	۱۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰	$\rightarrow$	?	$\leftarrow$	۱۰۰۰۰۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰



بطور مشابه تابع $f(x)=-\frac{۱}{x^۲}$ که در اطرف $x=۰$ رفتار بیکران دارد. جدول و نمودار زیر نیز نشان می دهند که وقتی متغیر x (در دامنه ی f) به عدد صفر نزدیک می شود، مقادیر $f(x)$ با مقادیر مثبت دلخواه کوچک و کوچکتر می شـوند. به عبارتی دیگر $f(x)$ بی کران و با مقادیر منفی کاهش می یابد که در اصطلاح می گوییم تـابع f در نقطـه ی $x=۰$ دارای **حد نامتناهی** یا **بیکران** است و از نماد زیر استفاده می کنیم.

$$\lim_{x\to ۰} f(x)=-\infty$$

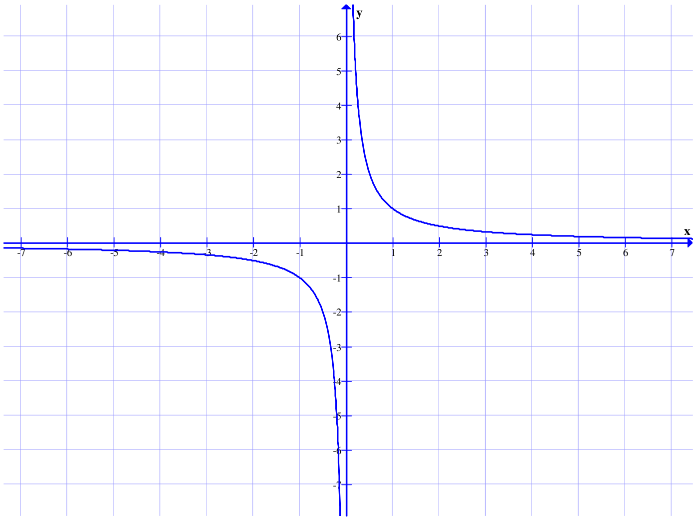
x	$-۰/۱$	$-۰/۰۱$	$-۰/۰۰۱$	....	۰	....	$۰/۰۰۱$	$۰/۰۱$	$۰/۱$
$f(x)$	-۱۰۰	-۱۰۰۰۰	-۱۰۰۰۰۰۰	$\rightarrow$	?	$\leftarrow$	-۱۰۰۰۰۰۰	-۱۰۰۰۰	-۱۰۰



همچنین تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ در سمت راست عدد صفر بزرگتر و بزرگتر و در سمت چپ این عدد کوچـک و کوچـک تـر مـی گردد. در این صورت می نویسند:

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=+\infty \quad و \quad \lim_{x\to ۰^-} f(x)=-\infty$$

x	$-۰/۱$	$-۰/۰۱$	$-۰/۰۰۱$	....	۰	....	$۰/۰۰۱$	$۰/۰۱$	$۰/۱$
$f(x)$	-۱۰	-۱۰۰	-۱۰۰۰	$\rightarrow$	?	$\leftarrow$	۱۰۰۰	۱۰۰	۱۰



توجه : در هر یک از مثال های بالا، وقتی $x \to a$ ، مقادیر $f(x)$ به عدد معینی میل نمی کنند و می گوییم حـد تـابع در این نقطه وجود ندارد.

تمرین برای حل :

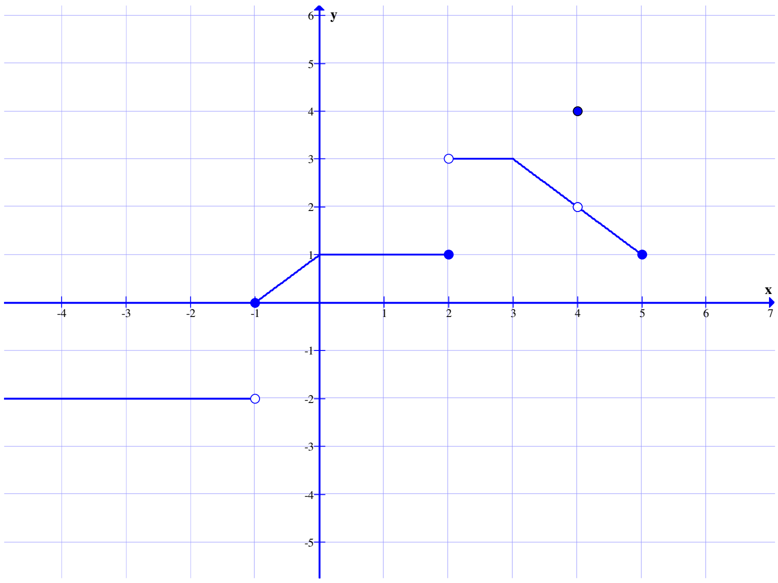
۱ : با استفاده از نمودار f که در زیر داده شده است، مقدار هر یک از عبارت های زیر را در صورت وجود مشخص کنید. اگر این مقدار وجود ندارد، توضیح دهید که چرا وجود ندارد.

الف) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

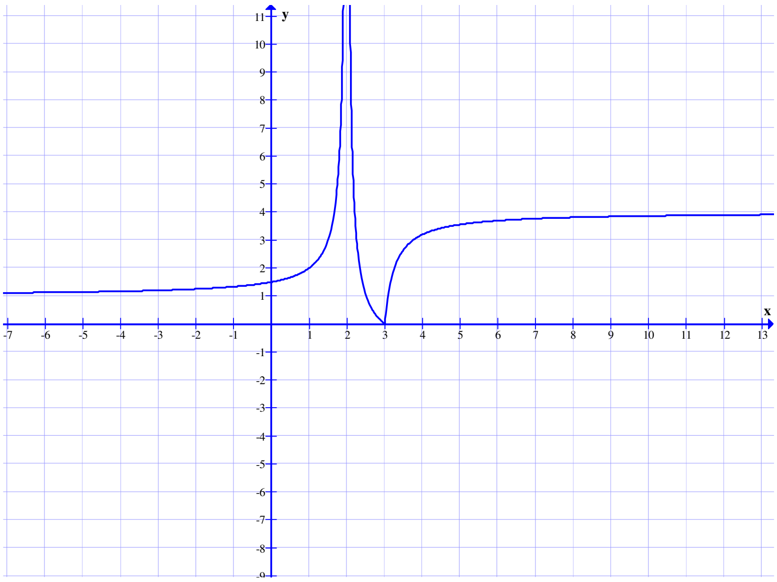
ب) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

د) $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$



۲ : نمودار تابع f در شکل زیر نشان داده شده است. حد های زیر را حدس بزنید.



الف) $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

د) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

۳ : ثابت کنید که تابع f با ضابطه ی زیر در نقطه ی صفر دارای حد نیست.

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x<۰ \\ x-۱ & x>۰ \end{cases}$$

۴ : مقدار تابع های زیر را $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^{۲}+۱}}$ و $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^{۲}+۱}}$ را در صورت وجود حدس بزنید.

❋❋❋

حل چند تمرین مهم :

۱ : حد تابع $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+۱}-۱}$ در نقطه ی $x=۰$ در صورت وجود، به دست آورید.

حل : دامنه ی این تابع به شکل زیراست.

$$x+۱\geq ۰\rightarrow x\geq -۱$$

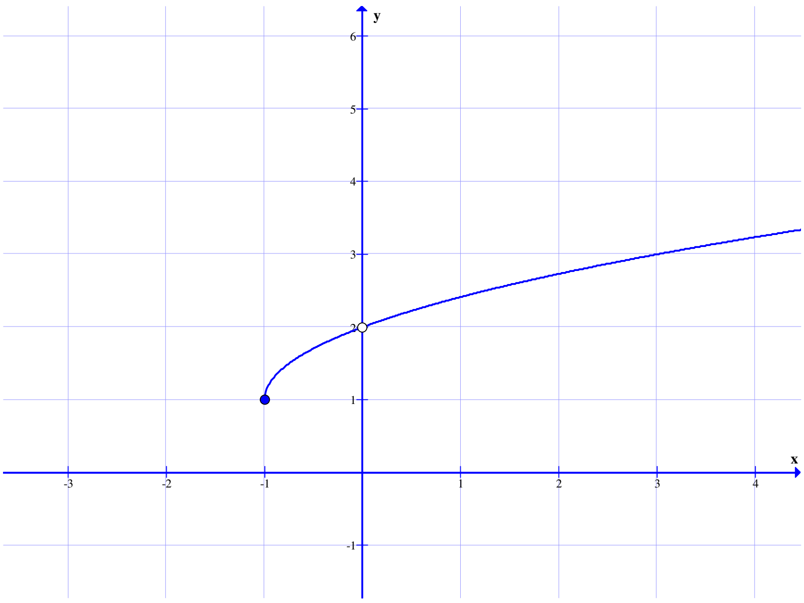
$$\sqrt{x+۱}-۱\neq ۰\rightarrow \sqrt{x+۱}\neq ۱\rightarrow x+۱\neq ۱\rightarrow x\neq ۰$$

$$\Rightarrow D_f=[-۱,\infty)-\{۰\}$$

لذا تابع در همسایگی محذوف صفر تعریف شده و می توان نوشت:

$$\lim_{x\to ۰} f(x)=\lim_{x\to ۰}\frac{x}{\sqrt{x+۱}-۱}=\lim_{x\to ۰}\frac{x}{\sqrt{x+۱}-۱}\times\frac{\sqrt{x+۱}+۱}{\sqrt{x+۱}+۱}$$
$$=\lim_{x\to ۰}\frac{x(\sqrt{x+۱}+۱)}{(x+۱)-۱}=\lim_{x\to ۰}\sqrt{x+۱}+۱=۲$$

با رسم نمودار تابع و مشاهده ی رفتار تابع در اطراف نقطه ی $x=۰$ این نتیجه نیز تأیید می شود.



$$\lim_{x\to ۰} f(x)=۲$$

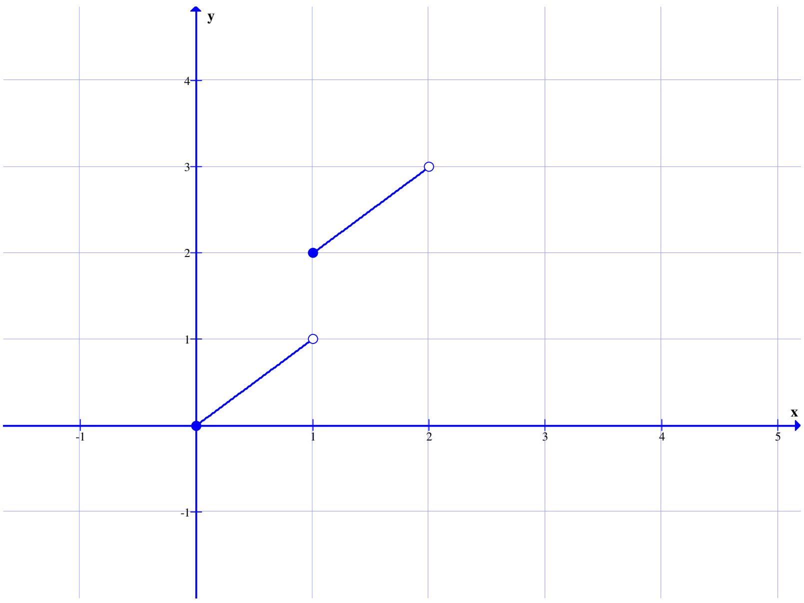
۲ : نمودار تابع $f(x)=x+[x]$ را در بازه ی $(۰,۲)$ رسم کنید و سپس حد تابع را در نقطه ی $x=۱$ در صورت وجود، به دست آورید.

حل :

$$x\in[۰,۱)\xrightarrow{[x]=۰} y=x$$

$$x\in[۱,۲)\xrightarrow{[x]=۱} y=x+۱$$

پس نمودار تابع به صورت زیر است.



$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to۱^+} f(x)=۲\\ \lim\limits_{x\to۱^-} f(x)=۱\end{array}\right\}\to \lim\limits_{x\to۱} f(x)=\text{وجود ندارد.}$$

۳ : تابع زیر به تابع هِوی ساید[۴] معروف است.

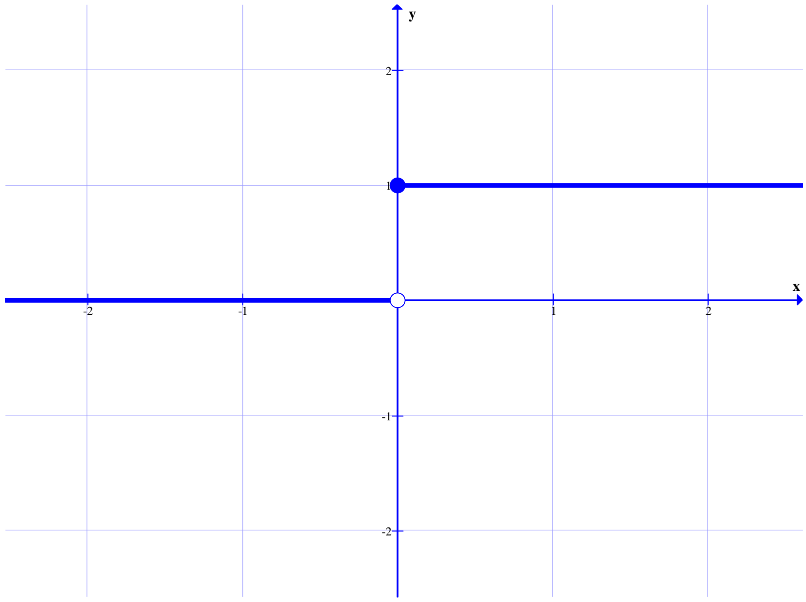
$$H(t)=\begin{cases}۱ & t\geq ۰\\ ۰ & t<۰\end{cases}$$

ابتدا نمودار تابع را رسم کنید و سپس مقادیر زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to۰^+} H(t)$ ب) $\lim\limits_{x\to۰^-} H(t)$

حل :

4 . Heaviside



$$\lim_{x\to ۰^-} H(t) = ۰ \qquad \text{و} \qquad \lim_{x\to ۰^+} H(t) = ۱$$

۴ : تابع زیر به تابع علامت[۵] موسوم است.

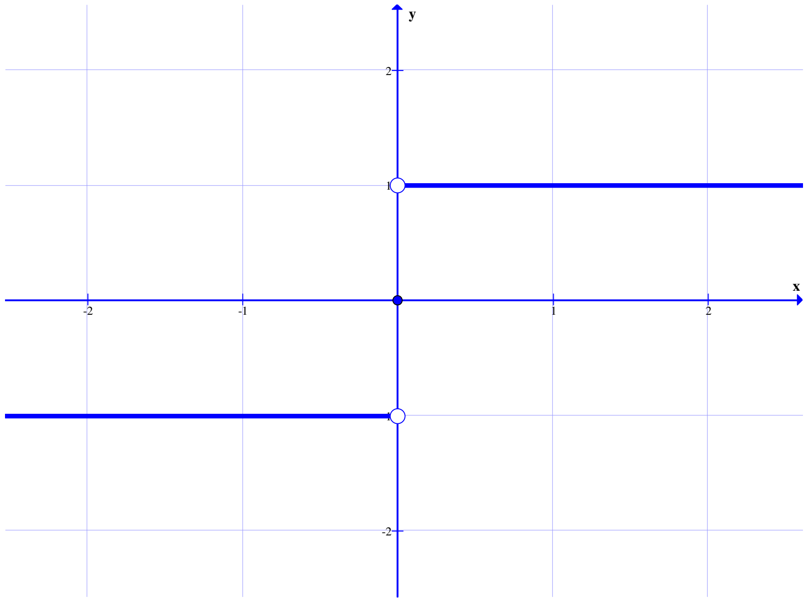
$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} ۱ & x > ۰ \\ ۰ & x = ۰ \\ -۱ & x < ۰ \end{cases}$$

ابتدا نمودار تابع را رسم کنید و سپس مقادیر زیر را در صورت وجود به دست آورید.

ب) $\lim_{x\to ۰^-} \operatorname{sgn}(x)$ الف) $\lim_{x\to ۰^+} \operatorname{sgn}(x)$

حل :

[5]. signum



الف) $\lim\limits_{x\to ۰^+} \operatorname{sgn}(x) = ۱$ ب) $\lim\limits_{x\to ۰^-} \operatorname{sgn}(x) = -۱$

۵ : نمودار تابع $f(x) = [x] + [-x]$ را رسم کنید.

الف : حد های زیر را مشخص کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)$ ب) $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)$ ج) $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$

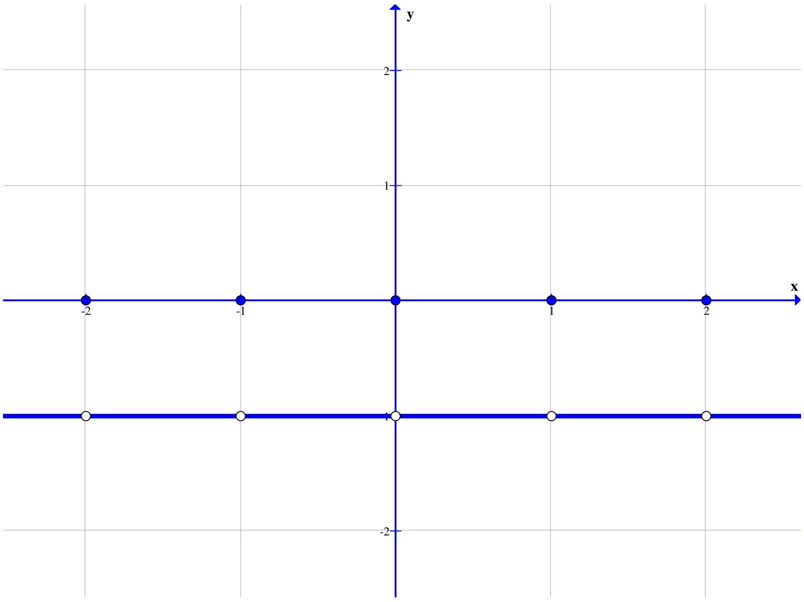
ب : آیا به ازای هر عدد حقیقی a ، می توان نوشت. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -۱$

حل : می دانیم که

اگر x عدد صحیح باشد، در این صورت $[x] + [-x] = ۰$ در نتیجه $f(x) = ۰$

اگر x عدد صحیح نباشد، در این صورت $[x] + [-x] = -۱$ در نتیجه $f(x) = -۱$

پس نمودار تابع به شکل زیر است.



الف) $\lim_{x\to ۱^-} f(x) = -۱$ ب) $\lim_{x\to ۱^+} f(x) = -۱$ ج) $\lim_{x\to ۱} f(x) = -۱$

بله : این تابع در هر نقطه از اعداد حقیقی مانند $x = a$ حدی برابر ۱- دارد.

۶ : با رسم نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{[x]}$ در بازه ی $[-۱,۱]$ ، مقدار هر یک از عبارت های زیر را در صورت وجود ، مشخص کنید.([ ] علامت جزء صحیح است.)

الف) $\lim_{x\to ۰^-} \frac{x}{[x]}$ ب) $\lim_{x\to ۰^+} \frac{x}{[x]}$

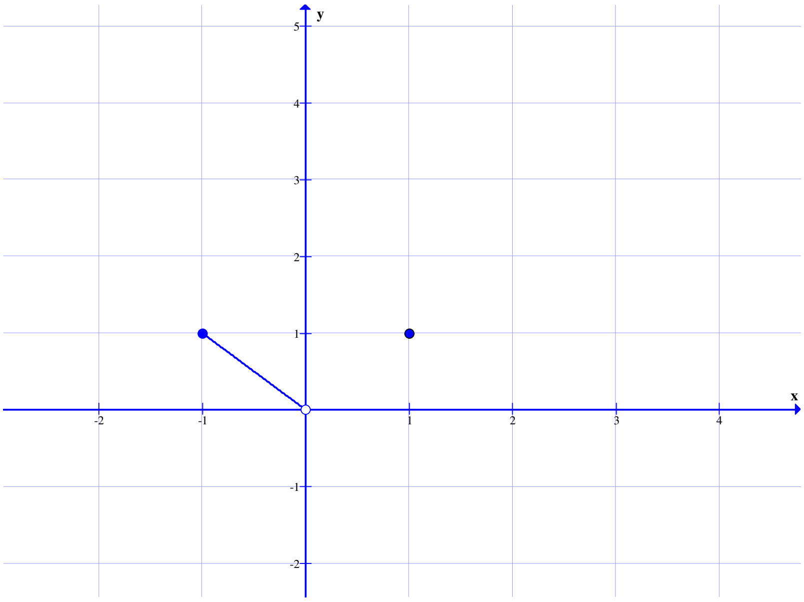
حل :

$$x \in [-۱,۰) \xrightarrow{[x]=-۱} y = \frac{x}{-۱} = -x$$

$$x \in [۰,۱) \xrightarrow{[x]=۰} y = \text{تعریف نشده}$$

$$x = ۱ \xrightarrow{[x]=۱} y = \frac{۱}{۱} = ۱$$

لذا نمودار تابع به شکل زیر است.



الف) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{[x]}=0$ ب) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{[x]}=$ بی معنی است.

۷ : مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin x}{x}\right]$ را پیدا کنید.

حل : در همسایگی محذوف صفر متغیر x یا در ربع اول یا در ربع چهارم قرار دارد. در هر حالت x و $\sin x$ هم علامت هستند. لذا :

$$0<\frac{\sin x}{x}<1$$

پس $\left[\dfrac{\sin x}{x}\right]=0$ در نتیجه $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin x}{x}\right]=0$

***

مفهوم ریاضی حد (تعریف دنباله ای حد)

تعریف : گوییم حد تابع f در a ، عدد حقیقی L است و می نویسیم.

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$

هرگاه به ازای هر دنباله از نقاط دامنه ی f مانند $\{a_n\}$ که به a همگرا است و $a_n \neq a$، دنباله ی $\{f(a_n)\}$ به L همگرا باشد. یعنی

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=L$$

تمرین : به کمک تعریف ثابت کنید. $\lim_{x\to ۱} \frac{x^۲-۱}{x-۱}=۲$

حل : تابع $f(x)=\frac{x^۲-۱}{x-۱}=\frac{(x+۱)(x-۱)}{x-۱}$ به ازای $x=۱$ نامعین است و برای هر $x\neq ۱$ داریم

$f(x)=x+۱$

لذا برای هر دنباله ی $\{a_n\}$ که $a_n\neq ۱$ و همگرا به ۱ داریم:

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n)=\lim_{n\to+\infty}(a_n+۱)=۱+۱=۲ \to \lim_{x\to ۱} f(x)=۲$$

تمرین : ثابت کنید که $\lim_{x\to a} x^۲=a^۲$

اثبات : برای هر دنباله ی $\{a_n\}$ که $a_n\neq a$ و همگرا به a باشد، داریم:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{n\to\infty} {a_n}^۲=a^۲$$

تمرین : ثابت کنید که $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}$ (n عددی طبیعی و در حالتی که n زوج باشد $a\geq ۰$)

اثبات : برای هر دنباله ی $\{a_n\}$ که $a_n\neq a$ و همگرا به a باشد، داریم:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{a}$$

تمرین برای حل : ثابت کنید که $\lim_{x\to a} x^n=a^n$

تمرین : ثابت کنید $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{\pi}{x}=0$

لذا برای هر دنباله ی $\{a_n\}$ که $a_n\neq 0$ و همگرا به ۰ داریم:

$$-1\le \sin\frac{\pi}{a_n}\le 1$$

$$IF\ a_n>0 \to -1\le \sin\frac{\pi}{a_n}\le 1$$

$$\xrightarrow{\times a_n} -a_n\le a_n\sin\frac{\pi}{a_n}\le a_n \xrightarrow{\lim\limits_{n\to\infty}(-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0} \lim_{n\to\infty} a_n\sin\frac{\pi}{a_n}=0$$

$$IF\ a_n<0 \to -1\le \sin\frac{\pi}{a_n}\le 1$$

$$\xrightarrow{\times a_n} -a_n\ge a_n\sin\frac{\pi}{a_n}\ge a_n \xrightarrow{\lim\limits_{n\to\infty}(-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0} \lim_{n\to\infty} a_n\sin\frac{\pi}{a_n}=0$$

لذا در هر حالت داریم : $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=0$

نکته : چون حد دنباله $\{f(a_n)\}$ در صورت وجود یکتا است، بنابراین حد تابع f در نقطه ی a نیز در صورت وجود، یکتا است.

حد راست : گوییم تابع f در نقطه ی a دارای حد راست L_1 است و می نویسیم.

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=L_1$$

هرگاه به ازای هر دنباله از نقاط دامنه ی f مانند $\{a_n\}$ که به a همگرا است و $a_n>a$، دنباله ی $\{f(a_n)\}$ به L_1 همگرا باشد. یعنی

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=L_1$$

تمرین : اگر $f(x)=\begin{cases}2x-1 & x\le 1\\ x^2+1 & x>1\end{cases}$ به کمک تعریف حد راست ثابت کنید.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=2$$

حل : فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله ای دلخواه از دامنه ی f که به۱ همگرا است و $a_n > ۱$، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} (a_n^{۲} + ۱) = ۱ + ۱ = ۲$$

لذا $\lim_{x\to ۱^+} f(x) = ۲$

تمرین برای حل : به کمک تعریف حد راست ثابت کنید که $\lim_{x\to ۰^+} \frac{|x|}{x} = ۱$

حد چپ : گوییم تابع f در نقطه ی a دارای حد چپ $L_۲$ است و می نویسیم.

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L_۲$$

هرگاه به ازای هر دنباله از نقاط دامنه ی f مانند $\{a_n\}$ که به a همگرا است و $a_n < a$، دنبالـه ی $\{f(a_n)\}$ بـه $L_۲$ همگرا باشد. یعنی

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L_۲$$

تمرین : اگر $f(x) = \begin{cases} ۲x - ۱ & x \le ۱ \\ x^{۲} + ۱ & x > ۱ \end{cases}$ به کمک تعریف حد چپ ثابت کنید.

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = ۱$$

حل : فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله ای دلخواه از دامنه ی f که به۱ همگرا است و $a_n < ۱$، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} (۲a_n - ۱) = ۲ - ۱ = ۱$$

لذا $\lim_{x\to ۱^-} f(x) = ۱$

تمرین برای حل : به کمک تعریف حد چپ ثابت کنید که $\lim_{x\to ۰^-} \frac{|x|}{x} = -۱$

تمرین : به کمک تعریف ثابت کنید که اگر $\lim_{x\to a^+} f(x)$ و $\lim_{x\to a^-} f(x)$ موجود و مساوی عـدد حقیقـی L باشـند، آنگاه $\lim_{x\to a} f(x)$ موجود و مساوی L است.

اثبات : فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله ای از نقاط دامنه ی f باشد که به a همگرا است و $a_n \neq a$، دنباله ی $\{a_n\}$ دارای حداقل یک زیر دنباله ی نامتناهی مانند $\{b_n\}$ و همگرا به a است که $b_n > a$ یا $b_n < a$

اگر $\{b_n\}$ یک زیر دنباله از $\{a_n\}$ باشد که همگرا به a است و $b_n > a$ ، بنابر این چون $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ پس $\lim\limits_{n \to \infty} f(b_n) = L$ و چون $\{f(b_n)\}$ یک زیر دنباله از $\{f(a_n)\}$ و همگرا به L است،آنگاه $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = L$

اگر $\{b_n\}$ یک زیر دنباله از $\{a_n\}$ باشد که همگرا به a است و $b_n < a$ ، بنابر این چون $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ پس $\lim\limits_{n \to \infty} f(b_n) = L$ و چون $\{f(b_n)\}$ یک زیر دنباله از $\{f(a_n)\}$ و همگرا به L است،آنگاه $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = L$

توجه : هر زیر دنباله ی نامتناهی از دنباله ی همگرا به L ، خود همگرا به L است.

***

نکته : با توجه به ویژگی عکس نقیض یک گزاره می توان گفت که :

اگر $\{a_n\}$و $\{b_n\}$ دو دنباله ی همگرا به a باشند، بطوری که برای هر n، $a_n \neq a$ و $b_n \neq a$، اما دنباله های $\{f(a_n)\}$ و $\{f(b_n)\}$ به اعداد حقیقی متمایز L_1 و L_2 همگرا شوند،آنگاه $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ وجود ندارد.[1]

تمرین : ثابت کنید که $\lim\limits_{x \to 0} \sin\frac{\pi}{x}$ وجود ندارد.

حل : کافی است دو دنباله به نام های $\{a_n\}$و $\{b_n\}$ مثال بزنیم که هر دو مخالف صفر اند و هر دو به صفر همگرا باشند. اما دنباله های $\{f(a_n)\}$ و $\{f(b_n)\}$ به دو عدد مختلف همگرا هستند.

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad a_n \neq 0 , a_n \to 0 \Rightarrow f(a_n) = \sin(\frac{\pi}{\frac{1}{n}}) = \sin(n\pi) = 0$$

[1] . از این نتیجه ، برای اثبات عدم وجود حد برخی توابع می توان استفاده نمود.

$$b_n=\frac{۱}{۲n+\frac{۱}{۲}}\ ,\ \ b_n\neq ۰\ ,\ b_n\to ۰\Rightarrow f(b_n)=\sin(\frac{\pi}{\frac{۱}{۲n+\frac{۱}{۲}}})=\sin(۲n\pi+\frac{\pi}{۲})=۱$$

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{n\to\infty}(۰)=۰=L_۱$$

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n)=\lim_{n\to\infty}(۱)=۱=L_۲$$

چون $L_۱\neq L_۲$ بنابراین طبق نکته ی گفته شده $\lim\limits_{x\to ۰}\sin\frac{\pi}{x}$ وجود ندارد.

تمرین : ثابت کنید که $\lim\limits_{x\to ۰}\cos\frac{۱}{x}$ وجود ندارد.

حل : کافی است دو دنباله به نام های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ مثال بزنیم که هر دو مخالف صفر اند و هر دو به صفر همگرا باشند.

اما دنباله های $\{f(a_n)\}$ و $\{f(b_n)\}$ به دو عدد مختلف همگرا هستند.

$$a_n=\frac{۱}{۲n\pi}\ ,\ \ a_n\neq ۰\ ,\ a_n\to ۰\Rightarrow f(a_n)=\cos(\frac{۱}{\frac{۱}{۲n\pi}})=\cos(۲n\pi)=۱$$

$$b_n=\frac{۱}{۲n\pi+\frac{\pi}{۲}}\ ,\ \ b_n\neq ۰\ ,\ b_n\to ۰\Rightarrow f(b_n)=\cos(\frac{۱}{\frac{۱}{۲n\pi+\frac{\pi}{۲}}})=\cos(۲n\pi+\frac{\pi}{۲})=۰$$

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{n\to\infty}(۰)=۱=L_۱$$

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n)=\lim_{n\to\infty}(۰)=۰=L_۲$$

چون $L_۱\neq L_۲$ بنابراین طبق نکته ی گفته شده $\lim\limits_{x\to ۰}\cos\frac{۱}{x}$ وجود ندارد.

تمرین : ثابت کنید که تابع f با ضابطه ی زیر در نقطه ی صفر دارای حد نیست.

$$f(x)=\begin{cases} x^۲ & x<۰ \\ x-۱ & x>۰ \end{cases}$$

حل : کافی است دو دنباله به نام های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ مثال بزنیم که هر دو مخالف صفر اند و هر دو به صفر همگرا باشند. اما دنباله های $\{f(a_n)\}$ و $\{f(b_n)\}$ به دو عدد مختلف همگرا هستند.

$$a_n = -\frac{1}{n}\,,\;\; a_n \neq 0\,,\, a_n \to 0 \Rightarrow f(a_n) = (\frac{1}{n})^2 = \frac{1}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{n}\,,\;\; b_n \neq 0\,,\, b_n \to 0 \Rightarrow f(b_n) = \frac{1}{n} - 1$$

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n^2}) = 0 = L_1$$

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n} - 1) = -1 = L_2$$

چون $L_1 \neq L_2$ بنابراین طبق نکته ی گفته شده $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ وجود ندارد.

***

قضایای حد

در ادامه قضایای مربوط به مفهوم حد را معرفی و ثابت می کنیم.

قضیه ی ۱ : تابع ثابت $f(x) = c$ در همه ی نقاط دارای حد است و حد آن در هر نقطه برابر c است. یعنی :

$$\lim_{x\to a} c = c \qquad (\text{ عدد ثابتی است. } c)$$

اثبات : برای هر دنباله ی $\{a_n\}$ که $a_n \neq a$ و همگرا به a باشد، داریم:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} c = c$$

قضیه ی ۲ : تابع همانی $f(x) = x$ در همه ی نقاط حد دارد و حد آن در هر نقطه مانند a ، برابر a است.

$$\lim_{x\to a} x = x$$

اثبات : برای هر دنباله ی $\{a_n\}$ که $a_n \neq a$ و همگرا به a باشد، داریم:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

قضیه ی۳ : اگر دو تابع f و g در نقطه ی a حد داشته باشند، در صورتی که توابع $f+g$ و $f-g$ و $f.g$، حداقل در یک همسایگی یکطرفه ی a تعریف شده باشند، آنگاه این توابع نیز در a حد دارند و

$$\lim_{x\to a} f(x) = L_۱ \quad و \quad \lim_{x\to a} g(x) = L_۲$$

$$\lim_{x\to a} (f(x)+g(x)) = L_۱ + L_۲$$

$$\lim_{x\to a} (f(x)-g(x)) = L_۱ - L_۲$$

$$\lim_{x\to a} (f(x)\times g(x)) = L_۱ . L_۲$$

اثبات : برای هر دنباله ی $\{a_n\}$ که $a_n \neq a$ و همگرا به a باشد، داریم:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L_۱ \quad و \quad \lim_{n\to\infty} g(a_n) = L_۲$$

$$\lim_{n\to\infty} (f(a_n)+g(a_n)) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) + \lim_{n\to\infty} g(a_n) = L_۱ + L_۲$$

$$\lim_{n\to\infty} (f(a_n)-g(a_n)) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) - \lim_{n\to\infty} g(a_n) = L_۱ - L_۲$$

$$\lim_{n\to\infty} (f(a_n)\times g(a_n)) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \times \lim_{n\to\infty} g(a_n) = L_۱ \times L_۲$$

نتیجه :

الف :

$$\lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(x) = cL_۱$$

ب : اگر $L_۲ \neq ۰$ باشد، آنگاه

$$\lim_{x\to a} \frac{۱}{g(x)} = \frac{۱}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{۱}{L_۲}$$

همچنین

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L_۱}{L_۲}$$

اثبات : برای هر دنباله ی $\{a_n\}$ که $a_n \neq a$ و همگرا به a باشد، داریم:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=L_1 \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty} g(a_n)=L_2$$

$$\lim_{n\to\infty} cf(a_n)=c\lim_{n\to\infty} f(a_n)=cL_1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{g(a_n)}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} g(a_n)}=\frac{1}{L_2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(a_n)}{g(a_n)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)}{\lim\limits_{n\to\infty} g(a_n)}=\frac{L_1}{L_2}$$

قضیه ی ٤ : توابع چند جمله ای در هر نقطه حد دارند و حد آنها همان مقدار تابع در آن نقاط است.

$$\lim_{x\to a} P(x)=P(a)$$

اثبات : اگر قرار دهیم $P(x)=r_n x^n+r_{n-1}x^{n-1}+\ldots+r_0$ پس بنابر قضیه ی قبل می توان نوشت:

$$\lim_{x\to a} P(x)=\lim_{x\to a}(r_n x^n+r_{n-1}x^{n-1}+\ldots+r)=\lim_{x\to a} r_n x^n+\lim_{x\to a} r_{n-1}x^{n-1}+\ldots+\lim_{x\to a} r$$
$$=r_n a^n+r_{n-1}a^{n-1}+\ldots+r=P(a)$$

قضیه ی ٥ : توابع گویا در هر نقطه از دامنه ی خود حد دارند و حد آنها همان مقدار تابع در آن نقاط است.

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(a)}{Q(a)} \qquad , \qquad Q(a)\neq 0$$

اثبات :

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} P(x)}{\lim\limits_{x\to a} Q(x)}=\frac{P(a)}{Q(a)}$$

تمرین : ثابت کنید که $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ اگر و تنها اگر $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-L)=0$

اثبات :

قسمت اول:

$$\lim_{x\to a} f(x)=L \xrightarrow{\lim\limits_{x\to a} L=L} \lim_{x\to a}(f(x)-L)=L-L\to \lim_{x\to a}(f(x)-L)=0$$

قسمت دوم :

$$\lim_{x\to a}(f(x)-L)=\text{۰}\to\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}L=\text{۰}\to\lim_{x\to a}f(x)-L=\text{۰}\to\lim_{x\to a}f(x)=L$$

تمرین : ثابت کنید که

الف) $\lim_{x\to \text{۲}}\text{۹}x^{\text{۲}}=\text{۳۶}$ ب) $\lim_{x\to \text{۲}}\frac{x^{\text{۲}}}{x+\text{۱}}=\frac{\text{۴}}{\text{۳}}$ ج) $\lim_{x\to \text{۱}}(x^{\text{۲}}+\text{۱})(x^{\text{۲}}+x)=\text{۴}$

اثبات الف : برای هر دنباله ی $\{a_n\}$ که $a_n\neq \text{۲}$ و همگرا به۲ باشد، داریم:

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{n\to\infty}\text{۹}a_n{}^{\text{۲}}=\text{۹}(\text{۲})^{\text{۲}}=\text{۳۶}$$

اثبات ب : برای هر دنباله ی $\{a_n\}$ که $a_n\neq \text{۲}$ و همگرا به۲ باشد، داریم:

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n{}^{\text{۲}}}{a_n+\text{۱}}=\frac{(\text{۲})^{\text{۲}}}{\text{۲}+\text{۱}}=\frac{\text{۴}}{\text{۳}}$$

اثبات ج : برای هر دنباله ی $\{a_n\}$ که $a_n\neq \text{۲}$ و همگرا به ۱ باشد، داریم:

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{n\to\infty}(a_n{}^{\text{۲}}+\text{۱})(a_n{}^{\text{۲}}+a_n)=((\text{۱})^{\text{۲}}+\text{۱})((\text{۱})^{\text{۲}}+(\text{۱}))=(\text{۲})(\text{۲})=\text{۴}$$

قـــضیه ی ٦ : اگـر $y=b^x$ یــک تــابع نمــایی و $P(x)$ یــک چنــد جملــه ای باشــد،آنگاه $\lim_{x\to a}b^x=b^a$ و

$$\lim_{x\to a}b^{P(x)}=b^{P(a)}$$

اثبات :

$$\lim_{x\to a}b^{P(x)}=b^{\lim_{x\to a}P(x)}=b^{P(a)}$$

توجه : نامساوی $|\sin x|\leq|x|$ به ازای هر x (برحسب رادیان) برقرار است.

زیرا به ازای $x=\text{۰}$ می شود $\text{۰}\leq\text{۰}$ و به ازای $\text{۰}<|x|<\frac{\pi}{\text{۲}}$ نامساوی به جهت اینکه $\cos x<\frac{\sin x}{x}<\text{۱}$ نیـز برقـرار

می باشد. به ازای $|x|\geq\frac{\pi}{\text{۲}}$ نیز واضح است زیرا $|\sin x|\leq\text{۱}$

قضیه ی ۷ : (حد توابع مثلثاتی) اگر x بر حسب رادیان باشد. آنگاه

الف) $\lim_{x\to a} \sin x = \sin a$

ب) $\lim_{x\to a} \cos x = \cos a$

ج) $\lim_{x\to a} \tan x = \tan a \quad (a \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}, k \in Z)$

د) $\lim_{x\to a} \cot x = \cot a \quad (a \neq k\pi, k \in Z)$

اثبات : دنباله ی دلخواه $\{a_n\}$ که همگرا به a است و برای هر عدد طبیعی n، $a_n \neq a$ را در نظر می گیریم. در این صورت:

$$|\sin a_n - \sin a| = ۲|\sin\frac{a_n - a}{۲}\cos\frac{a_n + a}{۲}| \leq ۲|\sin\frac{a_n - a}{۲}| \leq |a_n - a|$$

بنابراین $\lim_{x\to a} \sin x = \sin a$

$$|\cos a_n - \cos a| = |-۲\sin\frac{a_n - a}{۲}\sin\frac{a_n + a}{۲}| \leq ۲|\sin\frac{a_n - a}{۲}| \leq ۲\times\frac{|a_n - a|}{۲} \leq |a_n - a|$$

بنابراین $\lim_{x\to a} \cos x = \cos a$

$$\lim_{x\to a} \tan x = \lim_{x\to a}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin a}{\cos a} = \tan a \quad (a \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}, k \in Z)$$
$$\lim_{x\to a} \cot x = \lim_{x\to a}\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos a}{\sin a} = \cot a \quad (a \neq k\pi, k \in Z)$$

قضیه ی ۸ : حد توابع رادیکالی

الف) اگر n فرد باشد و $\lim_{x\to a} f(x) = L$ آنگاه $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$

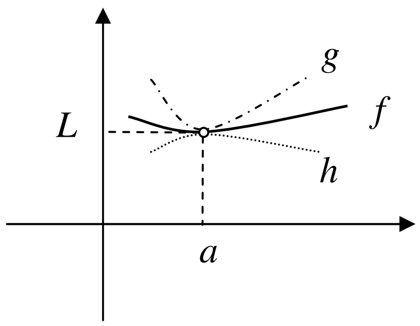
ب) اگر n زوج باشد و $\lim_{x\to a} f(x) = L \geq ۰$ و تابع $y = \sqrt[n]{f(x)}$ حداقل در یک همسایگی یکطرفه ی a تعریف شده باشد، آنگاه $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$

نکته : اگر $f(x)=-x^{۲}$ باشد،آنگاه $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=۰$.اما در مورد حد تابع $y=\sqrt{f(x)}$ در $x=۰$ نمی توان صحبت کرد. به عبارتی دیگر $\lim\limits_{x\to ۰}\sqrt{f(x)}$ بی معنی است.

تمرین برای حل : مقدار حد های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۳}\sqrt{\dfrac{x-۲}{۳x^{۲}-۲}}$ ب) $\lim\limits_{x\to ۵}\sqrt[۳]{\dfrac{x-۶}{x^{۲}+۲}}$ ج) $\lim\limits_{x\to ۱}\sqrt[۴]{\dfrac{x+۱۵}{۲x^{۲}-۱}}$

قضیه ی ۹ : قضیه ی فشردگی



اگر در یک همسایگی محذوف a داشته باشیم، $h(x)\le f(x)\le g(x)$

و $\lim\limits_{x\to a} h(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=L$

آنگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$

اثبات: دنباله ی دلخواه $\{a_n\}$ که همگرا به a است و برای هر عدد طبیعی n، $a_n\ne a$ را در نظر می گیریم. طبق فرض قضیه داریم. $h(a_n)\le f(a_n)\le g(a_n)$ و $\lim\limits_{n\to\infty} h(a_n)=\lim\limits_{n\to\infty} g(a_n)=L$ پس طبق قضیه‌ی فشردگی در دنباله ها می توان نوشت $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=L$

یعنی $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$

تمرین : نشان دهید $\lim\limits_{x\to ۰} x^{۲}\cos\dfrac{\pi}{x}=۰$

حل : برای هر $x\ne ۰$ داریم .

$$-۱\le\cos\frac{\pi}{x}\le ۱\xrightarrow{\times x^{۲}}-x^{۲}\le x^{۲}\cos\frac{\pi}{x}\le x^{۲}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۰}(-x^{۲})=۰\\ \lim\limits_{x\to ۰}(x^{۲})=۰\end{array}\right\}\to \lim\limits_{x\to ۰} x^{۲}\cos\frac{\pi}{x}=۰$$

تمرین : نشان دهید $\lim\limits_{x\to ۰} x[\frac{۱}{x}]=۱$

حل : می دانیم که برای هر عدد حقیقـی s نامـساوی $s-۱<[s]\le s$ برقـرار اسـت. حـال بـا انتخـاب $s=\frac{۱}{x}$ بـرای هر $x\neq ۰$ داریم .

$$\frac{۱}{x}-۱<[\frac{۱}{x}]\le\frac{۱}{x}$$

اگر $x>۰$ می توان نوشت:

$$\frac{۱}{x}-۱<[\frac{۱}{x}]\le\frac{۱}{x}\xrightarrow{\times x}۱-x<x[\frac{۱}{x}]\le ۱$$

$$\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to ۰^+}(۱-x)=۱\\ \lim\limits_{x\to ۰^+}(۱)=۱\end{matrix}\right\}\to \lim_{x\to ۰^+}x[\frac{۱}{x}]=۰ \qquad (۱)$$

اگر $x<۰$ می توان نوشت:

$$\frac{۱}{x}-۱<[\frac{۱}{x}]\le\frac{۱}{x}\xrightarrow{\times x}۱-x>x[\frac{۱}{x}]\ge ۱\to ۱\le x[\frac{۱}{x}]<۱-x$$

$$\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to ۰^-}(۱)=۱\\ \lim\limits_{x\to ۰^-}(۱-x)=۱\end{matrix}\right\}\to \lim_{x\to ۰^-}x[\frac{۱}{x}]=۱ \qquad (۲)$$

لذا از روابط (۱) و (۲) می توان نوشت: $\lim\limits_{x\to ۰}x[\frac{۱}{x}]=۱$

تمرین برای حل :

۱ : اگر برای هر $x\neq ۰$ دشته باشیم. $۳-x^۲\le f(x)\le ۳+x^۲$ مطلوب است $\lim\limits_{x\to ۰}f(x)$

۲ : نشان دهید $\lim\limits_{x\to ۰}x^۲\sin\frac{۱}{x}=۰$

۳ : نشان دهید $\lim\limits_{x\to ۰}x^۲\cos\frac{۱}{x}=۰$

۴ : تابع زیر به تابع دیریکله موسوم است. ثابت کنید. $\lim\limits_{x\to ۰}xD(x)=۰$

$$D(x)=\begin{cases}1 & x\in Q\\ 0 & x\notin Q\end{cases}$$

راهنمایی : در تابع دیریکله $0\le D(x)\le 1$

۵ : ثابت کنید که اگر $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=0$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$

راهنمایی : $-|f(x)|\le f(x)\le |f(x)|$

تمرین : اگر x بر حسب رادیان باشد. ثابت کنید $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

حل : می دانیم که اگر x بر حسب رادیان باشد. برای هر x که $0<|x|<\dfrac{\pi}{2}$ باشد[2]، داریم.

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1\\ \lim\limits_{x\to 0}(1)=1\end{array}\right\}\to \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

نتیجه : اگر u بر حسب رادیان باشد. تساوی های زیر همواره برقرارند.

الف) $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=1$ ب) $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{\sin u}=1$

ج) $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\tan u}{u}=1$ د) $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{\tan u}=1$

تمرین : حد های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{bx}$ ب) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x.\tan 3x}{4x^3}$ ج) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{x}$

حل الف :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}\times\frac{a}{b}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}\times\lim_{x\to 0}\frac{a}{b}=1\times\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$$

---

[2]. یعنی x در بازه های $(0,\frac{\pi}{2})$ و $(-\frac{\pi}{2},0)$ قرار دارد، به عبارتی دیگر $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})-\{0\}$ یک همسایگی محذوف صفر است.

حل ب :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin^۲ x.\tan ۳x}{۴x^۳}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{۴}\times\frac{\sin^۲ x}{x^۲}\times\frac{\tan ۳x}{x}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{۴}\times(\frac{\sin x}{x})^۲\times\frac{\tan ۳x}{۳x}\times ۳=\frac{۱}{۴}\times(۱)^۲\times(۱)\times ۳=\frac{۳}{۴}$$

حل ج :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin(\sin x)}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\times\frac{\sin x}{x}=\lim_{t\to ۰}\frac{\sin t}{t}\times\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=۱\times ۱=۱$$

تمرین برای حل : مقدار $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\tan ۲x}{۳x}$ را محاسبه کنید.

قضیه ی ۱۰ : اگر توابع f و g روی همسایگی یکسانی از a تعریف شده باشند و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=۰$ و تابع g در یک همسایگی محذوف a کراندار باشد، آنگاه

$$\lim_{x\to a} f(x).g(x)=۰$$

اثبات : طبق تعریف حد تابع، به ازای هر دنباله‌ی $\{a_n\}$ که همگرا به a باشد و $a_n\neq a$ داریم $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=۰$ و برای تابع g که در همسایگی محذوف a کراندار است، عدد مثبتی مانند M وجود دارد که $|g(a_n)|\leq M$. پس طبق قضیه‌ی فشردگی نتیجه می شود که دنباله‌ی $\{f(a_n)g(a_n)\}$ همگرا به صفر است. بنابراین $\lim\limits_{x\to a} f(x).g(x)=۰$

تمرین : حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}(x^۲-۴)\sin(\frac{۱}{x-۲})$ را محاسبه کنید.

حل : قرار می دهیم $f(x)=x^۲-۴$ و $g(x)=\sin(\frac{۱}{x-۲})$. در این صورت

الف : $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲}(x^۲-۴)=۰$

ب : چون برای هر $x \neq ۲$ داریم، $-۱ \leq \sin(\frac{۱}{x-۲}) \leq ۱$ پس $-۱ \leq g(x) \leq ۱$ یعنی $g(x)$ در همسایگی۲ کراندار است.

لذا بنابر قضیه ی فوق

$$\lim_{x \to ۲} f(x).g(x) = \lim_{x \to ۲} (x^۲ - ۴)\sin(\frac{۱}{x-۲}) = ۰$$

***

دو نکته ی مهم در محاسبه ی حد توابع

۱ : اگر تابع داده شده شامل جزء صحیح باشد، ابتدا باید جزء صحیح را در همسایگی مورد نظر تعیین مقدار کرده و جایگزین کنیم و سپس حد را محاسبه می کنیم.

۲ : اگر تابع داده شده شامل قدر مطلق باشد، ابتدا باید درون قدرمطلق را تعیین علامت کرده و قدر مطلق را حذف کنیم و سپس حد را محاسبه می کنیم.

تمرین : حد های زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $\lim_{x \to \sqrt{۲}} [x^۲] + ۱$ ب) $\lim_{x \to ۳} \frac{|۳ - x|}{x - ۳}$

حل الف :

$$x \to (\sqrt{۲})^+ \Rightarrow x > \sqrt{۲} \Rightarrow x^۲ > ۲ \Rightarrow [x^۲] = ۲$$

$$\lim_{x \to (\sqrt{۲})^+} [x^۲] + ۱ = \lim_{x \to (\sqrt{۲})^+} ۲ + ۱ = ۳$$

$$x \to (\sqrt{۲})^- \Rightarrow x < \sqrt{۲} \Rightarrow x^۲ < ۲ \Rightarrow [x^۲] = ۱$$

$$\lim_{x \to (\sqrt{۲})^-} [x^۲] + ۱ = \lim_{x \to (\sqrt{۲})^-} ۱ + ۱ = ۲$$

$\Rightarrow \lim_{x \to \sqrt{۲}} [x^۲] + ۱$ موجود نیست.

حل ب :

$$x \to ۳^+ \Rightarrow x > ۳ \Rightarrow x-۳ > ۰ \to ۳-x < ۰ \Rightarrow |۳-x| = -(۳-x) = x-۳$$

$$\lim_{x \to ۳^+} \frac{|۳-x|}{x-۳} = \lim_{x \to ۳^+} \frac{x-۳}{x-۳} = ۱$$

$$x \to ۳^- \Rightarrow x < ۳ \Rightarrow x-۳ < ۰ \to ۳-x > ۰ \Rightarrow |۳-x| = ۳-x$$

$$\lim_{x \to ۳^+} \frac{|۳-x|}{x-۳} = \lim_{x \to ۳^+} \frac{۳-x}{x-۳} = -۱$$

$\lim_{x \to ۳} \frac{|۳-x|}{x-۳}$ موجود نیست.

تمرین : حد $\lim_{x \to ۰^-} (۱-x+[x]-[۲x])$ را حساب کنید.

حل :

$$\lim_{x \to ۰^-} (۱-x+[x]-[۲x]) = \lim_{x \to ۰^-} (۱-x+(-۱)-(-۱)) = \lim_{x \to ۰^-} (۱-x) = ۱-۰ = ۱$$

***

محاسبه ی حد در توابع کسری (حالت $\frac{۰}{۰}$ و روش رفع ابهام آن **)**

در محاسبه ی حد توابع کسری مانند $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ممکن است ، حد صورت و مخرج در نقطه ی a صفر شوند. در این صورت اصطلاحاً گوییم به حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ برخورد کرده ایم که باید رفع ابهام کنید. اساس کار در رفع ابهام حذف عامل صفر کننده است. در زیر روش هایی را با ذکر مثال برای حذف عامل صفر کننده (رفع ابهام) بیان می کنیم.

روش تجزیه : اگر صورت و مخرج، چند جمله ای تجزیه ی پذیر باشند.

مثال :

$$\lim_{x \to ۵} \frac{x^۲-۶x+۵}{۴x^۲-۱۰۰} \overset{\frac{۰}{۰}}{=} \lim_{x \to ۵} \frac{(x-۵)(x-۱)}{۴(x-۵)(x+۵)} = \lim_{x \to ۵} \frac{x-۱}{۴(x+۵)} = \frac{۴}{۴۰} = \frac{۱}{۱۰}$$

توجه : با تقسیم صورت و مخرج بر عامل صفر کننده، می توان عبارت کسری که صورت و مخرج آن چند جمله ای باشند را نیز رفع ابهام نمود.

مثال :

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۴x^{۳}+۳x^{۲}-۷}{x^{۳}-۱}\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\lim_{x\to ۱}\frac{۴x^{۲}+۷x+۷}{x^{۲}+x+۱}=\frac{۱۸}{۳}=۶$$

تقسیم را انجام دهید.

روش گویا کردن : اگر صورت یا مخرج کسر شامل رادیکال باشند.

مثال ۱ :

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x^{۲}+۵}-۳}{x-۲}$$

حل:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x^{۲}+۵}-۳}{x-۲}=\frac{\sqrt{(۲)^{۲}+۵}-۳}{(۲)-۲}=\frac{\sqrt{۹}-۳}{۲-۲}=\frac{۰}{۰}\quad \text{مبهم}$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x^{۲}+۵}-۳}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x^{۲}+۵}-۳}{x-۲}\times\frac{\sqrt{x^{۲}+۵}+۳}{\sqrt{x^{۲}+۵}+۳}=\lim_{x\to ۲}\frac{(\sqrt{x^{۲}+۵})^{۲}-(۳)^{۲}}{(x-۲)(\sqrt{x^{۲}+۵}+۳)}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{(\sqrt{x^{۲}+۵})^{۲}-(۳)^{۲}}{(x-۲)(\sqrt{x^{۲}+۵}+۳)}=\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۲}+۵-۹}{(x-۲)(\sqrt{x^{۲}+۵}+۳)}=\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۲}-۴}{(x-۲)(\sqrt{x^{۲}+۵}+۳)}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x+۲)}{(x-۲)(\sqrt{x^{۲}+۵}+۳)}=\lim_{x\to ۲}\frac{x+۲}{\sqrt{x^{۲}+۵}+۳}=\frac{۲+۲}{\sqrt{(۲)^{۲}+۵}+۳}=\frac{۴}{۳+۳}=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$$

مثال ۲:

$$\lim_{x\to ۲۷}\frac{x-۲۷}{\sqrt[۳]{x}-۳}$$

حل:

$$\lim_{x\to ۲۷}\frac{x-۲۷}{\sqrt[۳]{x}-۳}=\frac{۲۷-۲۷}{\sqrt[۳]{۲۷}-۳}=\frac{۰}{۰}\quad \text{مبهم}$$

$$\lim_{x\to ۲۷}\frac{x-۲۷}{\sqrt[۳]{x}-۳}=\lim_{x\to ۲۷}\frac{x-۲۷}{\sqrt[۳]{x}-۳}\times\frac{\sqrt[۳]{x}^{۲}+۳\sqrt[۳]{x}+۹}{\sqrt[۳]{x}^{۲}+۳\sqrt[۳]{x}+۹}=\lim_{x\to ۲۷}\frac{(x-۲۷)(\sqrt[۳]{x}^{۲}+۳\sqrt[۳]{x}+۹)}{\sqrt[۳]{x}^{۳}-(۳)^{۳}}$$

$$=\lim_{x\to ۲۷}\frac{(x-۲۷)(\sqrt[۳]{x}^{۲}+۳\sqrt[۳]{x}+۹)}{x-۲۷}=\lim_{x\to ۲۷}(\sqrt[۳]{x}^{۲}+۳\sqrt[۳]{x}+۹)=\sqrt[۳]{۲۷}^{۲}+۳\sqrt[۳]{۲۷}+۹=۹+۹+۹=۲۷$$

روش مثلثاتی : استفاده از روابط مثلثاتی می تواند، در رفع ابهام حد تابع کسری مفید باشند.

مثال :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos ۲x}{x^{۲}}\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\lim_{x\to ۰}\frac{۲\sin^{۲}x}{x^{۲}}=\lim_{x\to ۰}۲(\frac{\sin x}{x})^{۲}=۲(۱)=۲$$

مثال :

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sin ۲x}{\sqrt{۱-\cos ۲x}}\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sin ۲x}{\sqrt{۲\sin^{۲}x}}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sin ۲x}{\sqrt{۲}\,|\sin x|}$$

$$=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sin ۲x}{\sqrt{۲}(-\sin x)}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{۲\sin x\cos x}{-\sqrt{۲}\sin x}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{۲\cos x}{-\sqrt{۲}}=\frac{۲}{-\sqrt{۲}}=-\sqrt{۲}$$

توجه : x در ربع چهارم دایره ی مثلثاتی قرار دارد، لذا $|\sin x|=-\sin x$

***

تمرین برای حل : حد های زیر را حساب کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to -۲}\dfrac{۲x^{۲}+۵x+۲}{x+۲}$

۲) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{(x+۳)^{۲}-۹}{x}$

۳) $\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{x-۴}{\sqrt{x}-۲}$

۴) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{x^{۲}}{\sqrt{x^{۲}+۹}-۳}$

۵) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x^{۲}-۱}{\sqrt[۳]{x}-۱}$

۶) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{۱+\cos^{۳}x}{\sin^{۲}x}$

۷) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\dfrac{۱-\sin x}{\cos^{۲}x}$

۸) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۱-\cos x}{x^{۲}}$

۹) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}}\dfrac{۱-\tan x}{\sin x-\cos x}$

۱۰) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\cos ۳x-\cos x}{x^{۲}}$

حل چند تمرین مهم :

۱ : به کمک تعریف دنباله ای حد، ثابت کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۲}x^{۳}=۸$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{x^{۲}-۹}{x-۳}=۶$

ج) $\lim\limits_{x\to ۱}\sqrt{x-۱}=۰$

د) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}\quad ;\ a\geq ۰$

ه) $\lim\limits_{x\to (\frac{۱}{۲})^{+}}x^{۲}[x]=۰$

اثبات الف : دنباله ی دلخواه $\{a_n\}$ که همگرا به ۲ است و برای هر عدد طبیعی n، $a_n\neq ۲$ را در نظر می گیریم. در این صورت:

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{n\to\infty}(a_n)^{۳}=(۲)^{۳}=۸$$

اثبات ب :

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^{۲}-۹}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۳)(x+۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}(x+۳)$$

دنباله ی دلخواه $\{a_n\}$ که همگرا به ۳ است و برای هر عدد طبیعی n، $a_n \neq ۳$ را در نظر می گیریم. در این صورت:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{n\to\infty}(a_n+۳)=۳+۳=۶$$

اثبات ج : دنباله ی دلخواه $\{a_n\}$ که همگرا به ۱ است و برای هر عدد طبیعی n، $a_n \neq ۱$ را در نظر مـی گیـریم. در ایـن صورت:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n-۱}=\sqrt{۱-۱}=۰$$

اثبات د : دنباله ی دلخواه $\{a_n\}$ که همگرا به a است و برای هر عدد طبیعی n، $a_n \neq a$ را در نظر می گیـریم. در ایـن صورت:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$$

اثبات ه : دنباله ی دلخواه $\{a_n\}$ که همگرا به $\frac{۱}{۲}$ است و برای هر عدد طبیعی n، $a_n > \frac{۱}{۲}$ را در نظر می گیـریم. در ایـن صورت:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{n\to\infty} a_n{}^{۲}[a_n]=(\frac{۱}{۲})^{۲}\times[\frac{۱}{۲}]=\frac{۱}{۴}\times ۰=۰$$

۲ : دو تابع به نام های f و g مثال بزنید که $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$ وجود داشـته باشـد ولـی نـه $\lim_{x\to a} f(x)$ وجـود داشته باشد و نه $\lim_{x\to a} g(x)$

حل :

$$f(x)=\begin{cases} ۱ & x\geq a \\ -۱ & x<a \end{cases} \quad \text{و} \quad g(x)=\begin{cases} -۱ & x\geq a \\ ۱ & x<a \end{cases} \Rightarrow f(x)+g(x)=۰$$

۳ : دو تابع به نام های f و g مثال بزنید که $\lim_{x\to a}(f(x)\times g(x))$ وجود داشـته باشـد ولـی نـه $\lim_{x\to a} f(x)$ وجـود داشته باشد و نه $\lim_{x\to a} g(x)$

حل :

$$f(x)=\begin{cases}۱ & x\ge a\\ -۱ & x<a\end{cases} \quad \text{و} \quad g(x)=\begin{cases}-۱ & x\ge a\\ ۱ & x<a\end{cases} \Rightarrow f(x)\times g(x)=-۱$$

۴ : آیا عددی مانند a وجود دارد که مقدار $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{x+۱-\sqrt{۴x+۱}}{۲x^۲+ax-۴}$ ، عددی مخالف صفر شود؟ مقدار a و مقدار این حد را پیدا کنید.

حل : چون حد صورت ، صفر حدی می شود، حاصل در صورتی عدد غیر صفر می گردد که مخرج نیز صفر باشد. یعنی اینکه این حد در ابتدا مبهم می باشد. در این صورت

$$\lim_{x\to ۲}(۲x^۲+ax-۴)=۰\to ۲(۲)^۲+۲a-۴=۰\to a=-۲$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x+۱-\sqrt{۴x+۱}}{۲x^۲+ax-۴}\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\lim_{x\to ۲}\frac{x+۱-\sqrt{۴x+۱}}{۲x^۲-۲x-۴}\times\frac{x+۱+\sqrt{۴x+۱}}{x+۱+\sqrt{۴x+۱}}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{(x+۱)^۲-(۴x+۱)}{۲(x^۲-x-۲)(x+۱+\sqrt{۴x+۱})}=\lim_{x\to ۲}\frac{x(x-۲)}{۲(x-۲)(x+۱)(x+۱+\sqrt{۴x+۱})}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{x}{۲(x+۱)(x+۱+\sqrt{۴x+۱})}=\frac{۲}{۲\times ۳\times ۶}=\frac{۱}{۱۸}$$

۵ : عدد های a و b را چنان انتخاب کنید که $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sqrt{ax+b}-۲}{x}=۱$

حل : چون مخرج صفر حدی می شود، حاصل نیز باید صفر حدی گردد.

$$\sqrt{a(۰)+b}-۲=۰\to b=۴$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{ax+b}-۲}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{ax+۴}-۲}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{ax+۴}-۲}{x}\times\frac{\sqrt{ax+۴}+۲}{\sqrt{ax+۴}+۲}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{(ax+۴)-۴}{x(\sqrt{ax+۴}+۲)}=\lim_{x\to ۰}\frac{ax}{x(\sqrt{ax+۴}+۲)}=\lim_{x\to ۰}\frac{a}{\sqrt{ax+۴}+۲}=\lim_{x\to ۰}\frac{a}{\sqrt{a(۰)+۴}+۲}=\frac{a}{۴}$$

$$\to\frac{a}{۴}=۱\to a=۴$$

۶ : حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{|۳x-۱|-|۳x+۱|}{x}$$

حل :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{|۳x-۱|-|۳x+۱|}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{-(۳x-۱)-(۳x+۱)}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{-۶x}{x}=-۶$$

۷ : نشان دهید که حد مقابل وجود ندارد.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{x}(۱-x[\frac{۱}{x}])$$

حل :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{x}(۱-x[\frac{۱}{x}])=\lim_{x\to ۰}(\frac{۱}{x}-[\frac{۱}{x}])$$

این تابع در نقطه ی $x=۰$ حد ندارد. زیرا کافی است دو دنباله به نام های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ مثال بزنیم که هر دو مخـالف صفر اند و هر دو به صفر همگرا باشند. اما دنباله های $\{f(a_n)\}$ و $\{f(b_n)\}$ به دو عدد مختلف همگرا هستند.

$$a_n=\frac{۱}{n},\ \ a_n\neq ۰\ ,\ a_n\to ۰\Rightarrow f(a_n)=n-[n]=۰$$

$$b_n=\frac{۱}{n+\frac{۱}{۲}},\ \ b_n\neq ۰\ ,\ b_n\to ۰\Rightarrow f(b_n)=(n+\frac{۱}{۲})-[n+\frac{۱}{۲}]=(n+\frac{۱}{۲})-[n]+[\frac{۱}{۲}]$$

$$=(n+\frac{۱}{۲})-[n]+۰=(n+\frac{۱}{۲})-[n]=n+\frac{۱}{۲}-n=\frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{n\to\infty}(۰)=۰=L_۱$$

$$\lim_{n\to\infty}f(b_n)=\lim_{n\to\infty}(\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۲}=L_۲$$

چون $L_۱\neq L_۲$ بنابراین طبق $\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{x}(۱-x[\frac{۱}{x}])$ وجود ندارد.

۸ : مقدار $\lim\limits_{x\to(\frac{۱}{۲})^+}\frac{|\cos\pi x|}{۱-\sqrt{۲x}}$ را بیابید.

حل :

$$\lim_{x\to(\frac{۱}{۲})^+}\frac{|\cos\pi x|}{۱-\sqrt{۲x}}\overset{\div}{=}\lim_{x\to(\frac{۱}{۲})^+}\frac{-(\cos\pi x)}{۱-\sqrt{۲x}}\times\frac{۱+\sqrt{۲x}}{۱+\sqrt{۲x}}=\lim_{x\to(\frac{۱}{۲})^+}\frac{-(۱+\sqrt{۲x})(\cos\pi x)}{۱-۲x}$$

$$\lim_{x\to(\frac{۱}{۲})^+}\frac{-(۱+\sqrt{۲x})\sin(\frac{\pi}{۲}-\pi x)}{۱-۲x}=\lim_{x\to(\frac{۱}{۲})^+}\frac{-(۱+\sqrt{۲x})\sin\frac{\pi}{۲}(۱-۲x)}{۱-۲x}$$

$$=\lim_{x\to(\frac{۱}{۲})^+}-(۱+\sqrt{۲x})\times\lim_{x\to(\frac{۱}{۲})^+}\frac{\sin\frac{\pi}{۲}(۱-۲x)}{۱-۲x}=\lim_{x\to(\frac{۱}{۲})^+}-(۱+\sqrt{۲x})\times\lim_{t\to ۰}\frac{\sin\frac{\pi}{۲}t}{t}$$

$$=-(۱+۱)\times\frac{\pi}{۲}=-\pi$$

توجه : زاویه ی $(\frac{\pi}{۲})^+$ در ربع دوم قرار دارد. لذا $|\cos\pi x|=-\cos\pi x$

۹ : تابع $f(x)=[\frac{۴x^۲+۳}{x^۲+۱}]$ در چند نقطه دارای حد است؟(چرا؟)

حل :

$$f(x)=[\frac{۴x^۲+۳}{x^۲+۱}]=[\frac{۴x^۲+۴-۱}{x^۲+۱}]=[\frac{۴(x^۲+۴)}{x^۲+۱}]+[\frac{-۱}{x^۲+۱}]=۴-۱=۳$$

لذا این تابع یک تابع ثابت می باشد. پس در همه ی نقاط حقیقی دارای حد است.

توجه :

$$۰<\frac{۱}{x^۲+۱}<۱\to-۱<\frac{-۱}{x^۲+۱}<۰\to[\frac{-۱}{x^۲+۱}]=-۱$$

۱۰ : با فرض اینکه $f(x)=[x+\frac{۱}{۳}]+[۳x]$ ، دنباله ی $\{f(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{n})\}$ به چه عددی همگرا است؟

حل :

$$f(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{n})=[(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{n})+\frac{۱}{۳}]+[۳(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{n})]=[\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{n}]+[۱+\frac{۳}{n}]=[\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{n}]+۱+[\frac{۳}{n}]$$

حال اگر $n\to\infty$ داریم.

$$f(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{n})=[\frac{۲}{۳}+۰]+۱+[۰]=۰+۱=۱$$

یعنی دنباله به یک همگرا است.

۱۱ : به کمک تعریف دنباله ای ثابت کنید که حد های زیر در نقطه ی $x=۱$ داده شده حد ندارند.

الف) $f(x)=\frac{|x-۱|}{x-۱}$ ب) $g(x)=\cos\frac{۱}{x-۱}$

حل الف :

$$a_n=۱+\frac{۱}{n},\ a_n\neq ۱\,,a_n\to ۱\Rightarrow f(a_n)=\frac{|a_n-۱|}{a_n-۱}=\frac{a_n-۱}{a_n-۱}=۱$$

$$b_n=۱-\frac{۱}{n},\ b_n\neq ۱\,,b_n\to ۱\Rightarrow f(b_n)=\frac{|b_n-۱|}{b_n-۱}=\frac{-(b_n-۱)}{b_n-۱}=-۱$$

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{n\to\infty}(۱)=۱=L_۱$$

$$\lim_{n\to\infty}f(b_n)=\lim_{n\to\infty}(-۱)=-۱=L_۲$$

چون $L_۱\neq L_۲$ بنابراین $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{|x-۱|}{x-۱}$ وجود ندارد.

حل ب :

$$a_n=۱+\frac{۱}{۲n\pi},\ a_n\neq ۱\,,a_n\to ۱\Rightarrow g(a_n)=\cos\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۲n\pi}-۱}=\cos ۲n\pi=۱$$

$$b_n=۱-\frac{۱}{۲n\pi+\frac{\pi}{۲}},\ b_n\neq ۱\,,b_n\to ۱\Rightarrow g(b_n)=\cos\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۲n\pi+\frac{\pi}{۲}}-۱}=\cos(۲n\pi+\frac{\pi}{۲})=۰$$

$$\lim_{n\to\infty} g(a_n) = \lim_{n\to\infty} (۱) = ۱ = L_۱$$

$$\lim_{n\to\infty} g(b_n) = \lim_{n\to\infty} (۰) = ۰ = L_۲$$

چون $L_۱ \neq L_۲$ بنابراین $\lim\limits_{x\to ۱} \cos\dfrac{۱}{x-۱}$ وجود ندارد.

۱۲ : به کمک تعریف دنباله ای ثابت کنید که تابع دیریکله در هیچ نقطه ای دارای حد نیست.

حل : می دانیم که این تابع به صورت زیر می باشد.

$$D(x) = \begin{cases} ۱ & x \in Q \\ ۰ & x \notin Q \end{cases}$$

با فرض اینکه a عددی گویا است، برای اثبات اینکه این تابع در نقطه ی $x = a$ حد ندارد. کافی است دو دنباله به نام های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ مثال بزنیم که هر دو مخالف صفر اند و هر دو به صفر همگرا باشند. اما دنباله های $\{D(a_n)\}$ و $\{D(b_n)\}$ به دو عدد مختلف همگرا هستند.

$$a_n = a + \frac{۱}{n},\ \ a_n \neq a\ ,\ a_n \to a \Rightarrow D(a_n) = ۱$$

$$b_n = a + \frac{\sqrt{۲}}{n},\ \ b_n \neq a\ ,\ b_n \to a \Rightarrow D(b_n) = ۰$$

$$\lim_{n\to\infty} D(a_n) = \lim_{n\to\infty} (۱) = ۱ = L_۱$$

$$\lim_{n\to\infty} D(b_n) = \lim_{n\to\infty} (۰) = ۰ = L_۲$$

چون $L_۱ \neq L_۲$ بنابراین برای هرعدد گویا مانند a ، $\lim\limits_{x\to a} D(x)$ وجود ندارد.

اکنون فرض اینکه a عددی گنگ است، برای اثبات اینکه این تابع در نقطه ی $x = a$ حد ندارد. کافی است دو دنباله به نام های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ مثال بزنیم که هر دو مخالف صفر اند و هر دو به صفر همگرا باشند. اما دنباله های $\{D(a_n)\}$ و $\{D(b_n)\}$ به دو عدد مختلف همگرا هستند.

$$a_n = a + \frac{۱}{n},\ \ a_n \neq a\ ,\ a_n \to a \Rightarrow D(a_n) = ۰$$

$$b_n=\frac{[na]}{n}\ ,\ \ b_n\neq a\ ,b_n\to a\Rightarrow D(b_n)=۱$$

$$\lim_{n\to\infty} D(a_n)=\lim_{n\to\infty}(۰)=۰=L_۱$$

$$\lim_{n\to\infty} D(b_n)=\lim_{n\to\infty}(۱)=۱=L_۲$$

چون $L_۱\neq L_۲$ بنابراین برای هرعدد گنگ مانند a ، $\lim\limits_{x\to a} D(x)$ وجود ندارد.

توجه :

$$na-۱<[na]\le na\xrightarrow{\div n}a-\frac{۱}{n}<\frac{[na]}{n}\le a\xrightarrow{\lim\limits_{n\to\infty}(a-\frac{۱}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}a=a}\lim_{n\to\infty}\frac{[na]}{n}=a$$

۱۳: به کمک تعریف دنباله ای ثابت کنید که تابع زیر در نقطه ی $x=\frac{۱}{۲}$ دارای حد است. سپس مقدار حد را مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases}x+۲ & x\in Q\\ ۳x+۱ & x\notin Q\end{cases}$$

اثبات : فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله ای دلخواه از اعداد حقیقی باشد که به a همگرا است، زیر دنباله ی نامتناهی از اعداد گویا مانند $\{b_n\}$ و همگرا به a را در نظر می گیریم.

بنابراین

$$f(b_n)=b_n+۲\to\lim_{n\to\infty} f(b_n)=\lim_{n\to\infty}(b_n+۲)=a+۲$$

حال زیر دنباله ی نامتناهی دیگری از اعداد گنگ مانند $\{c_n\}$ و همگرا به a را در نظر می گیریم.

بنابراین

$$f(c_n)=c_n+۲\to\lim_{n\to\infty} f(c_n)=\lim_{n\to\infty}(۳c_n+۱)=۳a+۱$$

شرط اینکه $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$ موجود باشد، این است که عدد همگرایی زیر دنباله های مختلف آن برابر با هم برابر باشند.

بنابراین :

$$3a+1=a+2 \rightarrow 2a=1 \rightarrow a=\frac{1}{2}$$

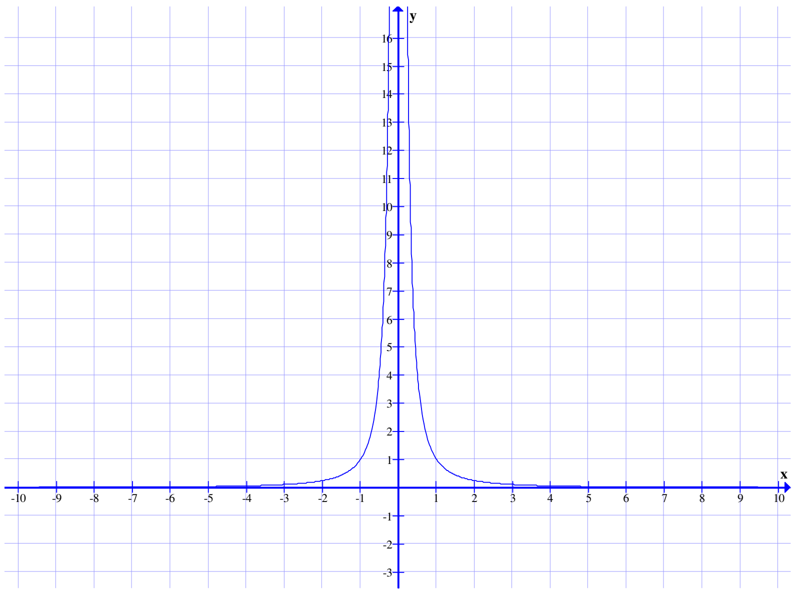
که نتیجه می شود تابع f در $x=\frac{1}{2}$ حد دارد و $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=\frac{5}{2}$

توجه : در ادامه معلوم می شود که این تابع در $x=\frac{1}{2}$ پیوسته است.

***

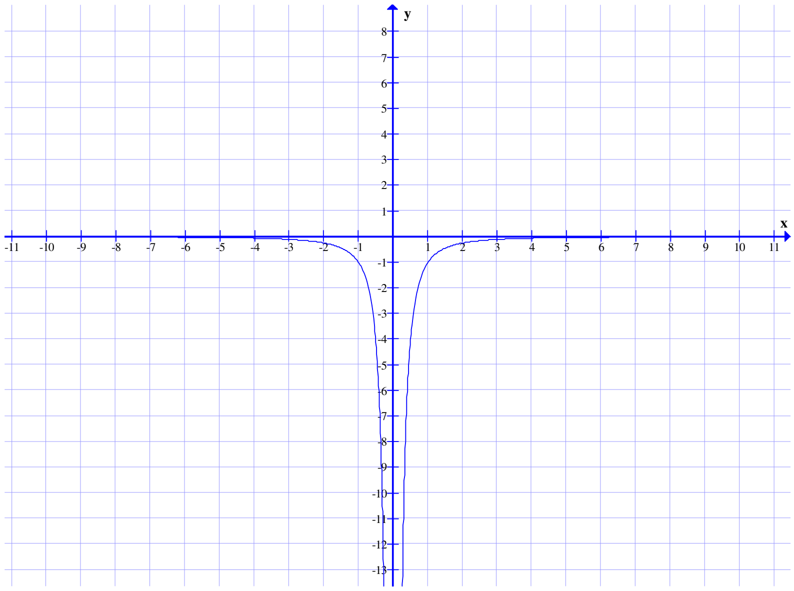
حد بی نهایت (حد نامتناهی)

در بخش حد هایی که وجود ندارند، رفتار تابع $f(x)=\frac{۱}{x^۲}$ را در اطراف $x=۰$ بررسی کردیم و به این نتیجه رسیدیم که وقتی متغیر x با مقادیر بزرگتر یا کوچکتر از ۰ به عدد ۰ نزدیک می شود $x^۲$ با مقادیر مثبت به صفر نزدیک خواهد شد و مقدار $\frac{۱}{x^۲}$ بدون هیچ محدودیتی و بطور بی کران افزایش می یابد. به طوری که $f(x)$ را می توان از هر عدد مثبتی بزرگتر کرد.



بنابراین در یک همسایگی محذوف صفر، $f(x)$ می تواند از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگتر شود. در این وضعیت گفته می شود وقتی x به صفر میل می کند، $f(x)$ به $+\infty$ میل می کند و از نماد گذاری $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=+\infty$ استفاده می کنیم.

به طریق مشابه تابع $f(x)=-\frac{۱}{x^۲}$ را در اطراف ۰ بررسی کردیم و به این نتیجه رسیدیم که در یک همسایگی محذوف صفر، $f(x)$ می تواند از هر عدد منفی دلخواهی ، کوچکتر شود. در این وضعیت گفته می شود وقتی x به صفر میل می کند، $f(x)$ به $-\infty$ میل می کند و از نماد گذاری $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=-\infty$ استفاده می کنیم.



حد نامتناهی

تعریف :

۱ : وقتی می نویسیم $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ یعنی می توانیم با نزدیک کردن متغیر x به عدد a (به قدر کافی) ، مقادیر $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگتر کنیم. در این حالت گوییم وقتی x به a میل می کند، $f(x)$ به $+\infty$ میل می کند.

۲ : وقتی می نویسیم $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ یعنی می توانیم با نزدیک کردن متغیر x به عدد a(به قدر کافی)،مقادیر $f(x)$ را از هر عدد منفی دلخواهی کوچکتر کنیم. در این حالت گوییم وقتی x به a میل می کند، $f(x)$ به $-\infty$ میل می کند.

توجه : در حالتی که تابع کسری باشد و مخرج آن به سمت صفر میل کند. توجه به علامت صورت و مخرج مهم است.

تمرین : حد های زیر را حساب کنید.

۱) $\lim\limits_{x \to ۴^-} \frac{[x]-۴}{x-۴}$

۲) $\lim\limits_{x \to ۰^-} \frac{\sin x}{۱-\cos x}$

۳) $\lim\limits_{x \to ۲^+} \frac{x-۱}{۴-x^۲}$

۴) $\lim\limits_{x \to ۱^-} \frac{x^۲+x+۱}{x^۲+۳x-۴}$

۵) $\lim\limits_{x \to ۱^+} \frac{۲}{[x]-۱}$

حل :

$$۱)\ \lim_{x\to ۴^-}\frac{[x]-۴}{x-۴}=\lim_{x\to ۴^-}\frac{۳-۴}{x-۴}=\lim_{x\to ۴^-}\frac{-۱}{x-۴}=\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۰^-}\frac{\sin x}{۱-\cos x}\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\lim_{x\to ۰^-}\frac{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}{۲\sin^۲\frac{x}{۲}}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\cos\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}}=\frac{+۱}{۰^-}=-\infty$$

$$۳)\ \lim_{x\to ۲^+}\frac{x-۱}{۴-x^۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x-۱}{(۲+x)(۲-x)}=\frac{۱}{۴(۰^+)}=+\infty$$

$$۴)\ \lim_{x\to ۱^-}\frac{x^۲+x+۱}{x^۲+۳x-۴}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{x^۲+x+۱}{(x+۴)(x-۱)}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{۳}{۵(۰^-)}=-\infty$$

$$۵)\ \lim_{x\to ۱^+}\frac{۲}{[x]-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{۲}{۱-۱}=\frac{۲}{۰}=\text{نامعین}$$

تعریف حد دنباله ای حد بی نهایت

۱) گوییم حد تابع f در a می شود $+\infty$ و می نویسیم $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ ، هر گاه به ازای هر دنباله از نقاط دامنه ی f مانند $\{a_n\}$ که به a همگرا است و $a_n\neq a$ داشته باشیم $\lim_{n\to\infty} f(a_n)=+\infty$

۲) گوییم حد تابع f در a می شود $-\infty$ و می نویسیم $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ ، هر گاه به ازای هر دنباله از نقاط دامنه ی f مانند $\{a_n\}$ که به a همگرا است و $a_n\neq a$ داشته باشیم $\lim_{n\to\infty} f(a_n)=-\infty$

تمرین : به کمک تعریف ثابت کنید.

الف) $\lim_{x\to ۰}\frac{۲}{x^۲}=+\infty$

ب) $\lim_{x\to ۱}\frac{-۱}{(x-۱)^۲}=-\infty$

حل الف : هر دنباله از نقاط دامنه ی f مانند $\{a_n\}$ که به صفر همگرا است و $a_n\neq ۰$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{۲}{a_n{}^۲}=+\infty$$

حل ب : هر دنباله از نقاط دامنه ی f مانند $\{a_n\}$ که به یک همگرا است و $a_n \neq ۱$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{-۱}{(a_n-۱)^۲} = -\infty$$

تمرین برای حل : حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to ۱^-} \frac{[x]-۱}{x^۲-۱}$$

حد در بی نهایت

۱) فرض کنیم تابع f در بازه ی $(c,+\infty)$ تعریف شده باشد. اگر هنگامی که متغیر x به $+\infty$ میل می کند[1]. مقادیر $f(x)$ به عدد L میل کنند. آنگاه گوییم حد در بی نهایت تابع f برابر L است و می نویسیم.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

۲) فرض کنیم تابع f در بازه ی $(-\infty,c)$ تعریف شده باشد. اگر هنگامی که متغیر x به $-\infty$ میل می کند[2]. مقادیر $f(x)$ به عدد L میل کنند. آنگاه گوییم حد در بی نهایت تابع f برابر L است و می نویسیم.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

قضیه : (قاعده ی جمله ی پرتوان) حد یک عبارت جبری مانند $a_nx^n + a_{n-۱}x^{n-۱} + \ldots + a_\circ$ وقتی $x \to \pm\infty$ با حد جمله ای از آن برابر است که بیشترین توان را داشته باشد.

اثبات :

$$\lim_{x\to\pm\infty} (a_nx^n + a_{n-۱}x^{n-۱} + \ldots + a_\circ) = \lim_{x\to\pm\infty} a_nx^n\left(\frac{a_nx^n}{a_nx^n} + \frac{a_{n-۱}x^{n-۱}}{a_nx^n} + \ldots + \frac{a_\circ}{a_nx^n}\right)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} a_nx^n\left(۱ + \frac{a_{n-۱}}{a_nx} + \ldots + \frac{a_\circ}{a_nx^n}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} a_nx^n \lim_{x\to\pm\infty}\left(۱ + \frac{a_{n-۱}}{a_nx} + \ldots + \frac{a_\circ}{a_nx^n}\right)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} a_nx^n(۱ + ۰ + \ldots + ۰) = \lim_{x\to\pm\infty} a_nx^n$$

تمرین : حد زیر را حساب کنید.

---

[1] . متغیر x به طور بی کران افزایش می یابد.

[2] . متغیر x به طور بی کران کاهش می یابد.

$$\lim_{x\to-\infty}(x-۳x^{۲}+۱)$$

حل :

$$\lim_{x\to-\infty}(x-۳x^{۲}+۱)=\lim_{x\to-\infty}(-۳x^{۲})=-۳(-\infty)^{۲}=-۳(+\infty)=-\infty$$

تمرین : حد های زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۳x^{۲}-۴x+۱}{-x^{۲}+۳}$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۳x+۱}{x^{۲}-۴x}$

ج) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-۴x^{۳}+۵x+۱}{۳x^{۲}-۴}$

حل :

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۳x^{۲}-۴x+۱}{-x^{۲}+۳}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۳x^{۲}}{-x^{۲}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۳}{-۱}=-۳$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۳x+۱}{x^{۲}-۴x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۳x}{x^{۲}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۳}{x}=\dfrac{۳}{+\infty}=۰$

ج) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-۴x^{۳}+۵x+۱}{۳x^{۲}-۴}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-۴x^{۳}}{۳x^{۲}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-۴x}{۳}=\dfrac{-۴}{۳}(-\infty)=+\infty$

نتیجه : بنابر قاعده ی جمله ی پرتوان ، می توان برای حد های توابع کسری وقتی که $x\to\pm\infty$ نوشت:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\ldots+a_۰}{b_nx^m+b_{n-۱}x^{m-۱}+\ldots+b_۰}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_nx^m}=\begin{cases}۰ & n<m\\ \dfrac{a}{b} & n=m\\ \infty & n>m\end{cases}$$

تمرین : حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}(۵x+\sqrt{x^{۲}+۳x+۱})$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}(5x+\sqrt{x^2+3x+1})$

حل الف :

$$\lim\limits_{x\to+\infty}(5x+\sqrt{x^2+3x+1})=\lim\limits_{x\to+\infty}(5x+\sqrt{x^2(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2})})=\lim\limits_{x\to+\infty}(5x+\sqrt{x^2})$$
$$=\lim\limits_{x\to+\infty}(5x+x)=\lim\limits_{x\to+\infty}6x=+\infty$$

حل ب :

$$\lim\limits_{x\to-\infty}(5x+\sqrt{x^2+3x+1})=\lim\limits_{x\to-\infty}(5x+\sqrt{x^2(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2})})=\lim\limits_{x\to-\infty}(5x+\sqrt{x^2})$$
$$=\lim\limits_{x\to-\infty}(5x-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}4x=-\infty$$

تمرین : حد های زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x+\sqrt{x^2+7}}{2x+\sqrt{x}}$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+\sqrt{x^2+5x}}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x}}$

ج) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x-1}{\sqrt{4x^2+x+1}}$

حل :

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x+\sqrt{x^2+7}}{2x+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x+\sqrt{x^2}}{2x+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x+x}{2x+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x}{2x}=3$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+\sqrt{x^2+5x}}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x}{x}=3$

ج) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x-1}{\sqrt{4x^2+x+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x}{\sqrt{4x^2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x}{-2x}=-\frac{3}{2}$

نتیجه : (هم ارزی نیوتنی)

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{a}(x+\frac{b}{2a})$$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{a}(x+\frac{b}{2a})$$

و اگر $a<0$ تابع حد ندارد.

تمرین : حد های زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+3x+1}$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+3x+1}-6x+1$

ج) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{9x^2+1}+3x+7)$

حل الف :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+3x+1}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4}(x+\frac{3}{2(4)})=\lim_{x\to+\infty}2(x+\frac{3}{8})=\lim_{x\to+\infty}2x=+\infty$$

حل ب :

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+3x+1}-6x+1=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{4}(x+\frac{3}{2(4)})-6x+1=\lim_{x\to-\infty}-2x-\frac{3}{4}-6x+1$$
$$=\lim_{x\to-\infty}-8x=+\infty$$

حل ج :

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{9x^2+1}+3x+7)=\lim_{x\to-\infty}(-\sqrt{9}(x+\frac{0}{2(9)})+3x+7)=\lim_{x\to-\infty}(-3x+3x+7)=7$$

تعریف دنباله ای حد در بی نهایت

اگر تابع f از بالا بی کران باشد، حد تابع f وقتی $x \to +\infty$ برابر L است و می نویسیم $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ هرگاه

به ازای هر دنباله از نقاط دامنه ی f مانند $\{a_n\}$ که به $+\infty$ واگرا است، داشته باشیم : $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = L$

اگر تابع f از پایین بی کران باشد، حد تابع f وقتی $x \to -\infty$ برابر L است و می نویسیم $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ هرگاه

به ازای هر دنباله از نقاط دامنه ی f مانند $\{a_n\}$ که به $-\infty$ واگرا است، داشته باشیم : $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = L$

تمرین : اگر r یک عدد گویای مثبت باشد، ثابت کنید.

الف) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{۱}{x^r} = ۰$ ب) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{۱}{x^r} = ۰$

حل : برای هر دنباله ی دلخواه $\{a_n\}$ که به $+\infty$ یا $-\infty$ واگرا است، داریم:

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{۱}{(a_n)^r} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{۱}{a_n}\right)^r = ۰$$

***

حد بی نهایت در بی نهایت

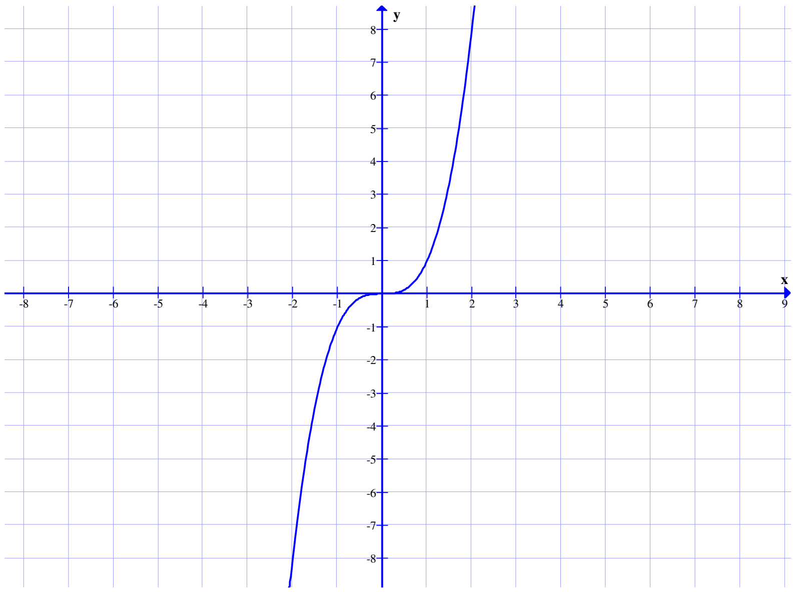
۱) فرض کنیم تابع f در بازه ی $(c,+\infty)$ تعریف شده باشد. اگر هنگامی که متغیر x به $+\infty$ میل می کند. مقادیر $f(x)$ نیز به $+\infty$ میل کنند. در این صورت می نویسیم. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

۲) فرض کنیم تابع f در بازه ی $(-\infty,c)$ تعریف شده باشد. اگر هنگامی که متغیر x به $-\infty$ میل می کند. مقادیر $f(x)$ به $+\infty$ میل کنند. در این صورت می نویسیم. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

۳) فرض کنیم تابع f در بازه ی $(c,+\infty)$ تعریف شده باشد. اگر هنگامی که متغیر x به $-\infty$ میل می کند. مقادیر $f(x)$ به $+\infty$ میل کنند. در این صورت می نویسیم. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

۴) فرض کنیم تابع f در بازه ی $(-\infty,c)$ تعریف شده باشد. اگر هنگامی که متغیر x به $-\infty$ میل می کند. مقادیر $f(x)$ نیز به $-\infty$ میل کنند. در این صورت می نویسیم. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

برای مثال تابع $f(x)=x^۳$ را در نظر بگیرید. با توجه به نمودار این تابع واضح است که



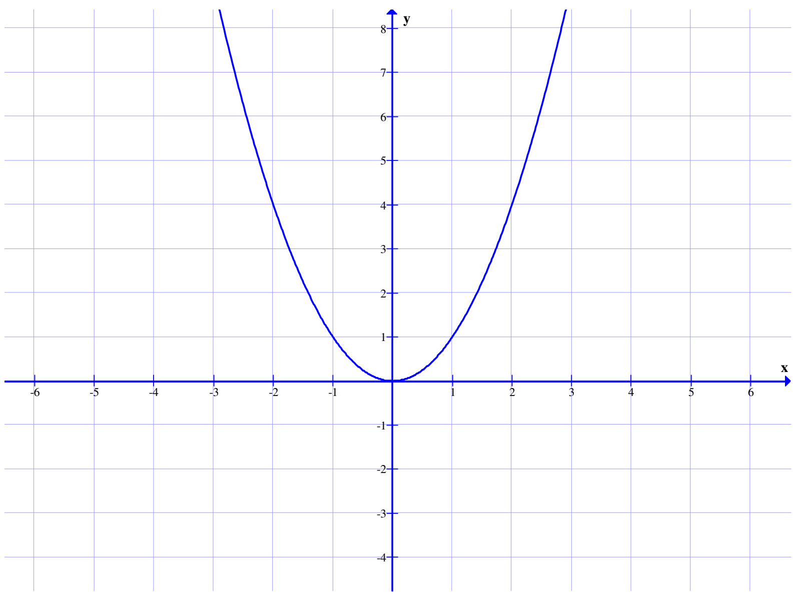
وقتی متغیر x بزرگ می شود، مقادیر $f(x)$ نیز بزرگ می شوند. پس :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

همچنین وقتی متغیر x کوچک می شود، مقادیر $f(x)$ نیز کوچک می شوند. پس :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

برای تابع $f(x)=x^۲$ نیز می توان نوشت:



$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$

تمرین : به کمک تعریف دنباله ای ثابت کنید که $\lim_{x\to-\infty} cx^{۲}=-\infty$ (c یک عدد منفی است.)

حل : به ازای هر دنباله ی دلخواه مانند $\{a_n\}$ از دامنه ی f ، واگرا به $-\infty$ داریم.

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{n\to\infty} c(a_n)^{۲}=c(\lim_{n\to\infty} a_n{}^{۲})=c(+\infty)=-\infty$$

بنابراین $\lim_{x\to-\infty} cx^{۲}=-\infty$

***

دیگر حالت های مبهم

گاهی در محاسبه ی حد توابع به یکی از حالت های $\infty-\infty$ و $\infty\times ۰$ و $\frac{\infty}{\infty}$ برخورد می کنیم. این حالت ها نیز مبهم محسوب می شوند و برای محاسبه ی مقدار حد لازم است با انجام اعمال جبری، ابتدا به حالت $\frac{۰}{۰}$ تبدیل و سپس رفع ابهام شوند.

تمرین : حد های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim_{x\to ۲} (\frac{۱}{x-۲}-\frac{۴}{x^{۲}-۴})$

۲) $\lim_{x\to ۰^+} (\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x^{۲}})$

۳) $\lim_{x\to+\infty} (x-\sqrt{x^{۲}-۱۰x-۳})$

۴) $\lim_{x\to ۰} \frac{\cot x}{\cot ۳x}$

۵) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-۲x+۳}{\sqrt{۹x^{۲}+x+۱}}$

۶) $\lim_{x\to ۰} \sin ۲x.\cot ۳x$

۷) $\lim_{x\to ۱} (۱-x)\tan\frac{\pi}{۲}x$

حل ۱:

$$\lim_{x\to ۲}\left(\frac{۱}{x-۲}-\frac{۴}{x^{۲}-۴}\right)$$

$$\overset{\infty-\infty}{=}\lim_{x\to ۲}\left(\frac{(x+۲)-۴}{x^{۲}-۴}\right)=\lim_{x\to ۲}\left(\frac{x-۲}{x^{۲}-۴}\right)=\lim_{x\to ۲}\left(\frac{x-۲}{(x-۲)(x+۲)}\right)=\lim_{x\to ۲}\left(\frac{۱}{x+۲}\right)=\frac{۱}{۴}$$

حل ۲:

$$\lim_{x\to ۰^{+}}\left(\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x^{۲}}\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim_{x\to ۰^{+}}\left(\frac{x-۱}{x^{۲}}\right)=\frac{-۱}{۰^{+}}=-\infty$$

حل ۳: روش اول :

$$\lim_{x\to +\infty}\left(x-\sqrt{x^{۲}-۱۰x-۳}\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim_{x\to +\infty}\left(x-\sqrt{x^{۲}-۱۰x-۳}\right)\times\frac{(x+\sqrt{x^{۲}-۱۰x-۳})}{(x+\sqrt{x^{۲}-۱۰x-۳})}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^{۲}-(x^{۲}-۱۰x-۳)}{x+\sqrt{x^{۲}-۱۰x-۳}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{۱۰x+۳}{x+\sqrt{x^{۲}-۱۰x-۳}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{۱۰x}{x+\sqrt{x^{۲}}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{۱۰x}{x+|x|}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{۱۰x}{x+x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{۱۰x}{۲x}=۵$$

روش دوم :

$$\lim_{x\to +\infty}\left(x-\sqrt{x^{۲}-۱۰x-۳}\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim_{x\to +\infty}\left(x-\sqrt{۱}\left(x+\frac{-۱۰}{۲(۱)}\right)\right)=\lim_{x\to +\infty}\left(x-x+\frac{۱۰}{۲}\right)=۵$$

حل۴ :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\cot x}{\cot ۳x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{۱}{\tan x}}{\frac{۱}{\tan ۳x}}=\lim_{x\to ۰}\frac{\tan ۳x}{\tan x}\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\lim_{x\to ۰}۳\times\frac{\tan ۳x}{۳x}\times\frac{x}{\tan x}=۳(۱)(۱)=۳$$

حل ۵ : روش اول:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{-۲x+۳}{\sqrt{۹x^{۲}+x+۱}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to -\infty}\frac{-۲x}{\sqrt{۹x^{۲}}}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-۲x}{|۳x|}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-۲x}{-۳x}=\frac{۲}{۳}$$

روش دوم :

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{-۲x+۳}{\sqrt{۹x^{۲}+x+۱}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to -\infty}\frac{-۲x}{-\sqrt{۹}\left(x+\frac{۱}{۲(۹)}\right)}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-۲x}{-۳x-\frac{۱}{۶}}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-۲x}{-۳x}=\frac{۲}{۳}$$

حل ۶:

$$\lim_{x\to 0}\sin 2x.\cot 3x \overset{0\times\infty}{=} \lim_{x\to 0}\sin 2x\times\frac{1}{\tan 3x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\times\frac{3x}{\tan 3x}\times\frac{2}{3}=(1)(1)(\frac{2}{3})=\frac{2}{3}$$

حل ۷ :

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi}{2}x \overset{0\times\infty}{=} \lim_{x\to 1}(1-x)\times\frac{1}{\cot\frac{\pi}{2}x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1}(1-x)\times\frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}x)}$$

$$=\lim_{x\to 1}(1-x)\times\frac{1}{\tan\frac{\pi}{2}(1-x)}=\lim_{t\to 0}t\times\frac{1}{\tan\frac{\pi}{2}t}=\frac{1}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$$

توجه : در ریاضیات عالی ثابت می شود که $\lim_{u\to+\infty}(1+\frac{1}{u})^u=e$ که در آن e عدد نپرین می باشد.

تمرین : حاصل حد های زیر را به دست آورید.

الف) $\lim_{x\to+\infty}(\frac{x+1}{x})^{2x}=$

ب) $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{3x})^{x}=$

ج) $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{2x})^{-3x}=$

د) $\lim_{x\to+\infty}(\frac{x}{x+1})^{5x}=$

***

حل چند تمرین مهم :

۱ : حد های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim_{x\to 0}\tan x.\cot x$

۲) $\lim_{x\to 0}(\frac{3x-4}{x^2-2x}-\frac{x+2}{x^2+x})$

۳) $\lim_{x\to 0^+}\sin 4x.(\cot 2x-\cot x)$

۴) $\lim_{x\to 4}(2-\sqrt{x})\tan\frac{\pi}{8}x$

حل :

$$۱)\ \lim_{x\to ۰} \tan x.\cot x \overset{۰\times\infty}{=} \lim_{x\to ۰} \tan x \times \frac{۱}{\tan x} = ۱$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۰} \left(\frac{۳x-۴}{x^۲-۲x} - \frac{x+۲}{x^۲+x}\right) = \lim_{x\to ۰} \frac{(۳x-۴)(x+۱)-(x+۲)(x-۲)}{x(x-۲)(x+۱)} = \lim_{x\to ۰} \frac{۲x^۲-x}{x(x-۲)(x+۱)}$$

$$= \lim_{x\to ۰} \frac{x(۲x-۱)}{x(x-۲)(x+۱)} = \lim_{x\to ۰} \frac{(۲x-۱)}{(x-۲)(x+۱)} = \frac{(-۱)}{(-۲)(۱)} = \frac{۱}{۲}$$

$$۳)\ \lim_{x\to ۰^+} \sin ۴x.(\cot ۲x - \cot x) = \lim_{x\to ۰^+} \sin ۴x.\left(\frac{\cos ۲x}{\sin ۲x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

$$= \lim_{x\to ۰^+} \sin ۴x.\left(\frac{\sin x\cos ۲x - \cos x \sin ۲x}{\sin x \sin ۲x}\right) = \lim_{x\to ۰^+} \sin ۴x.\left(\frac{\sin(x-۲x)}{\sin x\sin ۲x}\right)$$

$$= \lim_{x\to ۰^+} \sin ۴x.\left(\frac{-\sin x}{\sin x\sin ۲x}\right) = \lim_{x\to ۰^+} \sin ۴x.\left(\frac{-۱}{\sin ۲x}\right) = \lim_{x\to ۰^+} ۲\sin ۲x.\cos ۲x\left(\frac{-۱}{\sin ۲x}\right)$$

$$= \lim_{x\to ۰^+} (-۲\cos ۲x) = -۲(۱) = -۲$$

$$۴)\ \lim_{x\to ۴} (۲-\sqrt{x})\tan\frac{\pi}{۸}x = \lim_{x\to ۴} (۲-\sqrt{x}) \times \frac{۱}{\cot\frac{\pi}{۸}x} = \lim_{x\to ۴} (۲-\sqrt{x}) \times \frac{۱}{\tan(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۸}x)}$$

$$= \lim_{x\to ۴} (۲-\sqrt{x}) \times \frac{۲+\sqrt{x}}{۲+\sqrt{x}} \times \frac{۱}{\tan\frac{\pi}{۸}(۴-x)} = \lim_{x\to ۴} \frac{۴-x}{۲+\sqrt{x}} \times \frac{۱}{\tan\frac{\pi}{۸}(۴-x)}$$

$$= \lim_{x\to ۴} \frac{۴-x}{\tan\frac{\pi}{۸}(۴-x)} \times \frac{۱}{۲+\sqrt{x}} = \lim_{t\to ۰} \frac{t}{\tan\frac{\pi}{۸}(t)} \times \lim_{x\to ۴} \frac{۱}{۲+\sqrt{x}} = \frac{۸}{\pi} \times \frac{۱}{۲+۲} = \frac{۲}{\pi}$$

توجه: در توابع رادیکالی اگر توان عبارت زیر رادیکال با فرجه ی رادیکال برابر بوده و $x \to \pm\infty$ میل کند، هم ارزی زیر قابل استفاده است.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[n]{ax^n + bx^{n-۱} + \ldots} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[n]{a}\,\left| x + \frac{b}{na} \right|$$

در صورتی که فرجه ی رادیکال فرد باشد، احتیاج به قرار دادن قدر مطلق نیست.

$$۴)\ \lim_{x\to +\infty} (۷^x - ۲^x)$$

حل:

$$\lim_{x\to+\infty}(۷^x-۲^x)=\lim_{x\to+\infty}۷^x[۱-(\frac{۲}{۷})^x]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}۷^x[۱-\lim_{x\to+\infty}(\frac{۲}{۷})^x]=۷^{+\infty}[۱-(\frac{۲}{۷})^{+\infty}]=+\infty(۱-۰)=+\infty$$

۵) $\lim_{x\to-\infty}(۷^x+۲^x)$

حل:

$$\lim_{x\to-\infty}(۷^x+۲^x)=\lim_{x\to-\infty}۲^x[(\frac{۷}{۲})^x+۱]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}۲^x[\lim_{x\to-\infty}(\frac{۷}{۲})^x+۱]=۲^{-\infty}[(\frac{۷}{۲})^{-\infty}+۱]=(\frac{۱}{۲})^{+\infty}[(\frac{۲}{۷})^{+\infty}+۱]=۰(۰+۱)=۰$$

توجه: در عبارت هایی که x در توان ظاهر می شود.اگر $x\to+\infty$ جمله ای که پایه اش بزرگتر است و اگر $x\to-\infty$ جمله ای که پایه اش کوچکتر است، در محاسبه نقش اصلی را دارند.

۶) $\lim_{x\to۱}(\frac{۲}{x^۲-۱}-\frac{۱}{x-۱})$

جواب: $-\frac{۱}{۲}$

۷) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^۲+۴x-۱}-x+۱)$

جواب:۳

۸) $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt[۳]{x^۳+۶x^۲-۱}-\sqrt[۳]{x^۳-۶x+۱})$

جواب:۲

۹) $\lim_{x\to+\infty}(\frac{x+۲}{x+۱})^{۲x+۲}$

جواب: $e^۲$

۲ : حد های زیر را حساب کنید.

$$۱)\ \lim_{x\to ۲^+}\frac{\sqrt{x^۲-۴}}{x-۲}$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۲^-}\frac{[x]-۲}{x-۲}$$

$$۳)\ \lim_{x\to \pi^+}\cot x$$

$$۴)\ \lim_{x\to (\frac{۳\pi}{۲})^-}\tan x$$

$$۵)\ \lim_{x\to ۴^-}\frac{x-۲}{x^۲-۲x-۸}$$

$$۶)\ \lim_{x\to ۲}\frac{(-۱)^{[x]+۱}}{x^۲-۴}$$

$$۷)\ \lim_{x\to (\frac{\pi}{۲})^+}\frac{\tan x}{\cot x}$$

$$۸)\ \lim_{x\to ۰}(\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x^۲})$$

$$۹)\ \lim_{x\to -\infty}(\sqrt{x^۲+۳x}-\sqrt{x^۲-۳x})$$

$$۱۰)\ \lim_{x\to +\infty}[\frac{x^۲+x+۱}{x^۲+x+۳}]$$

$$۱۱)\ \lim_{x\to -\infty}\frac{x\tan^{-۱}x}{۲-x}$$

$$۱۲)\ \lim_{x\to +\infty}(\sin\sqrt{x+۱}-\sin\sqrt{x})$$

حل :

$$۱)\ \lim_{x\to ۲^+}\frac{\sqrt{x^۲-۴}}{x-۲}\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\lim_{x\to ۲^+}\frac{(\sqrt{x^۲-۴})(\sqrt{x^۲-۴})}{(x-۲)(\sqrt{x^۲-۴})}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x^۲-۴}{(x-۲)(\sqrt{x^۲-۴})}$$

$$=\lim_{x\to ۲^+}\frac{(x-۲)(x+۲)}{(x-۲)(\sqrt{x^۲-۴})}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x+۲}{(\sqrt{x^۲-۴})}=\frac{۲^++۲}{(\sqrt{(۲^+)^۲-۴})}=\frac{۴}{\sqrt{۰^+}}=\frac{۴}{۰^+}=+\infty$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۲^-}\frac{[x]-۲}{x-۲}=\frac{[۲^-]-۲}{۲^--۲}=\frac{۱-۲}{۰^-}=+\infty$$

$$۳)\ \lim_{x\to \pi^+}\cot x=\lim_{x\to \pi^+}\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\cos(\pi^+)}{\sin(\pi^+)}=\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$$

$$۴)\ \lim_{x\to (\frac{۳\pi}{۲})^-}\tan x=\lim_{x\to (\frac{۳\pi}{۲})^-}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\sin(\frac{۳\pi}{۲})^-}{\cos(\frac{۳\pi}{۲})^-}=\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$$

$$5)\ \lim_{x\to 4^-}\frac{x-2}{x^2-2x-8}=\lim_{x\to 4^-}\frac{x-2}{(x-4)(x+2)}=\frac{4^- -2}{(4^- -4)(4^- +2)}=\frac{2}{(0^-)(6)}=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

$$6)\ \lim_{x\to 2}\frac{(-1)^{[x]+1}}{x^2-4}=?$$

حد راست $\lim_{x\to 2^+}\frac{(-1)^{[x]+1}}{x^2-4}=\frac{(-1)^{[2^+]+1}}{(2^+)^2-4}=\frac{(-1)^{2+1}}{4^+-4}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$

حد چپ $\lim_{x\to 2^-}\frac{(-1)^{[x]+1}}{x^2-4}=\frac{(-1)^{[2^-]+1}}{(2^-)^2-4}=\frac{(-1)^{1+1}}{4^--4}=\frac{1}{0^-}=-\infty$

$$\to \lim_{x\to 2}\frac{(-1)^{[x]+1}}{x^2-4}=-\infty$$

$$7)\ \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\frac{\tan x}{\cot x}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\frac{\tan x}{\frac{1}{\tan x}}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}(\tan^2 x)=(+\infty)^2=+\infty$$

$$8)\ \lim_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})\overset{\infty-\infty}{=}\lim_{x\to 0}(\frac{x-1}{x^2})=\lim_{x\to 0}\frac{0-1}{(0)^2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

$$9)\ \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-3x})$$

$$\overset{\infty-\infty}{=}\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-3x})(\frac{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-3x}}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-3x}})$$

$$=\lim_{x\to-\infty}(\frac{(x^2+3x)-(x^2-3x)}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-3x}})=\lim_{x\to-\infty}(\frac{6x}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-3x}})$$

$$=\lim_{x\to-\infty}(\frac{6x}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}})=\lim_{x\to-\infty}(\frac{6x}{|x|+|x|})=\lim_{x\to-\infty}(\frac{6x}{-x-x})=\lim_{x\to-\infty}(\frac{6x}{-2x})=-3$$

$$10)\ \lim_{x\to+\infty}[\frac{x^2+x+1}{x^2+x+3}]=\lim_{x\to+\infty}[\frac{x^2+x+3-2}{x^2+x+3}]=\lim_{x\to+\infty}[\frac{x^2+x+3}{x^2+x+3}+\frac{-2}{x^2+x+3}]=$$

$$= \lim_{x\to+\infty}[۱+\frac{-۲}{x^۲+x+۳}] = \lim_{x\to+\infty}(۱+[\frac{-۲}{x^۲+x+۳}]) = ۱+[\frac{-۲}{+\infty}] = ۱+(-۱) = ۰$$

$$۱۱)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x\tan^{-۱}x}{۲-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\tan^{-۱}x}{x(\frac{۲}{x}-۱)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\tan^{-۱}x}{(\frac{۲}{x}-۱)} = \frac{\tan^{-۱}(-\infty)}{(\frac{۲}{-\infty}-۱)}$$

$$= \frac{(-\frac{\pi}{۲})^+}{(۰-۱)} = -(-\frac{\pi}{۲})^+ = (\frac{\pi}{۲})^-$$

$$۱۲)\ \lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+۱}-\sin\sqrt{x}) = \lim_{x\to+\infty} ۲\sin(\frac{\sqrt{x+۱}-\sqrt{x}}{۲})\cos(\frac{\sqrt{x+۱}+\sqrt{x}}{۲})$$

$$= \lim_{x\to+\infty} ۲\sin(\frac{\sqrt{x+۱}-\sqrt{x}}{۲}\times\frac{\sqrt{x+۱}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+۱}+\sqrt{x}})\cos(\frac{\sqrt{x+۱}+\sqrt{x}}{۲})$$

$$= \lim_{x\to+\infty} ۲\sin(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{\sqrt{x+۱}+\sqrt{x}})\cos(\frac{\sqrt{x+۱}+\sqrt{x}}{۲}) = ۲\times۰\times k = ۰$$

توجه : $\cos(\frac{\sqrt{x+۱}+\sqrt{x}}{۲})$ کراندار است.

۳ : حد تابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

$$\lim_{x\to۱^+}\frac{[x]^۲-۱}{[x]-۱}$$

حل :

$$[x]-۱=۰ \to [x]=۱ \to ۱\le x<۲$$

$$D_f = R-[۱,۲)$$

لذا تابع در همسایگی راست عدد ۱ تعریف نشده و نمی توان از این تابع صحبت کرد.

توجه : برخی به اشتباه حد تابع را به شکل زیر محاسبه می کنند.

$$\lim_{x\to۱^+}\frac{[x]^۲-۱}{[x]-۱} = \lim_{x\to۱^+}\frac{([x]-۱)([x]+۱)}{[x]-۱} = \lim_{x\to۱^+}([x]+۱) = [۱^+]+۱ = ۱+۱ = ۲$$

۴ : در نظریه ی نسبیت، جرم ذره ای با سرعت v برابر است با $m = \frac{m_\circ}{\sqrt{۱-(\frac{v}{c})^۲}}$. که در آن $m_\circ$ جرم سکون ذره

است و c سرعت نور می باشد. وقتی که $v \to c^-$ چه اتفاقی می افتد؟ توضیح دهید.

حل : وقتی که $v \to c^-$ یعنی $v < c$. پس $(\frac{v}{c})^۲ \to ۱^-$ لذا زیر رادیکال به سمت ۰^+ میل می کند و چون $m_\circ > ۰$

پس $m \to +\infty$ یعنی جرم ذره خیلی خیلی بزرگ می شود.

۵ : ثابت کنید که اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ و تابع g در یک همسایگی محذوف a کراندار باشد.آنگاه

$$\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = +\infty$$

است و سپس $\lim\limits_{x\to a} (\frac{۱}{x} + [x]) = +\infty$ را پیدا کنید.

حل : چون تابع g در یک همسایگی محذوف a کراندار است. پس وجود دارد عدد مثبت k که :

$$-k \le g(x) \le k$$

$$\xrightarrow{+f(x)} f(x) - k \le f(x) + g(x) \le f(x) + k$$

$$\to \lim_{x\to a} (f(x) - k) \le \lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) \le \lim_{x\to a} (f(x) + k)$$

$$\xrightarrow{\lim\limits_{x\to a} (f(x)-k) = \lim\limits_{x\to a} (f(x)+k) = +\infty} \lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = +\infty$$

تابع $g(x) = [x]$ در یک همسایگی راست صفر کراندار است و $\lim\limits_{x\to a} \frac{۱}{x} = +\infty$ لذا طبق فوق، داریم.

$$\lim_{x\to a} (\frac{۱}{x} + [x]) = +\infty$$

***

تمرین برای حل :

۱ : اگر به ازای هر $x>10$ داشته باشیم.

$$\frac{2x-1}{x}<f(x)<\frac{2x^2+3x}{x^2}$$

آنگاه حد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ را پیدا کنید.

۲ : حد های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-3x+2}$ ۲) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$ ۳) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x+\sqrt{x^2+8x+3}}{7x+\sqrt[3]{x^3+6x^2+1}}$

۳ : حد های زیر را حساب کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x^3+x+1}{x^3-x+2}$ ۴) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^3-x+1}{x^2+x-1}$ ۷) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{x^2+3x-1}$

۲) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x^2+1}}{2x-3}$ ۵) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+2x-1}}$ ۸) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+2x})$

۳) $\lim\limits_{x\to-\infty}\cos\frac{1}{x}$ ۶) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+3}}$ ۹) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{8x^3+2x^2}-2x)$

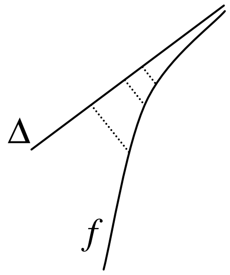
۴ : مقدار k را به قسمی تعیین کنیدکه حد تابع $f(x)=\frac{2x^4+x^3-1}{kx^4+x^2+1}$ وقتی که $x\to\pm\infty$ برابر۴ باشد.

۵ : مقدار n و m را چنان بیابید. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{mx^2-1}{2x^n-3x-2}=1$

***

مجانب ها

مجانب خطوط مستقیمی هستند که رفتار تابع در دور دست ها را مشخص می کنند. در واقع فاصله ی نقـاط نمـودار تـابع از خط مجانب مانند شکل مقابل در دور دست کم و کمتر می شود و به صفر میل می کند. مجانب هـا سه نوع اند.

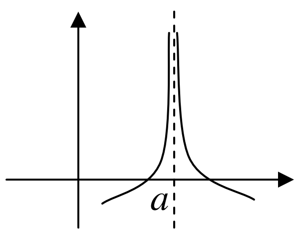
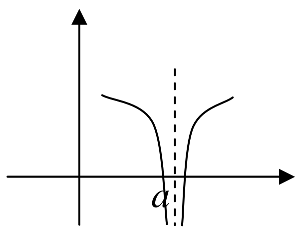
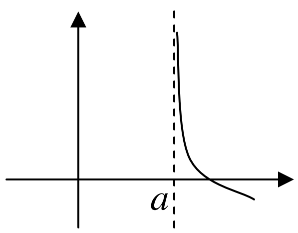
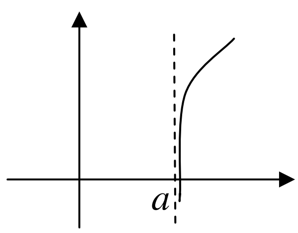
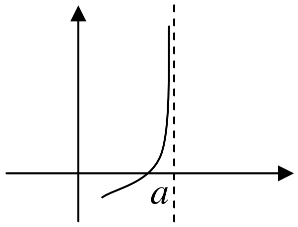
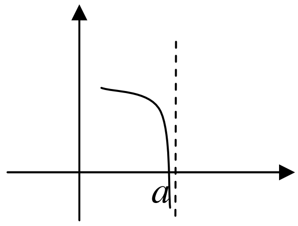


۱) مجانب قائم　　　　۲) مجانب افقی　　　　۳) مجانب مایل

در ادامه هر یک را بررسی و روش محاسبه ی آنها را بیان می کنیم.

مجانب قائم

فرض کنید که a یک عدد حقیقی باشد، آنگاه خط $x=a$ را مجانب قائم نمودار تابع f می گوییم، هرگـاه یکـی از حالـت های زیر برقرار باشد.

۱) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ 	۲) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ 
۳) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ 	۴) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ 
۵) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ 	۶) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ 

توجه : شرط اینکه خط $x=a$ مجانب قائم تابع f باشد،آن است که تابع در $x=a$ تعریف نشده باشد و وقتی که x از دو طرف و یا فقط از طرف راست و یا فقط از طرف چپ به a میل کند، $f(x)$ بیکران افزایش یا کاهش یابد. لذا مجانب قائم معمولاً در توابع کسری و یا توابع لگاریتمی وجود دارد.

برای محاسبه ی مجانب قائم در توابع کسری ، مخرج کسر را مساوی صفر قرار می دهیم، ریشه های مخرج مجانب قائم تابع f هستند، به شرط اینکه این ریشه ها ، صورت را صفر نکنند[1].

نکته : اگر برد تابع محدود باشد، تابع دارای مجانب قائم نمی باشد.

تمرین: مجانب های قائم توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

$$۱)\ f(x)=\frac{x^{۲}-۲x+۲}{x^{۳}-۸}$$

$$۲)\ f(x)=\frac{x^{۲}-۲x+۱}{x^{۲}-x}$$

$$۳)\ f(x)=\frac{\sqrt{x+۱}}{x^{۲}-۴}$$

$$۴)\ f(x)=\sqrt{\frac{۱-x}{۱+x}}$$

$$۵)\ f(x)=\tan x$$

$$۶)\ f(x)=\cot x$$

$$۷)\ f(x)=\tan^{-۱} x$$

$$۸)\ f(x)=\frac{x^{۲}+x-۲}{x^{۲}-۲x+۱}$$

$$۹)\ f(x)=\frac{x^{۲}+x-۲}{x^{۲}+۲x-۳}$$

$$۱۰)\ f(x)=\log^{x-۱}$$

حل ۱:

$$x^{۳}-۸=۰\rightarrow x=۲$$

خط $x=۲$ مجانب قائم است.

حل۲ :

$$x^{۲}-x=۰\rightarrow x(x-۱)=۰\rightarrow x=۰\ ,\ x=۱$$

---

[1] . در صورتی که صورت کسر توسط این ریشه صفر شود، حالت $\frac{۰}{۰}$ اتفاق می افتد که بعد از رفع ابهام، اگر حاصل حد تابع f در $x=a$ برابر $+\infty$ یا $-\infty$ شود، باز هم خط $x=a$ مجانب قائم نمودار تابع f است.

خط $x=۰$ مجانب قائم است ولی خط $x=۱$ مجانب قائم نیست، چون ریشه ی صورت نیز می باشد.

حل۳ :

$$D_f=[۱,+\infty)-\{۲\}$$

$$x^۲-۴=۰\rightarrow x=۲\ ,\ \ x=-۲$$

خط $x=۲$ مجانب قائم است ولی خط $x=-۲$ مجانب قائم نیست، چون تابع در همسایگی این عدد تعریف نشده است.

حل۴ :

$$D_f=(-۱,۱]$$

$$۱+x=۰\rightarrow x=-۱$$

خط $x=-۱$ مجانب قائم است، چون تابع در همسایگی راست این عدد تعریف شده است.

حل ۵:

$$f(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cos x=۰\rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$$

برای هر $k\in Z$ خطوط $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$ مجانب قائم هستند.

حل۶ :

$$f(x)=\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sin x=۰\rightarrow x=k\pi$$

برای هر $k\in Z$ خطوط $x=k\pi$ مجانب قائم هستند.

حل۷ :

$$R_f=(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$$

چون برد تابع محدود است، لذا تابع مجانب قائم ندارد.

حل۸ :

$$x^{۲}-۲x+۱=۰ \to (x-۱)^{۲}=۰ \to x=۱$$

$$f(x)=\frac{x^{۲}+x-۲}{x^{۲}-۲x+۱}=\frac{(x-۱)(x+۲)}{(x-۱)^{۲}}=\frac{x+۲}{x-۱}$$

لذا $x=۱$ مجانب قائم است.

حل ۹ :

$$f(x)=\frac{x^{۲}+x-۲}{x^{۲}+۲x-۳}$$

$$x^{۲}+۲x-۳=۰ \to (x+۳)(x-۱)=۰ \to x=-۳ \ , \ x=۱$$

$$f(x)=\frac{x^{۲}+x-۲}{x^{۲}+۲x-۳}=\frac{(x+۲)(x-۱)}{(x+۳)(x-۱)}=\frac{x+۲}{x+۳}$$

لذا $x=-۳$ مجانب قائم است.

حل ۱۰ :

$$f(x)=\log^{x-۱}$$

$$x-۱>۰ \to x>۱ \to D_f=(۱,+\infty)$$

$$x-۱=۰ \to x=۱$$

تمرین: مجانب های قائم تابع زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

$$f(x)=\frac{x^{۲}+|x|}{x^{۲}-|x|}$$

حل:

$$x^{۲}-|x|=۰ \to x^{۲}=|x| \to \begin{cases} x=۰ \\ x=۱ \\ x=-۱ \end{cases}$$

$$D_f=R-\{۰,۱,-۱\}$$

و چون $x=۰$ ریشه ی صورت است لذا فقط دو خط $x=۱$ و $x=-۱$ مجانب قائم هستند.

توجه: برای تعیین مجانب های قائم بهتر است که دامنه ی تابع را تعیین کنید.

تمرین: تعیین کنید که منحنی تابع $y=\frac{\sqrt{-x^{۲}+۳x+۴}}{x^{۲}-۴x+۳}$ چند مجانب قائم دارد.

حل:

$$-x^{۲}+۳x+۴\geq ۰\rightarrow -۱\leq x\leq ۴$$
$$x^{۲}-۴x+۳=۰\rightarrow x=۱,x=۳$$
$$\Rightarrow D_f=[-۱,۱)\cup(۱,۳)\cup(۳,۴]$$

مخرج کسر دو ریشه $x=۳$ و $x=۱$ دارد که همسایگی آنها جزو دامنه ی تابع است.پس به عنوان مجانب قائم قابل قبول هستند.

تمرین: منحنی تابع $y=\frac{\sqrt{۲x-۷}}{۲x^{۲}-۳x+۱}$ چند مجانب قائم دارد.

حل:

$$۲x-۷\geq ۰\rightarrow x\geq \frac{۷}{۲}$$
$$۲x^{۲}-۳x+۱=۰\rightarrow x=۱,x=\frac{۱}{۲}$$
$$\Rightarrow D_f=[\frac{۷}{۲},+\infty)$$

مخرج کسر دو ریشه ی $x=\frac{۱}{۲}$ و $x=۱$ دارد که تابع در همسایگی آنها تعریف نشده است.پس به عنوان مجانب قائم قابل قبول نیستند.

تمرین: منحنی تابع $y=\frac{۲\tan x}{۲\sin x-۱}$ در بازه ی $[۰,۲\pi]$ چند مجانب قائم دارد.

حل:

$$y=\frac{۲\sin x}{\cos x(۲\sin x-۱)}$$

حال کافی است که ریشه های مخرج را تعیین کنیم.

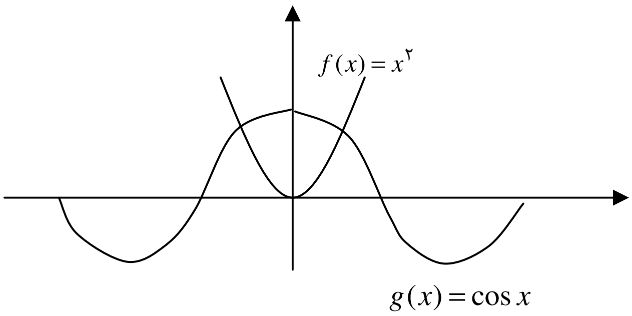
$$\cos x(۲\sin x-۱)=۰$$

$$\begin{cases} \cos x=۰ \to x=k\pi+\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x=\frac{\pi}{۲}, x=\frac{۳\pi}{۲} \\ ۲\sin x-۱=۰ \to \sin x=\frac{۱}{۲} \to \begin{cases} x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶} \\ x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶} \end{cases} \to x=\frac{\pi}{۶}, x=\frac{۵\pi}{۶} \end{cases}$$

ریشه های مخرج هیچکدام ریشه ی صورت نیست و لذا همگی مجانب قائم هستند.

تمرین: منحنی تابع $y=\dfrac{۱}{x^۲-\cos x}$ چند مجانب قائم دارد.

حل:



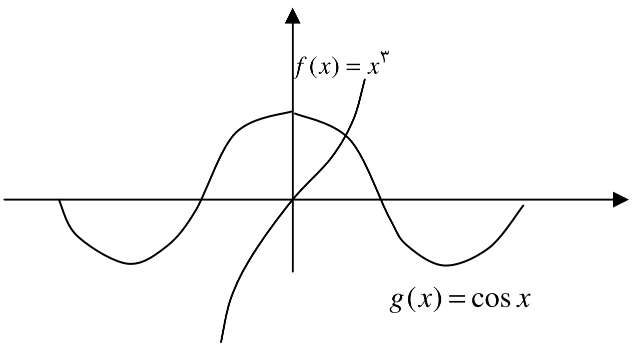
$$x^۲-\cos x=۰ \to x^۲=\cos x$$

برای تعیین تعداد ریشه های مخرج باید محل برخورد دو نمودار $f(x)=x^۲$ و $g(x)=\cos x$ را بدست آوریم.[2]

چون دو نمودار فقط دو نقطه ی برخورد دارند، پس تابع دو مجانب قائم دارد.

تمرین: منحنی تابع $y=\dfrac{۱}{x^۳-\cos x}$ چند مجانب قائم دارد.

حل:



$$x^۳-\cos x=۰ \to x^۳=\cos x$$

برای تعیین تعداد ریشه های مخرج باید محل برخورد دو نمودار $f(x)=x^۳$ و $g(x)=\cos x$ را بدست آوریم.

چون دو نمودار فقط یک نقطه ی برخورد دارند، پس تابع یک مجانب قائم دارد.

***

[2]. برای حل هر معادله به صورت $f(x)-g(x)=۰$ کافی است ، محل تقاطع نمودار های دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را تعیین کنیم.

مجانب افقی

خط $x=b$ را مجانب قائم تابع f گویند، هرگاه حداقل یکی از دو حالت زیر رخ دهد.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=b \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x)=b$$

لذا برای بدست آوردن مجانب افقی تابع f در صورتی که دامنه ی آن نامحدود باشد، کافی است، حد در بینهایت را به دست آوریم. در صورتی که حاصل حد عدد حقیقی مانند b باشد، آنگاه گوییم خط $y=b$ مجانب افقی تابع f است.[3]

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x)=b$$

نکته : توابعی که دامنه ی آنها محدود باشد، مجانب افقی ندارند.

تمرین : مجانب های افقی توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

۱) $f(x)=\frac{۱}{x}+\frac{۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$

۲) $f(x)=\frac{۱-x^{۳}}{۲+۳x^{۳}}$

۳) $f(x)=\frac{x+۱}{\sqrt{x^{۲}+۲x+۵}}$

۴) $f(x)=۲x+\sqrt{۴x^{۲}-۱}$

حل ۱:

$$D_f=(-۱,۱)-\{۰\}$$

دامنه ی تابع محدود است، پس x نمی تواند به سمت $\pm\infty$ میل کند، پس مجانب افقی نداریم.

حل ۲:

$$۲+۳x^{۳}=۰ \to ۳x^{۳}=-۲ \to x=\sqrt[۳]{-\frac{۲}{۳}}$$

$$D_f=R-\{\sqrt[۳]{-\frac{۲}{۳}}\}$$

لذا دامنه ی تابع نامحدود است، و x می تواند به سمت $\pm\infty$ میل کند. پس :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۱-x^{۳}}{۲+۳x^{۳}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^{۳}}{۳x^{۳}}=-\frac{۱}{۳}$$

[3]. هر تابع حداکثر دو مجانب افقی دارد.

در نتیجه خط $y=-\frac{۱}{۳}$ مجانب افقی است.

حل ۳:

معادله ریشه ندارد. $x^{۲}+۲x+۵=۰ \to (x^{۲}+۲x+۴)+۱=۰ \to (x+۲)^{۲}+۱=۰ \to (x+۲)^{۲}=-۱$

و عبارت زیر رادیکال همواره مثبت است.لذا $D_f=R$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+۱}{\sqrt{x^{۲}+۲x+۵}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^{۲}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=۱$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+۱}{\sqrt{x^{۲}+۲x+۵}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^{۲}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x}=-۱$$

پس خط های $y=۱$ و $y=-۱$ مجانب های افقی هستند.

حل ۴:

$$۴x^{۲}-۱\geq ۰ \to ۴x^{۲}\geq ۱ \to x^{۲}\geq \frac{۱}{۴} \to x\geq \frac{۱}{۲} \ \vee \ x\leq -\frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(۲x+\sqrt{۴x^{۲}-۱})=\lim_{x\to+\infty}(۲x+\sqrt{۴x^{۲}})=\lim_{x\to+\infty}(۲x+۲x)$$
$$=\lim_{x\to+\infty} ۴x=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(۲x+\sqrt{۴x^{۲}-۱})=\lim_{x\to+\infty}(۲x+\sqrt{۴x^{۲}})=\lim_{x\to+\infty}(۲x-۲x)=۰$$

پس تابع در شاخه ی $+\infty$ مجانب افقی ندارد ولی در شاخه ی $-\infty$ مجانب افقـی دارد و خـط $y=۰$ مجانـب افقـی آن است.

توجه : در توابع کسری اگر درجه صورت از مخرج بیشتر باشد، تابع مجانب افقی ندارد.

تمرین: معادله ی مجانب های افقی تابع $y=\frac{\sqrt{x^{۲}+۴x}}{-x+۲}+\frac{۴}{x}$ را بیابید.

حل:

$$\begin{cases} x^{۲}+۴x\geq ۰ \to x\leq -۴ \ \vee \ x\geq ۰ \\ -x+۲=۰ \to x=۲ \\ x=۰ \end{cases} \Rightarrow D_f=(-\infty,-۴)\cup(۰,۲)\cup(۲,+\infty)$$

$$y=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^{۲}+۴x}}{-x+۲}+\frac{۴}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{۱}(x+\frac{۴}{۲})}{-x+۲}+\frac{۴}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+۲}{-x+۲}+\frac{۴}{x}\right)=-۱+۰=-۱$$

$$y=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^{۲}+۴x}}{-x+۲}+\frac{۴}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-\sqrt{۱}(x+\frac{۴}{۲})}{-x+۲}+\frac{۴}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x-۲}{-x+۲}+\frac{۴}{x}\right)=۱+۰=۱$$

لذا دو خط $y=۱$ و $y=-۱$ مجانب افقی هستند.

تمرین: مجانب های قائم و افقی تابع $y=\dfrac{۳x+۵}{|x|-۲}$ را بیابید.

حل:

$$D=R-\{\pm ۲\}$$
$$|x|-۲=۰ \to |x|=۲ \to x=\pm ۲$$
$$y=\lim_{x\to+\infty}\frac{۳x+۵}{|x|-۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۳x+۵}{x-۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۳x}{x}=۳$$
$$y=\lim_{x\to-\infty}\frac{۳x+۵}{|x|-۲}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۳x+۵}{-x-۲}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۳x}{-x}=-۳$$

چون $x=۲$ و $x=-۲$ ریشه ی صورت نیستند لذا تابع چهار مجانب دارد. خطوط $x=۲$ و $x=-۲$ مجانب قائم و خطوط $y=۳$ و $y=-۳$ مجانب افقی هستند.

تمرین: مجانب های افقی و قائم منحنی تابع $y=\dfrac{\sqrt{-x^{۲}+۳x-۲}}{x(x^{۲}+۱)}$ را در صورت وجود بیابید.

حل:

$$\begin{aligned} &-x^{۲}+۳x-۲\geq ۰ \to ۱\leq x\leq ۲ \\ &x=۰ \qquad\qquad \Rightarrow D_f=[۱,۲] \\ &x^{۲}+۱=۰ \to \text{غ م} \end{aligned}$$

و چون ریشه ی $x=۰$ جزء دامنه نیست، پس مجانب قائم نیست و چون x به سمت بینهایت میل نمی کند پس تابع مجانب افقی ندارد.

تمرین: مقدار n و m را طوری بیابید که خط $y=۲$ وقتی $x\to+\infty$ یک مجانب افقی نمودار تابع زیر باشد.

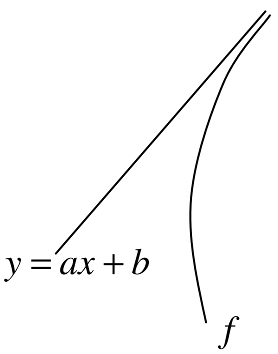
$$f(x)=mx+n+\sqrt{۴x^{۲}-۴۸x+۵}$$

حل:

$$y=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}[mx+n+\sqrt{۴}(x+\frac{-۴۸}{۸})]=\lim_{x\to+\infty}(mx+n+۲x-۱۲)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}[(m+۲)x+(n-۱۲)]\equiv ۲\to\left\langle\begin{array}{l}m+۲=۰\to m=-۲\\ n-۱۲=۲\to n=۱۴\end{array}\right.$$

***

مجانب مایل



خطی است مایل (نه افقی و نه قائم) که تابع در امتداد آن به بینهایت میل می کند.به عبارت دیگر وقتی $x\to\pm\infty$ آنگاه $y\to\pm\infty$ ممکن است نمودار تابع f دارای مجانب مایل باشد.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\vee-\infty \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty\vee-\infty$$

خط $y=ax+b$ مجانب مایل نمودار تابع f است، هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

الف) $\lim_{x\to+\infty}|f(x)-(ax+b)|=۰$

ب) $\lim_{x\to-\infty}|f(x)-(ax+b)|=۰$

توجه : اگر دامنه یا برد تابع محدود باشد، آنگاه تابع مجانب مایل ندارد.

نکته ی ۱: برای تعیین مجانب مایل تابع $y=f(x)$ در صورتی که آن را بصورت $y=ax+b$ نمایش دهیم، از روابط زیر استفاده می کنیم[4].

4 . این مطلب در ادامه ثابت می شود.

$$y=ax+b \to \begin{cases} a=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x} \\ \\ b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax) \end{cases}$$

تمرین: معادلات مجانب های منحنی تابع $y=\dfrac{x^{۳}+۳x^{۲}+۴x+۲}{x^{۲}-۵x+۶}$ را بدست آورید.

حل:

$$x^{۲}-۵x+۶=۰ \to \quad x=۲ \quad , \quad x=۳$$

چون $x=۳$ و $x=۲$ ریشه های صورت نیستند پس مجانب قائم می باشند. از طرفی

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{۳}+۳x^{۲}+۴x+۲}{x^{۲}-۵x+۶}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{۳}}{x^{۲}}=\lim_{x\to\pm\infty}x=\pm\infty$$

پس تابع مجانب افقی ندارد و مجانب مایل دارد.

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\dfrac{x^{۳}+۳x^{۲}+۴x+۲}{x^{۲}-۵x+۶}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{۳}+۳x^{۲}+۴x+۲}{x^{۳}-۵x^{۲}+۶x}=۱$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^{۳}+۳x^{۲}+۴x+۲}{x^{۲}-۵x+۶}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۸x^{۲}-۲x+۲}{x^{۲}-۵x+۶}=۸$$

لذا مجانب مایل به صورت زیر خواهد بود.

$$y=ax+b \to y=x+۸$$

تمرین: معادلات خطوط مجانب های منحنی $y=\sqrt{x^{۲}-۴x+۱}-x$ را تعیین کنید.

حل: منحنی مجانب قائم ندارد.

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^{۲}-۴x+۱}-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{۱}\left(x+\frac{-۴}{۲(۱)}\right)-x\right)=-۲$$

پس خط $y=-۲$ مجانب افقی است.

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^{۲}-۴x+۱}-x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{۱}\left(x+\frac{-۴}{۲(۱)}\right)-x\right)=\lim_{x\to-\infty}(-۲x+۲)=+\infty$$

پس تابع مجانب مایل دارد.

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^{۲}-۴x+۱}-x}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{۱}(x+\frac{-۴}{۲(۱)})-x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-۲x+۲}{x}=-۲$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^{۲}-۴x+۱}-x+۲x)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}(-\sqrt{۱}(x+\frac{-۴}{۲(۱)})+x)=\lim_{x\to-\infty}(-x+۲+x)=۲$$

لذا مجانب مایل به صورت زیر خواهد بود.

$$y=ax+b\to y=-۲x+۲$$

تمرین: مجانب مایل منحنی تابع $y=\frac{۱-x^{۲}}{\sqrt{۴x^{۲}-۱}}$ را بدست آورید.

حل:

$$۴x^{۲}-۱>۰\to(-\infty,-\frac{۱}{۲})\cup(\frac{۱}{۲},+\infty)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۱-x^{۲}}{\sqrt{۴x^{۲}-۱}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۱-x^{۲}}{\sqrt{۴}(x-\frac{۰}{۲})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۱-x^{۲}}{۲x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^{۲}}{۲x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{۲}=-\infty$$

لذا تابع مجانب مایل دارد.

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{۱-x^{۲}}{\sqrt{۴x^{۲}-۱}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{۱-x^{۲}}{\sqrt{۴}(x-\frac{۰}{۲})}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{۱-x^{۲}}{۲x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^{۲}}{۲x^{۲}}=-\frac{۱}{۲}$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-x^{2}}{\sqrt{4x^{2}-1}}+\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-x^{2}}{\sqrt{4}(x-\frac{0}{2})}+\frac{1}{2}x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-x^{2}}{2x}+\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^{2}}{2x}+\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x}{2}+\frac{1}{2}x\right)=0$$

لذا مجانب مایل به صورت زیر خواهد بود.

$$y=ax+b\to y=-\frac{1}{2}x$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x^{2}}{\sqrt{4x^{2}-1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x^{2}}{-\sqrt{4}(x-\frac{0}{2})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x^{2}}{-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^{2}}{-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{2}=-\infty$$

لذا تابع مجانب مایل دیگر دارد.

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1-x^{2}}{\sqrt{4x^{2}-1}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1-x^{2}}{-\sqrt{4}(x-\frac{0}{2})}}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1-x^{2}}{-2x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^{2}}{-2x^{2}}=\frac{1}{2}$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1-x^{2}}{\sqrt{4x^{2}-1}}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1-x^{2}}{-\sqrt{4}(x-\frac{0}{2})}-\frac{1}{2}x\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1-x^{2}}{-2x}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x^{2}}{-2x}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}x\right)=0$$

لذا مجانب مایل به صورت زیر خواهد بود.

$$y=ax+b\to y=\frac{1}{2}x$$

نکته ی ۲: در توابع رادیکالی در صورتی که هم ارزی نیوتنی قابل استفاده باشد. می توان به جای رادیکال هم ارزی نیوتن را قرار داد. بدین شکل بجای استفاده از روش فوق مستقیماً مجانب مایل بدست می آید.

تمرین: مجانب های منحنی تابع $y=\sqrt{x^۲-۴x+۱}-x$ را بیابید.

حل: منحنی مجانب قائم ندارد.

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^۲-۴x+۱}-x)=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{۱}(x+\frac{-۴}{۲(۱)})-x)=-۲$$

پس خط $y=-۲$ مجانب افقی است.

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^۲-۴x+۱}-x)=\lim_{x\to-\infty}(-\sqrt{۱}(x+\frac{-۴}{۲(۱)})-x)=\lim_{x\to-\infty}(-۲x+۲)=+\infty$$

پس تابع مجانب مایل دارد و مجانب مایل به صورت زیر خواهد بود.

$$y=-\sqrt{۱}(x+\frac{-۴}{۲(۱)})-x=-۲x+۲$$

تمرین: مجانب های مایل تابع $y=۲x+۱+\frac{۲x-\sqrt{x^۲-۶x}}{x+۴}$ را بیابید.

حل:

$$\lim_{x\to+\infty}(۲x+۱+\frac{۲x-\sqrt{x^۲-۶x}}{x+۴})=\lim_{x\to+\infty}(۲x+۱+\frac{۲x-\sqrt{۱}(x+\frac{-۶}{۲})}{x+۴})$$
$$=\lim_{x\to+\infty}(۲x+۱+\frac{۲x-x+۳}{x+۴})=\lim_{x\to+\infty}(۲x+۱+\frac{x+۳}{x+۴})=\lim_{x\to+\infty}(۲x+۲)=+\infty$$

تابع مجانب مایل دارد و آن می شود:

$$y=۲x+۱+\frac{۲x-\sqrt{۱}(x+\frac{-۶}{۲})}{x+۴}=۲x+۱+\frac{۲x-x+۳}{x+۴}=۲x+۲$$

$$\lim_{x\to-\infty}(۲x+۱+\frac{۲x-\sqrt{x^۲-۶x}}{x+۴})=\lim_{x\to-\infty}(۲x+۱+\frac{۲x+\sqrt{۱}(x+\frac{-۶}{۲})}{x+۴})$$
$$=\lim_{x\to-\infty}(۲x+۱+\frac{۲x+x-۳}{x+۴})=\lim_{x\to-\infty}(۲x+۱+\frac{۳x-۳}{x+۴})=\lim_{x\to-\infty}(۲x+۴)=-\infty$$

تابع مجانب مایل دیگر دارد و آن می شود:

$$y=2x+1+\frac{2x+\sqrt{1}(x+\frac{-6}{2})}{x+4}=2x+1+\frac{2x+x-3}{x+4}=2x+4$$

تمرین: مقدار m را طوری بیابید که خط $y=3x-2$ مجانب مایل منحنی تابع زیر باشد.

$$y=\sqrt[3]{x^3-2mx^2-2x+1}+2x$$

حل:

مجانب مایل $\quad y=\sqrt[3]{1}(x-\frac{2m}{3})+2x=3x-\frac{2m}{3}$

$$\begin{cases} y=3x-\frac{2m}{3} \\ y=3x-2 \end{cases} \rightarrow 3x-\frac{2m}{3}=3x-2\rightarrow m=3$$

نکته ی۳: توابع کسری در صورتی مجانب مایل دارند که درجه ی صورت دقیقاً یک واحد بیشتر از درجه ی مخرج باشد.

اگر درجه ی صورت برابر یا کمتر از درجه ی مخرج باشد، مجانب افقی دارند.

نکته ی٤: در توابع کسری اگر درجه ی صورت از درجه ی مخرج یک دقیقاً واحد بیشتر باشد، خارج قسمت تقسیم صورت بر مخرج همان مجانب مایل است[5]. زیرا:

$$y=\frac{f(x)}{g(x)}\rightarrow y=ax+b+\frac{r(x)}{g(x)}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=\lim_{x\to\pm\infty}(ax+b+\frac{r(x)}{g(x)})=ax+b+0=ax+b$$

تمرین: مجانب مایل منحنی $y=\frac{x^3-2x^2+1}{x^2+1}$ را بدست آورید.

حل: خارج قسمت تقسیم x^3-2x^2+1 بر x^2+1 برابر $x-2$ است. پس مجانب مایل می شود:

$$y=x-2$$

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x^2+1 & x^2+1 \\ \underset{-}{}x^3\underset{+}{}\underset{-}{}x & \hline x-2 \\ \hline -2x^2-x+1 & \\ \underset{+}{-}2x^2\underset{+}{-}2 & \\ \hline -x+3 & \end{array}$$

$$\frac{x^3}{x^2}=x \qquad \frac{-2x^2}{x^2}=-2$$

5 . به شرط اینکه خارج قسمت درجه ی اول و باقی مانده صفر نشود.

حل چند تمرین :

۱ : مجانب افقی تابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}$$

حل :

$$D_f=R-\{۰\}$$

مجانب افقی $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۱}{x}\times\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sin x=۰\times k=۰\to y=۰$

توجه : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sin x$ کراندار است.

۲ : اندازه ی زاویه ی بین دو مجانب مایل تابع $f(x)=\sqrt{x^۲+۴x}$ را حساب کنید.

حل : ابتدا شیب های دو مجانب مایل را تعیین می کنیم.

شیب مجانب مایل در شاخه ی $+\infty$

$$m_۱=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^۲+۴x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=۱$$

شیب مجانب مایل در شاخه ی $-\infty$

$$m_۲=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^۲+۴x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x}=-۱$$

چون حاصل ضرب شیب های دو مجانب مایل برابر ۱− است، پس دو خط بر هم عمودند. لذا زاویه ی بین این دو خط ۹۰ درجه است. $m_۱.m_۲=-۱\to\angle\alpha=۹۰^\circ$

توجه : به طور کلی می توان شیب های دو مجانب مایل تابع را تعیین کرده و فرمول زیر را بکار برد. (α زاویه ی بین دو مجانب است.)

$$\tan\alpha=\frac{m_۱-m_۲}{۱+m_۱m_۲}$$

یادداشت : فاصله ی نقطه ی $M(x_۱, y_۱)$ از خط $ax + by + c = ۰$ برابر است با :

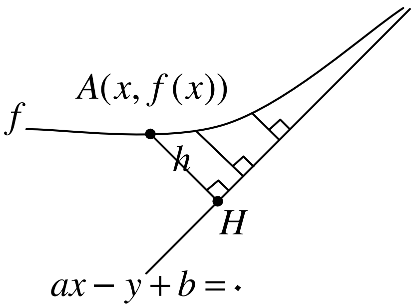
$$D = \frac{|ax_۱ + by_۱ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

۳ : اگر تابع $y = f(x)$ دارای مجانب مایلی به معادله ی $y = ax + b$ باشد. ثابت کنید که

الف) $a = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$

ب) $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax)$

اثبات : با توجه به تعریف مجانب و با در نظر گرفتن شکل مقابل واضح است که فاصله ی نقطه ی متغیر $A(x, f(x))$ تا خط $ax - y + b = ۰$ به سمت صفر میل می کند.



$h = \frac{|ax - f(x) + b|}{\sqrt{a^۲ + (-۱)^۲}}$ فاصله ی نقطه ی متغیر A تا خط مجانب

$$\lim_{x \to \pm\infty} h(x) = ۰ \to \lim_{x \to \pm\infty} \frac{|ax - f(x) + b|}{\sqrt{a^۲ + (-۱)^۲}} = ۰ \to \lim_{x \to \pm\infty} (ax - f(x) + b) = ۰ \quad (*)$$

با استفاده از تساوی (*) می توان نتایج زیر را نوشت:

$$\lim_{x \to \pm\infty} (ax - f(x) + b) = ۰$$

$$\xrightarrow{\div x} \lim_{x \to \pm\infty} (a - \frac{f(x)}{x} + \frac{b}{x}) = ۰ \to \lim_{x \to \pm\infty} a - \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} + \lim_{x \to \pm\infty} \frac{b}{x} = ۰$$

$$\to \lim_{x \to \pm\infty} a - \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} + \underbrace{\lim_{x \to \pm\infty} \frac{b}{x}}_{۰} = ۰ \to a - \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = ۰ \to \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

همچنین :

$$\lim_{x \to \pm\infty} (ax - f(x) + b) = ۰ \to \lim_{x \to \pm\infty} ax - \lim_{x \to \pm\infty} f(x) + \lim_{x \to \pm\infty} b = ۰$$

$$\to \lim_{x \to \pm\infty} ax - \lim_{x \to \pm\infty} f(x) + b = ۰ \to b = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - \lim_{x \to \pm\infty} ax = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax)$$

تمرین برای حل:

۱ : تمام مجانب های تابع را تعیین کنید.

$$y=\frac{x^{3}+4x^{2}-1}{-x^{2}+9}$$

۲ : مجانب های قائم و افقی تابع زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

۳ : تعیین کنید که تابع زیر چند مجانب قائم دارد.

$$y=\frac{1-x^{3}}{1-x^{2}}$$

۴ : مجانب مایل تابع های زیر را در صورت وجود به دست آورید.

۱) $f(x)=\dfrac{x^{2}+2x-1}{x+1}$

۲) $f(x)=\dfrac{x^{2}+3x+2}{x+1}$

۳) $f(x)=2x+\sqrt{x^{2}+3}$

۴) $f(x)=\dfrac{x^{3}-3x^{2}+1}{x^{2}+x+1}$

***

پیوستگی

در بررسی حد تابع در یک نقطه لزومی ندارد که تابع در آن نقطه تعریف شده باشد، اما اگر تـابع در آن نقطـه تعریـف شـده باشد و حد تابع در آن نقطه موجود باشد، دو حالت ممکن است رخ دهد.

الف : حد تابع در آن نقطه مساوی مقدار تابع در آن نقطه است.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

ب : حد تابع در آن نقطه مساوی مقدار تابع در آن نقطه نیست.

$$\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$$

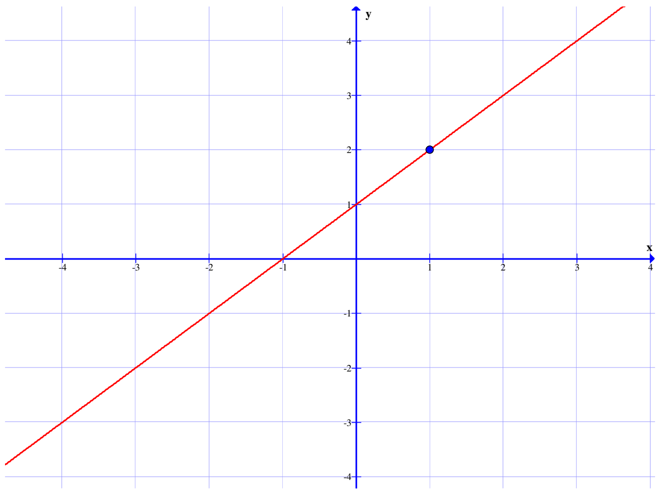
به دو مثال زیر توجه کنید.

مثال۱)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^۲ - ۱}{x - ۱} & x \neq ۱ \\ ۲ & x = ۱ \end{cases}$$

$$\lim_{x \to ۱} f(x) = ۲$$

$$f(۱) = ۲$$

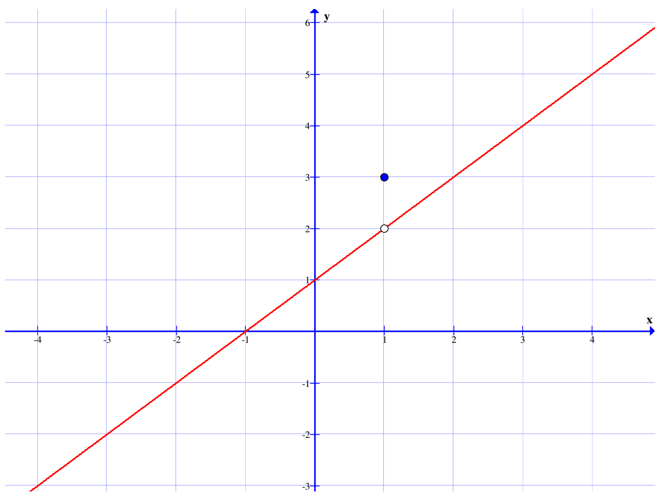


مثال۲)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^۲ - ۱}{x - ۱} & x \neq ۱ \\ ۳ & x = ۱ \end{cases}$$

$$\lim_{x \to ۱} f(x) = ۲$$

$$f(۱) = ۳$$



تعریف : فرض کنید تابع f در نقطه ی a و در یک همسایگی چپ یا راست و یا یـک همـسایگی a (دوطرفـه) تعریـف شده باشد. اگر حد تابع در a موجود و برابر مقدار تابع باشد($\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$). آنگاه گوییم تـابع f در نقطـه ی a پیوسته است[1].

تمرین : پیوستگی تابع زیر را در نقطه ی $x=۲$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-۵x+۶}{x-۲} & x\neq ۲\\ [۱-x] & x=۲\end{cases}$$

حل : تابع f در $x=۲$ و در همسایگی دو طرفه ی $x=۲$ تعریف شده است. پس :

$$\lim_{x\to ۲} f(x)=\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-۵x+۶}{x-۲}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x-۳)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}(x-۳)=۲-۳=-۱$$

$$f(۲)=[۱-۲]=[-۱]=-۱$$

پس $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=f(۲)$ لذا تابع در $x=۲$ پیوسته است.

قرارداد : شرط صحبت از پیوستگی یا ناپیوستگی یک تابع در یک نقطـه آن اسـت کـه تـابع در آن نقطـه و حـداقل یـک همسایگی چپ یا راست یا همسایگی (دو طرفه) آن نقطه تعریف شده باشد.

تمرین : پیوستگی تابع $f(x)=\dfrac{x^۲-۱}{x-۱}$ در $x=۱$ را بررسی کنید.

حل : از پیوستگی این تابع در $x=۱$ نمی توان صحبت کرد. زیرا $f(۱)$ تعریف نشده اسـت. (نگـوییم تـابع f در $x=۱$ پیوسته نیست. بلکه بگوییم نمی توان در مورد پیوستگی تابع در ایـن نقطـه صـحبت کـرد.اضـافه مـی شـود کـه $x=۱$ را نمی توان جزء نقاط ناپیوستگی تابع در نظر گرفت. تابعی در یک نقطه ناپیوسته است که در آن نقطه تعریف شده ولی مقـدار تابع در آن نقطه با حد تابع در همین نقطه برابر نباشد یا اینکه تابع در این نقطه حد نداشته باشد.)

[1]. از دیدگاه هندسی تابع f در نقطه ی a پیوسته گویند، هرگاه نمودار آن در این نقطه بریدگی یا سوراخ نداشته باشد. این دیدگاه تعریف درستی از پیوستگی نمی دهد و در ادامه با توابعی برخورد می کنیم که نمودار به هم چسبیده ندارند ولی پیوسته اند.

پیوستگی تابع در هر نقطه از دامنه ی آن

به جهت اینکه اکثراً با توابعی سروکار داریم که دامنه ی آنها یک بازه یا اجتماعی از بازه ها است. بنابر این نقاط دامنه ی تابع را به دو دسته تقسیم می کنیم.

۱ : نقطه ی $c\in D_f$ را یک نقطه ی درونی دامنه ی تابع می نامیم، هرگاه این نقطه به بازه ی بازی واقع در دامنه متعلق باشد.

۲ : اگر نقطه ی $c\in D_f$ ، نقطه ی درونی نباشد، آن را نقطه ی انتهایی دامنه ی f می نامیم.

مثال : تابع $f(x)=\sqrt{|x-۲|(۱-x^۲)}$ را در نظر بگیرید. دامنه ی تابع عبارت است از $D_f=[-۱,۱]\bigcup\{۲\}$ لذا دامنه ی این تابع از نقاط درونی $(-۱,۱)$، نقطه ی انتهایی چپ ۱- ، نقطه ی انتهایی راست ۱ و نقطه ی منفرد ۲ تشکیل شده است.

یادداشت : نقطه ی $x=۲$ را نقطه ی تنها یا منفرد دامنه ی تابع f می گویند. در ریاضیات عالی ثابت می شود که تابع در نقطه ی منفرد خود پیوسته است ولی در حال حاضر توابعی که دامنه ی آن ها به شکل یک بازه یا اجتماعی از بازه ها نباشد مورد بررسی قرار نمی گیرند.

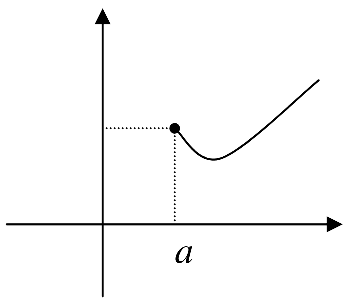
***

شروط پیوستگی تابع در یک نقطه

همانطور که بیان شد، تابعی را در نقطه ی a پیوسته گویند، هرگاه یکی از حالت های زیر موجود باشد.

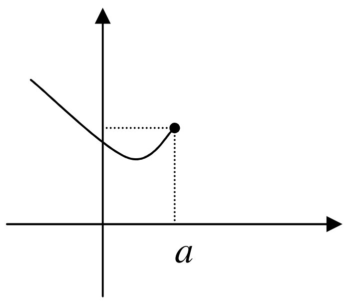
الف: اگر تابع f فقط در همسایگی راست نقطه ی a تعریف شده باشد، در این صورت شرط پیوستگی تابع f در نقطه ی a عبارت است از :

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$$

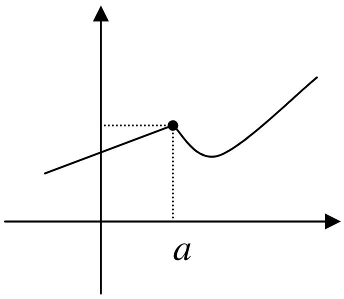


ب : اگر تابع f فقط در همسایگی چپ نقطه ی a تعریف شده باشد، در این صورت شرط پیوستگی تابع f در نقطه ی a عبارت است از :

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$$



ج: اگر تابع f در یک همسایگی نقطه ی a تعریف شده باشد، در این صورت شرط پیوستگی تابع f در نقطه ی a عبارت است از :



$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

تمرین : پیوستگی تابع $f(x)=\sqrt{۴-x^۲}$ را در نقاط $x=۱$ و $x=۲$ و $x=-۲$ بررسی کنید.

حل :

$D=[-۲,۲]$

$\lim\limits_{x\to ۱} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱} \sqrt{۴-x^۲} = \sqrt{۳} = f(۱) \rightarrow$ تابع f در نقطه ی درونی ۱ پیوسته است.

$\lim\limits_{x\to (-۲)} f(x) = \lim\limits_{x\to (-۲)^+} \sqrt{۴-x^۲} = ۰ = f(-۲) \rightarrow$ تابع f در نقطه ی انتهایی چپ ۲- پیوسته است.

$\lim\limits_{x\to ۲} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^-} \sqrt{۴-x^۲} = ۰ = f(۲) \rightarrow$ تابع f در نقطه ی انتهایی راست ۲ پیوسته است.

***

شرایط ناپیوستگی تابع در یک نقطه

اگر تابع شرایط بحث در مورد پیوستگی در نقطه ی $x=a$ را داشته باشد. در این صورت تابع f را در نقطه ی $x=a$ ناپیوسته گوییم، هرگاه یکی از حالت های زیر اتفاق بیفتد.

الف: تابع f در نقطه ی a حد نداشته باشد. (ناپیوستگی رفع نشدنی یا اساسی)

ب : تابع f در نقطه ی a حد داشته باشد ولی حد تابع با مقدار تابع برابر نباشد. (ناپیوستگی رفع شدنی)

تمرین : ابتدا نشان دهید که تابع زیر در نقطه ی $x=۱$ پیوسته نیست. سپس با انتخاب مقدار مناسبی برای $f(۱)$ تابع جدیدی تعریف کنید که در این نقطه پیوسته شود.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^۲-۱}{x^۲+۴x-۵} & x\neq ۱ \\ ۴ & x=۱ \end{cases}$$

حل: ابتدا دامنه ی تابع داده شده را تعیین می کنیم.

$$x^{۲}+۴x-۵=۰ \to (x-۱)(x+۵)=۰ \to x=۱\ ,\ x=-۵$$

$$\Rightarrow D_f = R-\{۱\ ,-۵\}$$

حال چون $x=۱$ در دامنه ی تابع نیست لذا مقدار تابع در این نقطه یعنی $f(۱)$ وجود ندارد. پس تابع در این نقطه پیوسته نیست. اکنون حد تابع در نقطه ی $x=۱$ را محاسبه و $f(۱)$ را برابر مقدار حد قرار می دهیم.

$$\lim_{x\to ۱} f(x)=\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-۱}{x^{۲}+۴x-۵}\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x+۱)}{(x-۱)(x+۵)}=\lim_{x\to ۱}\frac{x+۱}{x+۵}=\frac{۱+۱}{۱+۵}=\frac{۱}{۳}$$

$f(۱)\neq \lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ ناپیوستگی رفع شدنی

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}-۱}{x^{۲}+۴x-۵} & x\neq ۱\\[2mm] \dfrac{۱}{۳} & x=۱\end{cases}$$

تمرین : نشان دهید که تابع زیر در نقطه ی $x=۲$ ناپیوستگی اساسی دارد.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-۲}{|x-۲|} & x\neq ۲\\ x & x=۲\end{cases}$$

حل : کافی است که نشان دهیم تابع در نقطه ی داده شده حد ندارد.

حد راست $\lim\limits_{x\to ۲^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^{+}}\dfrac{x-۲}{|x-۲|}=\lim\limits_{x\to ۲^{+}}\dfrac{x-۲}{x-۲}=۱$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۲^{-}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^{-}}\dfrac{x-۲}{|x-۲|}=\lim\limits_{x\to ۲^{+}}\dfrac{x-۲}{-(x-۲)}=-۱$

تمرین: پیوستگی تابع زیر را در نقطه ی $x=۰$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x\neq ۰\\ ۲ & x=۰\end{cases}$$

حل:

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = \lim_{x\to ۰^+} \frac{\sin x}{x} = ۱$$ حد راست

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x) = \lim_{x\to ۰^-} \frac{\sin x}{x} = ۱$$ حد چپ

لذا تابع در نقطه ی $x=۰$ پیوسته نیست.

تمرین: با توجه به تمرین قبل $f(۰)$ را طوری تعیین کنید که تابع در در نقطه ی $x=۰$ پیوسته شود.

حل: اگر تعریف کنیم.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x\neq ۰\\ ۱ & x=۰\end{cases}$$

در این صورت داریم :

$$D_f = R$$

$f(۰)=۱$ مقدار

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = \lim_{x\to ۰^+} \frac{\sin x}{x} = ۱$$ حد راست

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x) = \lim_{x\to ۰^-} \frac{\sin x}{x} = ۱$$ حد چپ

لذا تابع در نقطه ی $x=۰$ پیوسته خواهد شد.

تمرین برای حل:

۱ : توابع زیر در نقطه ی $x=۰$ پیوسته نیستند. $f(۰)$ را چنان تعریف کنید که تابع در این نقطه پیوسته شود.

الف) $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^۲ x}{۱-\cos x} & x\neq ۰\\ ۳ & x=۰\end{cases}$$

ب) $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[۳]{x+۸}-۲}{x} & x\neq ۰\\ \dfrac{۱}{۵} & x=۰\end{cases}$$

۲ : نوع ناپیوستگی تابع، در نقطه‌ی $x=۱$ را تعیین و در صورت امکان تابع جدیدی تعریف کنید که پیوسته باشد.

الف) $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۱ & x>۱ \\ ۳ & x=۱ \\ ۲+\sin(۲\pi x) & x<۱ \end{cases}$

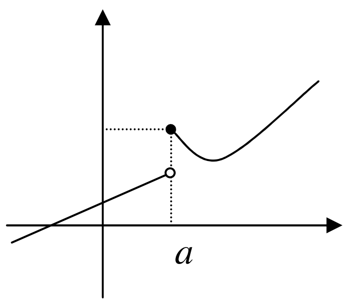
۳ : نوع ناپیوستگی تابع، در نقطه‌ی $x=۲$ را تعیین و در صورت امکان تابع جدیدی تعریف کنید که پیوسته باشد.

ب) $f(x)=\begin{cases} [x]+[-x] & x>۲ \\ ۳x & x=۲ \\ \cos(\pi x) & x<۲ \end{cases}$

***

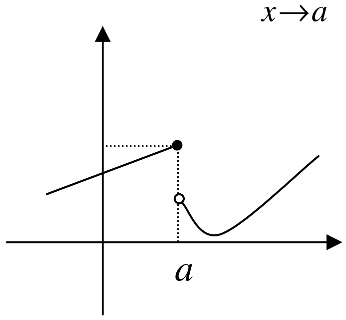
پیوستگی راست و چپ

پیوستگی راست: گوییم تابع f در a از راست پیوسته است، هرگاه: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$



در شکل مقابل تابع f در نقطه ی $x=a$ ناپیوسته است،اما پیوستگی راست دارد.

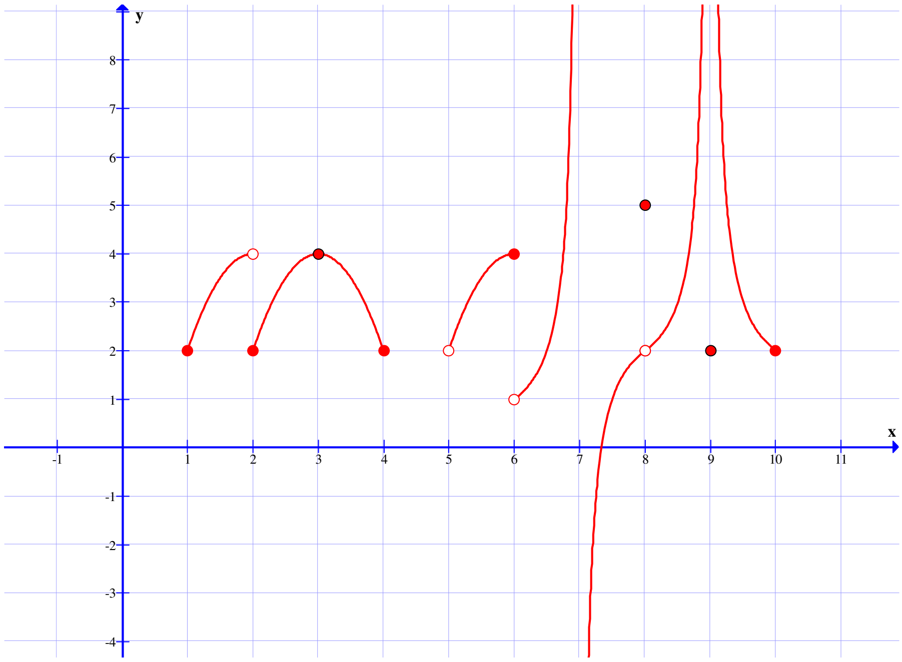
پیوستگی چپ : گوییم تابع f در a از چپ پیوسته است، هرگاه: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$



در شکل مقابل تابع f در نقطه ی $x=a$ ناپیوسته است،اما پیوستگی چپ دارد.

نتیجه : اگر تابع f در یک همسایگی نقطه ی a تعریف شده باشد. در این صورت تـابع f در نقطـه ی a پیوسـته اسـت، هرگاه هم پیوستگی راست و هم پیوستگی چپ داشته باشد و برعکس

تمرین : با توجه به نمودار زیر، پیوستگی تابع f ، در نقاط طبیعی یک الی ۱۰ را بررسی کنید.



حل :

تابع f در $x=۱$ پیوسته است. زیرا حد تابع برابر مقدار تابع است. (حد تابع همان حد راست است.)

تابع f در $x=۲$ پیوسته نیست. زیرا حد تابع موجود نیست (حد راست و چپ متفاوت هستند.) اما پیوستگی راست دارد.

تابع f در $x=۳$ پیوسته است. زیرا حد تابع برابر مقدار تابع است. (حد تابع دو طرفه است.)

تابع f در $x=۴$ پیوسته است. زیرا حد تابع برابر مقدار تابع است. (حد تابع همان حد چپ است.)

در مورد پیوستگی تابع f در $x=۵$ نمی توان صحبت کرد. زیرا $f(۵)$ تعریف نشده است.

تابع f در $x=۶$ پیوسته نیست. زیرا حد تابع موجود نیست. (حد راست و چپ متفاوت هستند.) اما پیوستگی چپ دارد.

در مورد پیوستگی تابع f در $x=۷$ نمی توان صحبت کرد. زیرا $f(۷)$ تعریف نشده است.

تابع f در $x=۸$ پیوسته نیست. زیرا حد تابع با مقدار تابع برابر نیست. (ناپیوستگی رفع شدنی)

تابع f در $x=۹$ پیوسته نیست. زیرا حد تابع موجود نیست. (ناپیوستگی اساسی)

تابع f در $x=۱۰$ پیوسته است. زیرا حد تابع برابر مقدار تابع است. (حد تابع همان حد چپ است.)

***

پیوستگی روی یک بازه

گوییم تابع f روی بازه ی I پیوسته است، هرگاه در هر نقطه ی I پیوسته باشد.

شرط صحبت از پیوستگی تابع f روی بازه ی I این است که تابع f روی بازه ی I تعریف شده باشد.

مثلاً در مورد پیوستگی تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ روی بازه ی $[-1,1]$ نمی توان صحبت کرد. زیرا $f(0)$ تعریف نشده است. ولی تابع $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ روی بازه ی $[-1,1]$ پیوسته است.

تمرین : پیوستگی تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در دامنه اش بررسی کنید.

حل : دامنه ی تابع f بازه ی $[0,+\infty)$ می باشد. چون $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0=f(0)$ پس تابع در $x=0$ پیوسته است.

همچنین برای هر نقطه ی $c>0$ پیوسته می باشد، زیرا $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\lim\limits_{x\to c}\sqrt{x}=\sqrt{c}=f(c)$

***

مفهوم پیوستگی تابع در یک نقطه بر اساس همگرایی دنباله ها

تعریف : فرض کنیم D دامنه ی تابع f زیر مجموعه ای از R باشد و $a\in D$ در این صورت تابع $f:D\to R$ در نقطه ی a پیوسته است، هرگاه به ازای هر دنباله از نقاط D مانند $\{a_n\}$ که به a همگرا است، دنباله ی $\{f(a_n)\}$ به $f(a)$ همگرا باشد.

اگر به ازای هر دنباله از نقاط دامنه ی f مانند $\{a_n\}$ که به a همگرا است. دنباله ی $\{f(a_n)\}$ به $f(a)$ همگرا باشد، آنگاه تابع f در $x=a$ پیوسته است. یعنی $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

***

قضیه های پیوستگی

در ادامه ی بررسی مفهوم پیوستگی ، قضیه های پیوستگی را بیان می کنیم.

قضیه ی ۱ : اگر توابع f و g روی دامنه ی مشترکی مانند D شامل حداقل یک همسایگی یک طرفه ی $x=a$ تعریف شده باشد و هر دو طرف در نقطه ی a پیوسته باشند و c عددی ثابت باشد، آنگاه

الف : توابع $f+g$ و $f-g$ و cf و $f.g$ نیز در a پیوسته اند.

ب : تابع $\frac{f}{g}$ (به شرط $g(a)\neq ۰$) نیز در a پیوسته است.

اثبات : برای هر دنباله ی دلخواه $\{a_n\}$ از نقاط D که همگرا به a است داریم.

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=f(a) \quad و \quad \lim_{n\to\infty} g(a_n)=g(a)$$

بنابر این:

$$\lim_{n\to\infty}(f+g)(a_n)=\lim_{n\to\infty}(f(a_n)+g(a_n))=f(a)+g(a)=(f+g)(a)$$

$$\lim_{n\to\infty}(f-g)(a_n)=\lim_{n\to\infty}(f(a_n)-g(a_n))=f(a)-g(a)=(f-g)(a)$$

$$\lim_{n\to\infty}(f.g)(a_n)=\lim_{n\to\infty}(f(a_n).g(a_n))=f(a).g(a)=(f.g)(a)$$

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{f}{g})(a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(a_n)}{g(a_n)}=\frac{f(a)}{g(a)}=(\frac{f}{g})(a)$$

توجه : عکس این قضیه درست نیست. به مثال های زیر توجه کنید.

مثال : دو تابع زیر در نقطه ی $x=۲$ ناپیوسته اند ولی مجموع و حاصل ضرب آنها پیوسته است.

$$f(x)=\begin{cases} ۱ & x\geq ۲ \\ -۱ & x<۲ \end{cases} \quad و \quad g(x)=\begin{cases} -۱ & x\geq ۲ \\ ۱ & x<۲ \end{cases} \Rightarrow (f+g)(x)=۰$$

$$f(x)=\begin{cases} ۱ & x\geq ۲ \\ -۱ & x<۲ \end{cases} \quad و \quad g(x)=\begin{cases} -۱ & x\geq ۲ \\ ۱ & x<۲ \end{cases} \Rightarrow (f.g)(x)=-۱$$

قضیه ی ۲ :

الف : هر تابع چند جمله ای در تمام نقاط حقیقی پیوسته است.

ب : هر تابع گویا در هر نقطه از دامنه اش پیوسته است.

اثبات :

الف : قرار می دهیم

$$P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

پس :

$$\lim_{x\to a} P(x) = \lim_{x\to a} (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0)$$

$$= a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1} + \ldots + a_1 a + a_0 = P(a)$$

یعنی تابع $P(x)$ در هر نقطه ی $a \in R$ پیوسته است.

ب :

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x\to a} P(x)}{\lim_{x\to a} Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

به شرط اینکه $Q(a) \neq 0$ باشد.

تمرین : تابع $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2-x+1}{x^2-1}$ روی چه بازه هایی پیوسته است.

حل : $D_f = R-\{1,-1\}$ لذا تابع در بازه های $(1,+\infty)$ و $(-1,1)$ و $(-\infty,-1)$ پیوسته است.

قضیه ی ۳ : (پیوستگی توابع مثلثاتی)

الف : توابع $f(x)=\sin x$ و $f(x)=\cos x$ روی R پیوسته اند

ب : توابع $f(x)=\tan x$ و $f(x)=\cot x$ روی دامنه شان پیوسته اند.

$$f(x)=\tan x \to D_f = R-\{x \mid x=k\pi+\frac{\pi}{2} , x\in Z\}$$

$$f(x)=\cot x \to D_f = R-\{x \mid x=k\pi , x\in Z\}$$

اثبات :

$$\lim_{x\to a} \sin x = \sin a = f(a)$$

$$\lim_{x\to a} \cos x = \cos a = f(a)$$

$$\lim_{x\to a} \tan x = \lim_{x\to a} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin a}{\cos a} = \tan a = f(a) \quad ; \quad x \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

$$\lim_{x\to a} \cot x = \lim_{x\to a} \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos a}{\sin a} = \cot a = f(a) \quad ; \quad x \neq k\pi$$

تمرین : تابع $f(x) = \frac{\tan x}{۱ + \sin x}$ در چه نقاطی از دامنه اش پیوسته است؟

حل :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad ; \quad \cos x = ۰ \to x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

$$۱ + \sin x = ۰ \to \sin x = -۱ \to x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲}$$

چون جواب های $x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$ شامل جواب های $x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲}$ است. پس :

$$D_f = R - \{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{۲}\}$$

بنابراین تابع f در تمام نقاط دامنه اش پیوسته است.

***

قضیه ی ٤ : اگر تابع g در a حد داشته باشد و $\lim_{x\to a} g(x) = b$ و تابع f در b پیوسته باشد.آنگاه

$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b)$ به عبارت دیگر $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x))$

به عبارت دیگر در این قضیه تعویض و جابجا کردن نماد « f » با نماد « $\lim$ » مجاز است که اصطلاحاً گویند حد از تابع پیوسته عبور می کند.[2]

نتیجه : ترکیب دو تابع پیوسته، خود تابعی پیوسته است. به بیان دقیق تر ، اگر تابع g در نقطه ی a و تابع f در $g(a)$ پیوسته باشد.آنگاه تابع fog در نقطه ی a پیوسته است. توجه داشته باشید این گزاره در شرایطی برقرار است که D_{fog} شامل حداقل یک همسایگی یک طرفه ی a باشد تا شرط صحبت از پیوستگی fog در a را داشته باشیم.

[2] . قضیه ی فوق در شرایطی برقرار است که D_{fog} شامل حداقل یک همسایگی یک طرفه ی a باشد.

برای مثال تابع $g(x)=\sqrt{x}$ در $x=\pi^{۲}$ پیوسته است و تـابع $f(x)=\sin x$ در $x=g(\pi^{۲})$ پیوسـته اسـت در نتیجه تابع $(fog)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x})=\sin\sqrt{x}$ در $x=\pi^{۲}$ پیوسته است.

تمرین : حد تابع $y=|-\sqrt{x}|$ را در نقطه ی $x=۴$ بررسی کنید.

حل : قرار مـی دهـیم $f(x)=|x|$ و $g(x)=-\sqrt{x}$. مـی دانـیم کـه تـابع $f(x)=|x|$ همـه جـا پیوسـته اسـت و $\lim\limits_{x\to ۴} g(x)=\lim\limits_{x\to ۴}-\sqrt{۴}=-۲$. لذا طبق این قضیه می توان نوشت:

$$\lim_{x\to ۴} f(g(x))=f(\lim_{x\to ۴} g(x))=f(-۲)=|-۲|=۲$$

تمرین : نشان دهید که تابع $y=\sqrt[۳]{\dfrac{x-۲}{x^{۲}+x+۱}}$ همه جا پیوسته است.

حل : قرار می دهیم $f(x)=\sqrt[۳]{x}$ و $g(x)=\dfrac{x-۲}{x^{۲}+x+۱}$. می دانیم که تابع f همه جا پیوسته است.

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=f(\lim_{x\to a} g(x))=f(\frac{a-۲}{a^{۲}+a+۱})=\sqrt[۳]{\frac{a-۲}{a^{۲}+a+۱}}$$

و چون $a^{۲}+a+۱\neq ۰$ پس تابع داده شده ، همه جا پیوسته است.

***

توابع پیوسته ی به ظاهر ناپیوسته

توابعی وجود دارد که در یک یا چند نقطه از دامنه شان پیوسته اند ولی اطلاق کلمه ی پیوسته به آنها دور از ذهـن بـه نظـر می رسد. برای مثال تابع $f:R\to R$ در زیر را در نظر می گیریم.

$$f(x)=\begin{cases} x & x\in Q \\ ۲-x & x\in Q^{c} \end{cases}$$

این تابع در نقطه ی $x=۱$ پیوسته است.

استدلال : می دانیم که در هر بازه از اعداد حقیقی هم اعداد گویا وجود دارد و هم اعداد گنگ، بنابر این نقـاط تـابع f یـا روی خط $y=x$ (وقتی x گویا باشد.) و یا روی خط $y=۲-x$ (وقتی x گنگ باشد.) قرار دارند. نمودار تقریبی(نادقیق) تابع f به شکل زیر است که به نظر می رسد تابع در نقطه ی $x=۱$ حد ندارد.

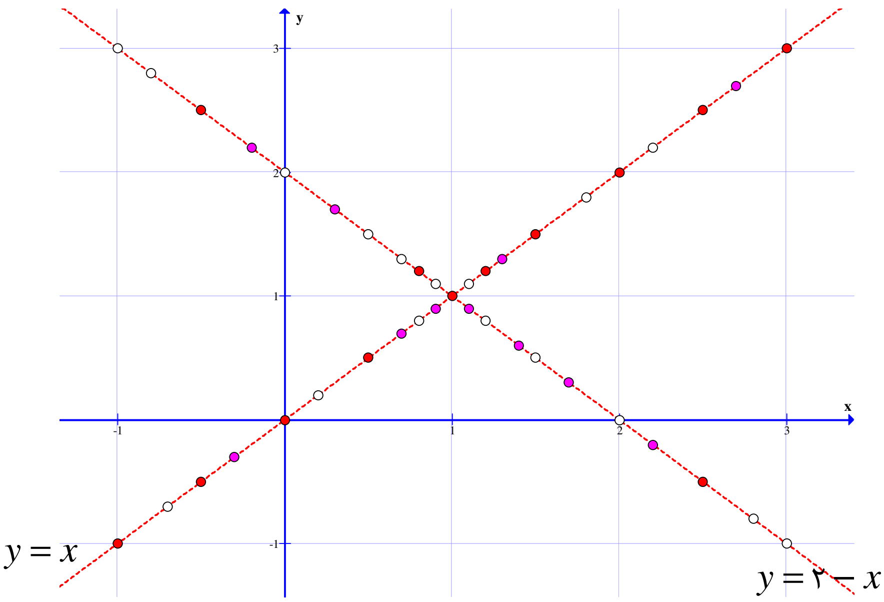
برای اثبات درستی حدس خود از تعریف حد به شکل زیر استفاده می کنیم.

فرض کنیم $a \in R$ و $\{a_n\}$ دنباله ای دلخواه از اعداد حقیقی باشد به طوری که $a_n \to a$ و $a_n \neq a$

زیر دنباله ی $\{b_n\}$ که همه ی جملات آن اعداد گویا و زیر دنباله ی $\{c_n\}$ که همه ی جملات آن اعداد گنگ هستند را در نظر می گیریم و چون هر زیر دنباله از یک دنباله ی همگرا خود همگرا است. بنابر این $b_n \to a$ و $c_n \to a$

$$f(b_n) = b_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} b_n = a$$

$$f(c_n) = ۲ - c_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(c_n) = \lim_{n\to\infty} (۲ - c_n) = ۲ - a$$



شرط اینکه $\lim_{n\to\infty} f(a_n)$ موجود باشد، این است که عدد همگرایی زیر دنباله های مختلف آن برابر هم باشند. بنابراین

$$a = ۲ - a \to a = ۱$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = ۱$$

که نتیجه می شود $\lim_{x\to ۱} f(x) = ۱$. از طرفی چون $f(۱) = ۱$ بنابر این $\lim_{x\to ۱} f(x) = f(۱)$ و این به معنی آن است که تابع f در نقطه ی $x = ۱$ پیوسته است.

یادداشت : در اثبات این مطلب از قضیه ی زیر استفاده شده است.

قضیه : اگر دنباله ی $\{a_n\}$ همگرا به a باشد، هر زیر دنباله ی آن همگرا به a است و برعکس

برای مثال دنباله ی $\{a_n\}$ با ضابطه ی $a_n=\frac{n}{n+1}$ که همگرا بـه ۱ اسـت. هـر زیـر دنبالـه ی آنماننـد $\{a_{2n}\}$ و $\{a_{2n-1}\}$ نیز به ۱ همگرا است.

$$a_{2n}=\frac{2n}{2n+1}\to\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n+1}=1$$

$$a_{2n-1}=\frac{2n-1}{2n}\to\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n}=1$$ فقط

نکته : در توابعی به فرم زیر، اگر g و h روی R پیوسته باشند، آنگاه تابع f در $x=a$ پیوسته است، هرگـاه a ریـشه ی معادله ی $g(x)=h(x)$ باشد.

$$f(x)=\begin{cases}g(x) & x\in Q\\ h(x) & x\notin Q\end{cases}$$

تمرین: تابع زیر در چه نقاطی پیوسته است؟

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\in Q\\ 2x+3 & x\notin Q\end{cases}$$

حل : کافی است که معادله ی $x^2=2x+3$ را حل کنیم.

$$x^2=2x+3\to x^2-2x-3=0\to x=-1\ ,\ x=3$$

تمرین: ثابت کنید که تابع زیر در نقطه ی $x=0$ پیوسته است.

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\in Q\\ 0 & x\notin Q\end{cases}$$

حل : کافی است که معادله ی $x^2=0$ را حل کنیم.

$$x^2=0\to x=0$$

***

تمرین برای حل :

۱ : پیوستگی توابع زیر را در نقطه ی داده شده بررسی کنید.

الف) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}-۱}{x-۱} & x\neq ۱\\ ۴ & x=۱\end{cases}\quad ;\quad x=۱$

ب) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x\neq ۰\\ ۱ & x=۰\end{cases}\quad ;\quad x=۰$

۲ : مقدار k را طوری بیابید که تابع زیر در $x=۰$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases}x+[x]+۳ & x<۰\\ ۲ & x=۰\\ \dfrac{k\sin ۲x}{\tan^{-۱}(x\sqrt{۲})} & x>۰\end{cases}$$

جواب: $k=\sqrt{۲}$

۳ : مقدار a و b را طوری بدست آورید که تابع زیر در نقطه ی $x=۳$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases}[x-۱]+۲x & x<۳\\ ۲+b & x=۳\\ \sqrt{x^{۲}-۶x+۹}+a & x>۳\end{cases}$$

جواب: مقدار $=۲+b$ و حد چپ $=۷$ و حدراست $=a$

$$\Rightarrow a=۷\ ,\ \ b=۵$$

۴ : تابع $f(x)=\dfrac{۲}{x-۳}+\dfrac{x+۱}{x^{۲}+x+۱}$ روی چه بازه هایی پیوسته است؟

***

حل چند تمرین مهم :

۱ : آیا مقداری برای m یافت می شود که تابع زیر در $x=۰$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & x\neq ۰\\ m & x=۰\end{cases}$$

حل :

حد راست $\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{x}{x}=۱$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{-x}{x}=-۱$

لذا تابع در این نقطه ی حد ندارد و ناپیوستگی اساسی دارد. لذا مقدار m هر عدد حقیقی باشد، تابع پیوسته نیست.یعنی مقدار برای m وجود ندارد که تابع پیوسته شود.

۲ : پیوستگی تابع $f(x)=[x]$ در هر عدد صحیح n را بررسی کنید.

حل :

حد راست $\lim\limits_{x\to n^+}f(x)=\lim\limits_{x\to n^+}[x]=[n^+]=n=f(n)$

حد چپ $\lim\limits_{x\to n^-}f(x)=\lim\limits_{x\to n^-}[x]=[n^-]=n-۱\neq f(n)$

لذا تابع ، در هر عدد صحیح n از راست پیوسته است، اما از چپ ناپیوسته است.

۳ : پیوستگی تابع $f(x)=[\sin x]$ در نقطه ی $x=\pi$ را بررسی کنید.

حل :

حد راست $\lim\limits_{x\to \pi^+}f(x)=\lim\limits_{x\to \pi^+}[\sin x]=[(۰)^-]=-۱$

حد چپ $\lim\limits_{x\to \pi^-}f(x)=\lim\limits_{x\to \pi^-}[\sin x]=[۰^+]=۰$

مقدار $f(\pi)=[\sin\pi]=[۰]=۰$

لذا تابع ، در نقطه ی $x=\pi$ از چپ پیوسته است، اما از راست ناپیوسته است.

۴ : پیوستگی تابع $f(x)=x-\sqrt{۴-x^{۲}}$ را در نقاط انتهایی دامنه ی آن بررسی کنید.

حل :

$$D_f=[-۲,۲]$$

$$\lim_{x\to ۲} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(x-\sqrt{۴-x^{۲}})=۲=f(۲)$$ تابع در نقطه ی $x=۲$ پیوسته است.

$$\lim_{x\to -۲} f(x)=\lim_{x\to (-۲)^+}(x-\sqrt{۴-x^{۲}})=-۲=f(-۲)$$ تابع در نقطه ی $x=-۲$ پیوسته است.

۵ : پیوستگی تابع $f(x)=\dfrac{۱}{\sqrt{x-۱}}$ را در دامنه ی آن بررسی کنید.

حل: دامنه ی این تابع مجموعه ی $(۱,+\infty)$ می باشد. این تابع نیز در این مجموعه پیوسته است. زیرا برای هـر نقطـه ی $c>۱$ پیوسته می باشد، زیرا $\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c}\dfrac{۱}{\sqrt{c-۱}}=f(c)$

۶ : تابع $f(x)=\tan\sqrt{x}$ در چه نقاطی پیوسته است؟

حل :

$$f(x)=\tan\sqrt{x}=\frac{\sin\sqrt{x}}{\cos\sqrt{x}}$$

$$D_f=[۰,+\infty)-\{x\,|\,\sqrt{x}=k\pi+\frac{\pi}{۲}\}=[۰,+\infty)-\{x\,|\,x=(k\pi+\frac{\pi}{۲})^{۲}\}$$

۷ : نقاط ناپیوستگی تابع زیر را پیدا کنید.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}-۱}{x-۱} & x>۱\\ x^{۲} & x\le ۱\end{cases}$$

حل : کافی است، پیوستگی را در نقطه ی $x=۱$ بررسی کنیم.

حد راست $$\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^{۲}-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}(x+۱)=۲$$

حد چپ $\lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = (1)^2 = 1$

مقدار $f(1) = 1$

لذا تابع در نقطه ی $x = 1$ ناپیوسته است و در سایر نقاط دامنه اش پیوسته است.

۸ : مقدار a را چنان انتخاب کنید که تابع $x = 0$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

حل : باید $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ باشد.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x} \times \frac{\sqrt[3]{(x+8)^2}+2\sqrt[3]{x+8}+4}{\sqrt[3]{(x+8)^2}+2\sqrt[3]{x+8}+4}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{(x+8)^3}-8}{x} \times \frac{1}{\sqrt[3]{(x+8)^2}+2\sqrt[3]{x+8}+4} = \lim_{x\to 0} \frac{x+8-8}{x} \times \frac{1}{\sqrt[3]{(x+8)^2}+2\sqrt[3]{x+8}+4}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+8)^2}+2\sqrt[3]{x+8}+4} = \frac{1}{4+4+4} = \frac{1}{12}$$

پس $f(0) = a = \frac{1}{12}$

۹ : به ازای چه مقدار a ، تابع زیر در $x = 0$ پیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

حل :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x > 0 \\ a & x = 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$$

لذا باید $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$ باشد.

حد راست $\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+} \sqrt{x}=۰$

حد چپ $\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-} -\sqrt{-x}=۰$

مقدار $f(۰)=a$

پس طبق شرط پیوستگی $a=۰$

۱۰ : عدد های b و a را چنان انتخاب کنید که تابع f در نقطه ی $x=۰$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} a+[x] & x<۰ \\ b & x=۰ \\ \dfrac{\sin x}{\sqrt{۱-\cos x}} & x>۰ \end{cases}$$

حل :

حد راست $\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+} \dfrac{\sin x}{\sqrt{۱-\cos x}} \overset{\frac{۰}{۰}}{=} \lim_{x\to ۰^+} \dfrac{\sin x}{\sqrt{۱-\cos x}}\times\dfrac{\sqrt{۱+\cos x}}{\sqrt{۱+\cos x}}$

$=\lim_{x\to ۰^+} \dfrac{\sin x}{\sqrt{۱-\cos^۲ x}}\times\sqrt{۱+\cos x}=\lim_{x\to ۰^+} \dfrac{\sin x}{|\sin x|}\times\sqrt{۱+\cos x}$

$=\lim_{x\to ۰^+} \dfrac{\sin x}{\sin x}\times\sqrt{۱+\cos x}=\sqrt{۱+۱}=\sqrt{۲}$

حد چپ $\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-} (a+[x])=a-۱$

مقدار $f(۰)=b$

پس طبق شرط پیوستگی $\sqrt{۲}=a-۱=b$

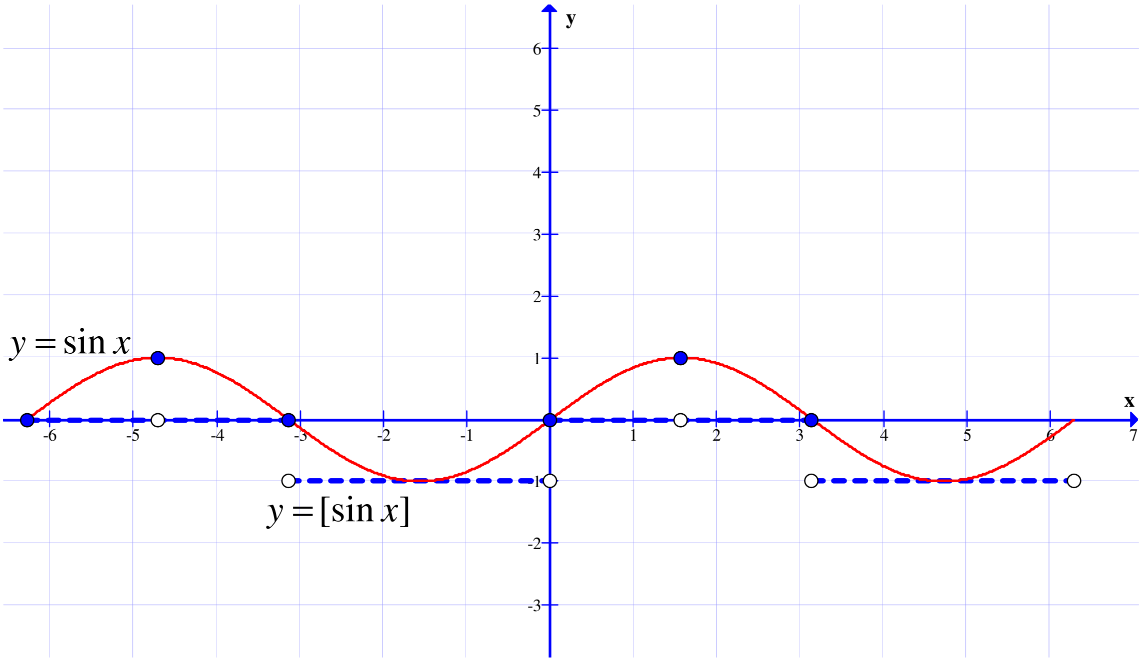
$\to a=۱+\sqrt{۲} \ , \ b=\sqrt{۲}$

۱۱ : تابع $f(x)=[\frac{x}{۲}]$ در چه نقاطی ناپیوسته است.

حل : این تابع در نقاطی که $\frac{x}{۲}$ صحیح باشد، ناپیوسته است. بنابراین $\frac{x}{۲}=k \xrightarrow{k\in Z} x=۲k$

۱۲ : نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)=[\sin x]$ را در بازه ی $[-۲\pi,۲\pi]$ مشخص کنید.

حل : ابتدا نمودار تابع را در فاصله ی داده شده رسم می کنیم.



با توجه به نمودار تابع $f(x)=[\sin x]$ مشاهده می شود که تابع در فاصله ی داده شده ، در نقاط ۲π و π و $\frac{\pi}{۲}$ و ۰ و $-\pi$ و $-\frac{۳\pi}{۲}$ ناپیوسته است.

۱۳ : اگر تابع f در نقطه ای پیوسته باشد،ثابت کنید تابع $|f|$ نیز در آن نقطه پیوسته است.آیا عکس این مطلب درست است؟

حل :

$$\lim_{x\to a}|f(x)|=|\lim_{x\to a}f(x)|=|f(a)|$$

یعنی تابع $|f|$ پیوسته است.

عکس این مطلب درست نمی باشد. زیرا تابع زیر در نقطه ی $x=۰$ پیوسته نیست. در حالی که قدر مطلق آن پیوسته می باشد.

$$f(x)=\begin{cases} ۱ & x\geq ۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases} \quad \text{و} \quad |f(x)|=۱$$

۱۴ : با استفاده از قضایای حد و پیوستگی ، ثابت کنید که تابع $f(x)=[x]\sin \pi x$ روی R پیوسته است.

حل :

اگر $x\in Z$ آنگاه $f(x)=[x]\sin \pi x=(x)(۰)=۰$ یعنی تابع در تمام نقاط صحیح پیوسته است.

اگر $x\notin Z$ آنگاه $[x]$ پیوسته و $\sin \pi x$ نیز پیوسته هستند و لذا حاصل ضرب آنها یعنی $f(x)=[x]\sin \pi x$ پیوسته است.

۱۵ : تابع $f(x)=[x^۲]$ روی بازه ی $[۲,۲+k)$ پیوسته است، بزرگترین مقدار k را بیابید.

حل : این تابع به ازای نقاطی که داخل براکت عددی صحیح شود(به جزء $x=۰$) ناپیوسته است. لذا تابع در نقاط به شکل زیر ناپیوسته می باشد.

$$x^۲=k \to x=\pm\sqrt{k} \xrightarrow{x\neq ۰} x=\pm ۱\,,\pm\sqrt{۲}\,,\pm\sqrt{۳}\,,\pm ۲\,,\pm\sqrt{۵}\,,....$$

پس اولین نقطه‌ی ناپیوستگی بعد از $x=۲$ که انتهای بازه‌ی $[۲,۲+k)$ است. عدد $\sqrt{۵}$ می باشد.یعنی

$[۲,۲+k)=[۲,\sqrt{۵})$ در نتیجه $۲+k=\sqrt{۵} \to k=\sqrt{۵}-۲$

۱۶ : تابع زیر در چند نقطه از دامنه اش ناپیوسته است؟

$$f(x)=\begin{cases} ۴ & x^۲=|x| \\ x+۲ & x^۲\neq|x| \end{cases}$$

حل: این تابع به صورت زیر است.

$$f(x)=\begin{cases} ۴ & x=-۱,۰,۱ \\ x+۲ & x\neq -۱,۰,۱ \end{cases}$$

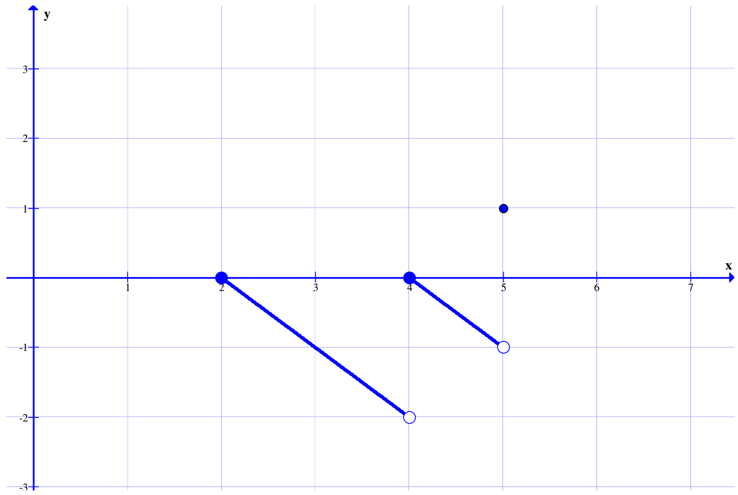
با بررسی شرایط پیوستگی واضح است که تابع در نقاط ۱ و ۰ و ۱- دارای حد است ولی این حد با مقدار تابع در آن نقطه برابر نیست. لذا تابع در این سه نقطه ناپیوسته است.

۱۷ : تابع $f(x)=\dfrac{۴-\sqrt{x+۳}}{\sqrt[۳]{x+۱}-۱}$ در چند نقطه از دامنه اش پیوسته است؟

حل : دامنه ی این تابع $[-۳,+\infty)-\{۰\}$ است و این تابع در تمام نقاط دامنه اش پیوسته است.

۱۸ : نمودار تابع $f(x)=[x]-x+\sin(\frac{\pi}{۲}[x])$ را در بازه ی $[۲,۵]$ رسم کرده و مشخص کنید، در چند نقطه از این بازه ناپیوسته است؟

حل :



$$۲\le x<۳ \xrightarrow{[x]=۲} y=۲-x$$

$$۳\le x<۴ \xrightarrow{[x]=۳} y=۲-x$$

$$۴\le x<۵ \xrightarrow{[x]=۴} y=۴-x$$

$$x=۵ \xrightarrow{[x]=۵} y=۱$$

با توجه به نمودار تابع ، معلوم می شود که تابع f در نقاط $x=۴$ و $x=۵$ ناپیوسته است.

۱۹ : پیوستگی تابع زیر را روی R بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^۲ & x^۲\ge ۲|x| \\ ۲|x| & x^۲<۲|x| \end{cases}$$

حل : این تابع به شکل زیر است.

$$f(x)=\begin{cases} x^۲ & x\le -۲ \vee x=۰ \vee x\ge ۲ \\ ۲x & ۰<x<۲ \\ -۲x & -۲<x<۰ \end{cases}$$

با بررسی شرایط پیوستگی واضح است که تابع در نقاط ۲ و ۰ و ۲- دارای حد است و این حد با مقدار تابع در آن نقطه برابر است. لذا تابع در این سه نقطه پیوسته است.

۲۰ : عدد های b و a را چنان انتخاب کنید کـه تـابع $f(x)=(x^۲-bx+a)\operatorname{sgn}(x^۲+x-۲)$ روی R پیوسـته باشد.(sgn تابع علامت است.)

حل :

$x^{۲}+x-۲=۰ \rightarrow x=۱\,, x=-۲$

با تعیین علامت عبارت $x^{۲}+x-۲$ ، خواهیم داشت :

x	$-\infty$		-۲		۱		$+\infty$
$x^{۲}+x-۲$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

حال با توجه به تعریف تابع علامت واضح است که

$x<-۲ \rightarrow \operatorname{sgn}(x^{۲}+x-۲)=۱$

$x=-۲ \rightarrow \operatorname{sgn}(x^{۲}+x-۲)=۰$

$-۲<x<۱ \rightarrow \operatorname{sgn}(x^{۲}+x-۲)=-۱$

$x=۱ \rightarrow \operatorname{sgn}(x^{۲}+x-۲)=۰$

$x>۱ \rightarrow \operatorname{sgn}(x^{۲}+x-۲)=۱$

پس معادله ی تابع f به شکل زیر به دست می آید.

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}-bx+a & x<-۲ \vee x>۱ \\ ۰ & x=-۲ \vee x=۱ \\ -(x^{۲}-bx+a) & -۲<x<۱ \end{cases}$$

چون تابع f روی R پیوسته است. پس در نقاط $x=۱$ و $x=-۲$ نیز پیوسته است. بنابراین

$$\lim_{x\to ۱^{+}} f(x)=\lim_{x\to ۱^{-}} f(x)=f(۱) \rightarrow -(۴+۲b+a)=۴+۲b+a=۰ \rightarrow a+۲b=-۴$$

$$\lim_{x\to (-۲)^{+}} f(x)=\lim_{x\to (-۲)^{-}} f(x)=f(-۲) \rightarrow ۱-b+a=-(۱-b+a)=۰ \rightarrow a-b=-۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+۲b=-۴ \\ a-b=-۱ \end{cases} \rightarrow a=-۲\,,\ b=-۱$$

***

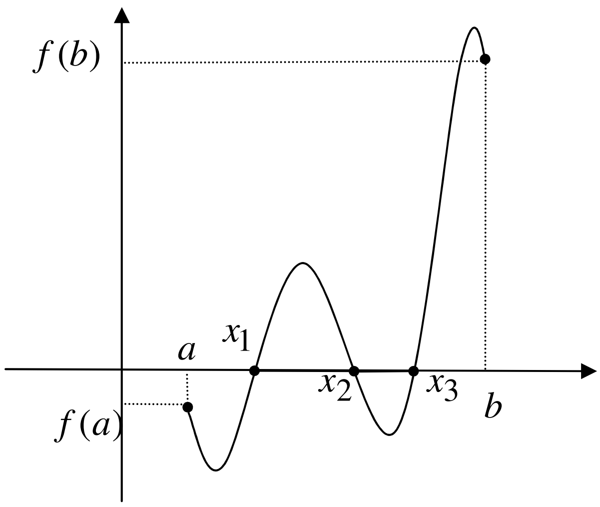
ویژگی های توابع پیوسته

توابع پیوسته ، به ویژه توابع پیوسته در یک فاصله دارای ویژگی هایی هستند که قابل توجه می باشند. بیشتر این ویژگی ها ناشی از خصوصیت شهودی توابع پیوسته است که نمودار تابع پیوسته بر یک بازه به صورتی ملموس دارای اتصال و یکپارچگی است. در اینجا مهمترین این ویژگی ها را مورد بررسی قرار می دهیم.

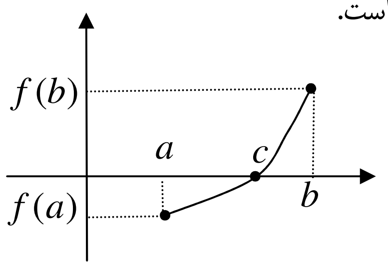
ویژگی اول توابع پیوسته : (وجود ریشه)

بنابر خاصیت اتصال و یکپارچگی تابع پیوسته در یک بازه می توان قضیه ی زیر را بیان کرد.

قضیه : (قضیه ی بولتزانو) اگر تابعی در بازه ی $[a,b]$ پیوسته و در نقطه ی a مثبت و در نقطه ی b منفی یا برعکس باشد(بطور کلی $f(a)\times f(b)<0$) آنگاه در نقطه ای در بازه ی (a,b) مقدار آن صفر می شود. یعنی حداقل یک $a<c<b$ وجود دارد که $f(c)=0$ شود. به عبارت دیگر $f(x)$ در فاصله ی (a,b)حداقل یک ریشه به نام c دارد.



نکته: اگر f در فاصله ی $[a,b]$ اکیداً یکنوا باشد.آنگاه c منحصر به فرد است.



تمرین : تابع $f(x)=(x-۱)(x-۲)(x-۳)+x^۲$ داده شده است.نشان دهید که معادلـه ی $f(x)=۰$ در بـازه ی $[۰,۱]$ دارای حداقل یک ریشه است.

حل: تابع داده شده یک تابع چند جمله ای است و لذا در مجموعه ی اعداد حقیقی و در نتیجـه در فاصـله ی $[۰,۱]$ پیوسـته است. از طرفی

$$\begin{cases} f(۰)=-۶ \\ f(۱)=۱ \end{cases}$$

و چون $f(۰)\times f(۱)<۰$ پس طبق قضیه ی بولتزانو حداقل یک عدد $c\in(۰,۱)$ وجود دارد بطوری که $f(c)=۰$

(یعنی نمودار تابع حداقل در یک نقطه محور طولها را قطع می کند.)

تمرین : ثابت کنید که معادله ی $x^۳-۳x+۱=۰$ در بازه ی $[(,۱)]$ دارای حداقل یک ریشه است.

حل: تابع $f(x)=x^۳-۳x+۱$ یک تابع چند جمله ای است و لذا در مجموعه ی اعداد حقیقی و در نتیجـه در فاصـله ی $[۰,۱]$ پیوسته است. از طرفی

$$\begin{cases} f(۰)=۱ \\ f(۱)=-۱ \end{cases}$$

و چون $f(۱)\times f(۰)<۰$ پس طبق قضیه ی بولتزانو حداقل یک عدد $c\in(۰,۱)$ وجود دارد بطوری که $f(c)=۰$

(یعنی نمودار تابع حداقل در یک نقطه محور طولها را قطع می کند.)

تمرین : تابع $f(x)=\sqrt{۳}-۲\tan x$ مفروض است. نشان دهید که معادله ی $f(x)=۰$ در بـازه ی $[۰,\frac{\pi}{۳}]$ دارای ریشه است.

حل: تابع f در بازه ی $[۰,\frac{\pi}{۳}]$ پیوسته است و

$$\begin{cases} f(۰)=\sqrt{۳} \\ f(\frac{\pi}{۳})=-\sqrt{۳} \end{cases} \rightarrow f(۰)\times f(\frac{\pi}{۳})<۰$$

پس بنا بر نتیجه ی قضیه ی قضیه ی بولتزانو حداقل یک $۰<c<\frac{\pi}{۳}$ وجود دارد که $f(c)=۰$

تمرین: معادله ی درجه ی سوم $x^{۳}-۳x^{۲}+۲=۰$ داده شده است. نشان دهید که معادله در بـازه ی $[۰,۲]$ حـداقل دارای یک ریشه است.

حل: تابع $f(x)=x^{۳}-۳x^{۲}+۲$ در این بازه پیوسته است و

$$\begin{cases} f(۰)=۲ \\ f(۲)=-۲ \end{cases} \rightarrow f(۰)\times f(۲)<۰$$

پس بنابر قضیه ی بولتزانو حداقل یک c در فاصله ی $(۰,۲)$ وجود دارد که $f(c)=۰$

تمرین: نشان دهیـد کـه معادلـه ی $(x-۱)(x+۱)(x-۳)+x^{۲}-۲x=۰$ در بـازه ی $[-۲,۲]$ دو ریـشه دارد و علامت ریشه ها را معلوم کنید.

حل: تعریف می کنیم $f(x)=(x-۱)(x+۱)(x-۳)+x^{۲}-۲x$. این تابع در مجموعه ی اعداد حقیقـی پیوسـته است و لذا در این فاصله نیز پیوسته است. از طرفی چون

$$\begin{aligned} & f(-۲)=-۷ \quad , \quad f(۰)=۳ \quad , \quad f(۲)=-۳ \\ & \Rightarrow f(-۲)\times f(۰)<۰ \quad , \quad f(۰)\times f(۲)<۰ \end{aligned}$$

همچنین تابع در بازه های $[-۲,۰]$ و $[۰,۲]$ پیوسته است.پس بنابر قضیه ی بولتزانو معادله ی $f(x)=۰$ در هـر یـک از بازه های $(-۲,۰)$ و $(۰,۲)$ حداقل یک ریشه دارد و در نتیجه تابع f در بازه ی $[-۲,۲]$ حداقل دو ریشه مختلف العلامـه دارد.

تمرین: نشان دهید که منحنی $f(x)=\dfrac{x^{۲}+۱}{۴x-۲\sin x-۱}$ در بازه ی $[۰,۱]$ حداقل یک نقطه ی ناپیوستگی دارد.

حل: نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)=\dfrac{x^{۲}+۱}{۴x-۲\sin x-۱}$ ریشه های مخرج می باشند. پس کافی اسـت ثابـت کنـیم کـه معادله ی $۴x-۲\sin x-۱=۰$ در بازه ی $[۰,۱]$ حداقل یک ریشه دارد. تعریف می کنیم:

$g(x)=۴x-۲\sin x-۱$ و چون تابع g در فاصله ی $[۰,۱]$ پیوسته بوده و

$$\begin{cases} g(۰)=۴(۰)-۲\sin ۰-۱=-۱ \\ g(۱)=۴(۱)-۲\sin ۱-۱>۰ \end{cases} \rightarrow g(۰)\times g(۱)<۰$$

پس طبق قضیه ی بولتزانو معادله ی $g(x)=۰$ در بازه ی $(۰,۱)$ حد اقل یک ریشه دارد.

تمرین: حدود m را به قسمی تعیین کنید که یکی از ریشه های معادلـه ی $x^۲-(m+۱)x+۲m-۳=۰$ بـین دو عدد ۱و۱- باشد.

حل: تعریف می کنیم $f(x)=x^۲-(m+۱)x+۲m-۳$.این تابع در فاصله ی $(-۱,۱)$ پیوسته اسـت و چـون در این فاصله ریشه دارد.پس $f(-۱)\times f(۱)<۰$ و در نتیجه ی می توان نوشت:

$$\begin{cases} f(-۱)=(-۱)^۲-(m+۱)(-۱)+۲m-۳=۳m-۱ \\ f(۱)=(۱)^۲-(m+۱)(۱)+۲m-۳=m-۳ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{f(-۱)\times f(۱)<۰}(۳m-۱)(m-۳)<۰\rightarrow ۳m^۲-۱۰m+۳<۰$$

حال این نامعادله را به کمک تعیین علامت حل می کنیم.

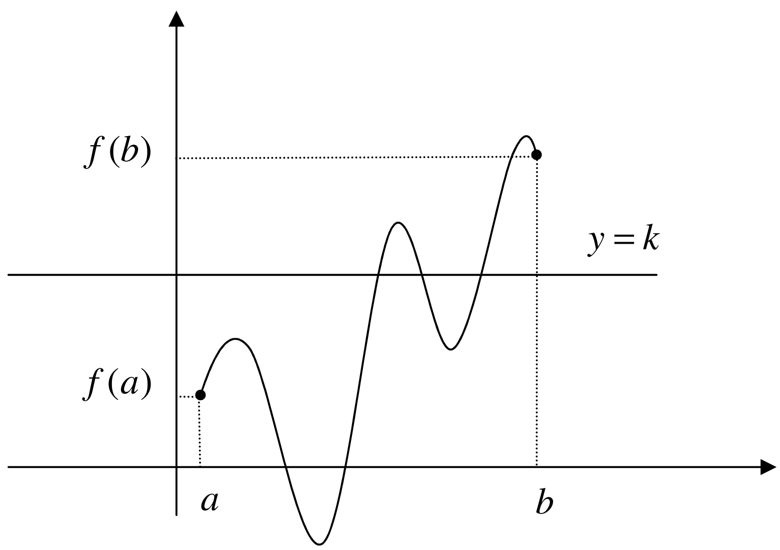
$$(۳m-۱)(m-۳)=۰\rightarrow m=\frac{۱}{۳}\ ,\ m=۳$$

m	$-\infty$		$\frac{۱}{۳}$		۳		$+\infty$
$۳m^۲-۱۰m+۳<۰$		+	۰	−	۰	+	

لذا داریم: $\frac{۱}{۳}<m<۳$

قضیه ی مقدار میانی : اگر تابع f در بازه ی بسته ی $[a,b]$ پیوسته باشد و اگر عدد حقیقـی k بـین $f(a)$ و $f(b)$ باشد.آنگاه حداقل یک عدد حقیقی c در بازه ی $[a,b]$ وجود دارد که $f(c)=k$

به عبارت دیگر خط $y=k$ نمودار f را حتماً در یک یا چند نقطه قطع می کند.



اثبات : اگر تابع f در بازه ی $[a,b]$ پیوسته و k عددی بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد. قرار می دهیم:

$$g(x)=f(x)-k$$

حال چون f پیوسته است در نتیجه g نیز پیوسته می باشد. همچنین $g(a).g(b)<۰$ لذا طبق قضیه ی بولتزانو وجود دارد $c\in(a,b)$ که $g(c)=۰$ پس $f(c)-k=۰$ یعنی $f(c)=k$

تمرین : نشان دهید که نمودار تابع $f(x)=۱+\sin x$ در فاصله ی $[\frac{\pi}{۲},\pi]$ خط $y=\frac{۳}{۲}$ را قطع می کند.

حل: تابع f در مجموعه ی اعداد حقیقی و در نتیجه در فاصله ی $[\frac{\pi}{۲},\pi]$ پیوسته است. از طرفی

$$\begin{cases} f(\frac{\pi}{۲})=۱+\sin\frac{\pi}{۲}=۱+۱=۲ \\ f(\pi)=۱+\sin\pi=۱+۰=۱ \end{cases}$$

و چون $f(\pi)=۱<\frac{۳}{۲}<f(\frac{\pi}{۲})=۲$ پس خط $y=\frac{۳}{۲}$ نمودار تابع را در این فاصله قطع می کند.

تمرین : اگر $P(x)$ یک چند جمله ای از درجه ی فرد باشد. ثابت کنید که $P(x)=۰$ حداقل یک ریشه ی حقیقی دارد.

حل : بدیهی است که $P(x)$ همواره پیوسته است. حال فرض می کنیم که ax^n جمله ی دارای بیشترین توان $P(x)$ باشد. پس وقتی $x\to\pm\infty$ می توان گفت که بسته به علامت a حد $P(x)$ به طور متفاوت $+\infty$ و $-\infty$ می شود. لذا طبق قضیه ی مقدار میانی وجود دارد $c\in R$ که $P(c)=۰$

تمرین برای حل :

۱ : نشان دهید که معادله ی $x-\cos x=۰$ ریشه ای در بازه ی $[۰,۱]$ دارد.

۲ : نشان دهید که معادله ی $x^۳=x+۱$ ریشه ای در بازه ی $(۱,۲)$ دارد.

۳ : نشان دهید که معادله ی $x^۵+x^۴+۲x^۳-x+۲=۰$ ریشه ای در بازه ی $(-۲,۰)$ دارد.

۴ : نشان دهید که معادله ی $\sin x-x^۲+x+۱=۰$ در بازه ی $[-\pi,\pi]$ حداقل دو ریشه دارد.

۵ : آیا تابع $f(x)=\frac{x^۳}{۴}+\sin\pi x+۴$ در بازه ی $(-۲,۲)$ مقدار ۵ را می تواند داشته باشد؟ چرا؟

۶ : نشان دهید که خط $y=۲$ نمودار تابع $f(x)=(x-۱)^۲(x-۳)^۲+x$ را قطع می کند.

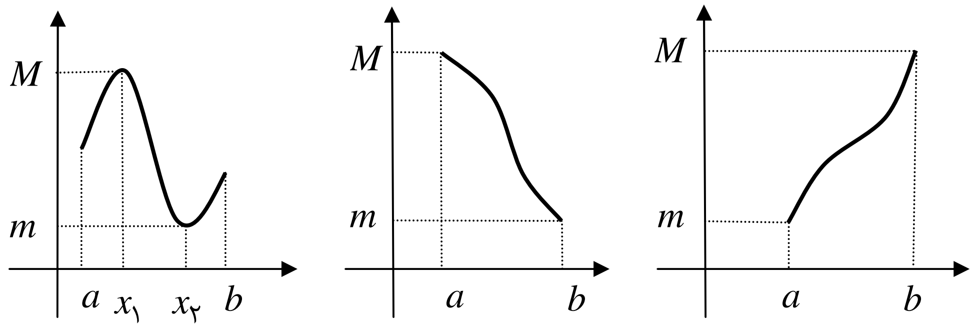
ویژگی دوم توابع پیوسته

قضیه: اگر تابع f در فاصله ی $[a,b]$ پیوسته باشد،آنگاه در این فاصله کراندار است و ماکزیمم و می نیمم مطلق دارد.

به عبارت دیگر:

الف) عدد حقیقی k وجود دارد که برای هر $x \in [a,b]$ آنگاه $|f(x)| < k$

ب) دو عدد $x_۱$ و $x_۲$ در بازه ی $[a,b]$ وجود دارند که برای هر $x \in [a,b]$ در این صورت $f(x_۱) \le f(x) \le f(x_۲)$



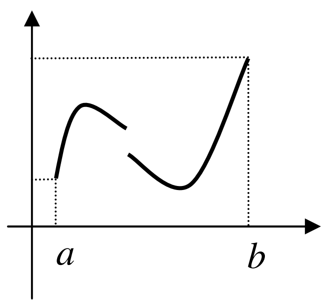
تمرین: تابع $f(x) = \dfrac{۱}{x-۱} + \dfrac{۱}{x+۴} + \sqrt{x^۲+۱}$ در بازه ی $[\frac{۳}{۲},۵]$ تعریف شده است.

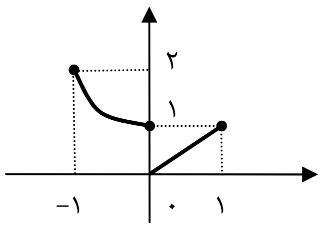
اولاً: کرانداری f در این بازه را بررسی کنید.

ثانیاً: آیا تابع f در این بازه ماکسیمم و مینیمم مطلق دارد؟ یا خیر.

حل: می دانیم که تابع f در $R-\{۱,-۴\}$ پیوسته می باشد.پس این تابع در فاصله ی $[\frac{۳}{۲},۵]$ هم پیوسته است.لذا بنابر قضیه تابع در این فاصله کراندار است و دارای ماکزیمم و می نیمم خواهد بود.

توجه: شرط پیوسته بودن برای وجود ماکزیمم و می نیمم مطلق و کراندار بودن کافی است ولی ضروری نیست.یعنی اگر تابع f در فاصله ی $[a,b]$ پیوسته نباشد، ممکن است در این فاصله دارای ماکزیمم و می نیمم مطلق باشد و ممکن است نباشد.





مثال: تابع زیر در بازه ی $[-1,1]$ پیوسته نیست ولی کراندار است و مقدار ماکزیمم مطلق آن ۲ و می نیمم مطلق آن صفر است و برای هر $x\in[-1,1]$ باید $|f(x)|\le 2$ به نمودار زیر توجه کنید.

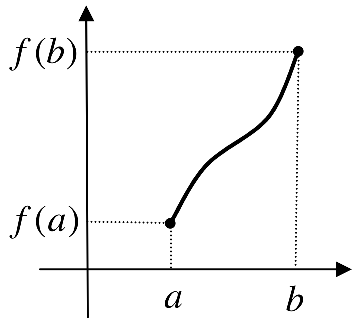
$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & -1\le x<0 \\ x & 0\le x\le 1 \end{cases}$$

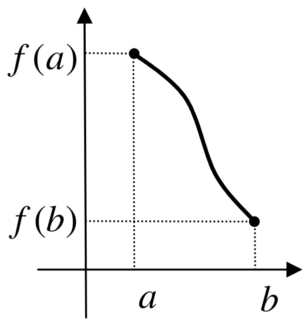
توجه: پیوستگی تابع f در فاصله ی $[a,b]$ وجود ماکزیمم و می نیمم مطلق تابع f در این فاصله را تضمین می کند.اما روشی برای بدست آوردن ماکسیمم و می نیمم مطلق ارائه نمی کند. در بحث مشتق روش مشخصی ارائه خواهد شد.

***

ویژگی سوم توابع پیوسته

قضیه: اگر تابع f در بازه ی $[a,b]$ پیوسته واکیداً صعودی باشد.آنگاه برد f برابر $[f(a),f(b)]$ است و اگر تابع f در بازه ی $[a,b]$ پیوسته واکیداً نزولی باشد.آنگاه برد f برابر $[f(b),f(a)]$ است





تمرین: برد توابع داده شده ی زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x)=\sqrt{2-\sqrt{x-2}}$ ب) $g(x)=\sqrt{x-1}-\sqrt{2-x}$

حل الف: ابتدا دامنه ی تابع را تعیین می کنیم.

$$x-2\ge 0\to x\ge 2$$
$$2-\sqrt{x-2}\ge 0\to \sqrt{x-2}\le 2\to x-2\le 4\to x\le 6$$
$$\Rightarrow 2\le x\le 6$$

حال از تابع مشتق می گیریم.

$$f'(x)=\frac{0-\frac{1}{2\sqrt{x-2}}}{2\sqrt{2-\sqrt{x-2}}}=\frac{-1}{4\sqrt{(x-2)(2-\sqrt{x-2})}}<0$$

پس تابع همواره نزولی است[1] و لذا برد تابع می شود.

$$R_f=[f(6),f(2)]=[0,\sqrt{2}]$$

حل ب: ابتدا دامنه ی تابع را تعیین می کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} x-1\geq 0\rightarrow x\geq 1 \\ 2-x\geq 0\rightarrow x\leq 2 \end{array}\right\}\Rightarrow 1\leq x\leq 2$$

حال از تابع مشتق می گیریم.

$$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}+\frac{1}{2\sqrt{2-x}}>0$$

پس تابع همواره صعودی است[2] و لذا برد تابع می شود.

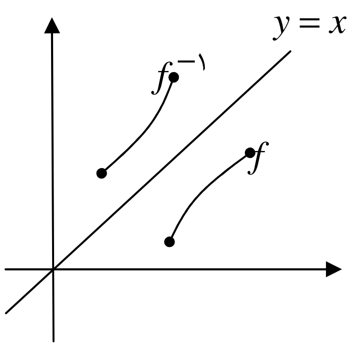
$$R_f=[f(1),f(2)]=[-1,1]$$

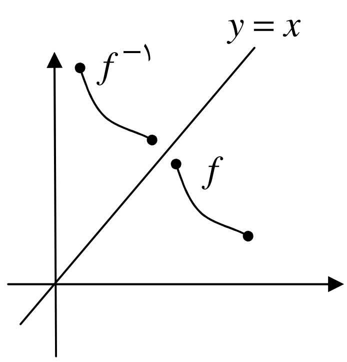
***

ویژگی چهارم توابع پیوسته (پیوستگی تابع معکوس)

اگر f در فاصله‌ی $[a,b]$ پیوسته و اکیداً صعودی باشد،آنگاه f^{-1} در فاصله‌ی $[f(a),f(b)]$ پیوسته و اکیـداً صـعودی است.

اگر f در فاصله‌ی $[a,b]$ پیوسته و اکیداً نزولی باشد،آنگاه f^{-1} در فاصله‌ی $[f(b),f(a)]$ پیوسته و اکیداً نزولی است.





[1] . دلیل این کار را در بحث کاربرد مشتق خواهید دید.

[2] . دلیل این کار را در بحث کاربرد مشتق خواهید دید

برای مثال تابع $y=\sin^{-۱}x$ روی بازه ی $[-۱,۱]$ پیوسته واکیداً صعودی است. زیرا معکوس آن یعنی $y=\sin x$ روی $[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$ پیوسته واکیداً صعودی است. همچنین تابع $y=\cos^{-۱}x$ روی بازه ی $[-۱,۱]$ پیوسته واکیداً نزولی است. زیرا معکوس آن یعنی $y=\cos x$ روی $[۰,\pi]$ پیوسته واکیداً نزولی است.

نتیجه : اگر f تابعی در فاصله ی $[a,b]$ پیوسته و یک به یک باشد،آنگاه $f^{-۱}$ در فاصله ی $[f(a),f(b)]$ پیوسته و یک به یک است. برای مثال چون تابع $f(x)=x^{۳}$ پیوسته و یک به یک است ، نتیجه می شود که تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x}$ نیز پیوسته و یک به یک می باشد.

تمرین : تابع f در زیر را در نظر بگیرید. تعیین کنید که تابع $f^{-۱}$ در چند نقطه از دامنه اش ناپیوسته است؟

$$f(x)=\begin{cases} x-۱ & ۱<x<۲ \\ ۲x-۴ & ۳<x<۴ \end{cases}$$

حل : بدیهی است که

$$f(x)=\begin{cases} x+۱ & ۰<x<۱ \\ \frac{x}{۲}+۴ & ۲<x<۴ \end{cases}$$

لذا $D_{f^{-۱}}=(۰,۱)\cup(۲,۴)$ پس با توجه به شرایط پیوستگی، نتیجه می شود که تابع $f^{-۱}$ در تمام نقاط دامنه اش، پیوسته است.

***

رسم نمودار توابع معکوس مثلثاتی

برای رسم نمودار توابع معکوس مثلثاتی از ویژگی پیوسته بودن تابع و متقارن بودن نمـودار تـابع و معکـوس آن نـسبت بـه نیمساز ربع اول و سوم استفاده می کنیم. بر این اساس خواهیم داشت:

الف) نمودار تابع $y=\sin^{-1}x$ در فاصله ی $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ قرینه ی نمودار تابع $y=\sin x$ نسبت به خط $y=x$ است.

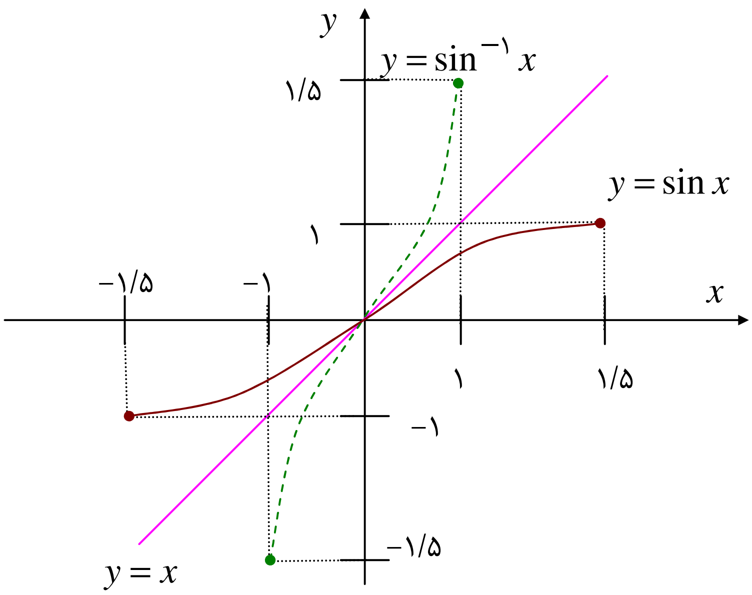
$f(x)=\sin x$

$f^{-1}(x)=\sin^{-1}x$

$$x=\frac{\pi}{2}\xrightarrow{y=\sin x}y=\sin\frac{\pi}{2}=1\Rightarrow(\frac{\pi}{2},1)\in f\rightarrow(1,\frac{\pi}{2})\in f^{-1}$$

$$x=0\xrightarrow{y=\sin x}y=\sin 0=0\Rightarrow(0,0)\in f\rightarrow(0,0)\in f^{-1}$$

$$x=-\frac{\pi}{2}\xrightarrow{y=\sin x}y=\sin(-\frac{\pi}{2})=-1\Rightarrow(-\frac{\pi}{2},-1)\in f\rightarrow(-1,-\frac{\pi}{2})\in f^{-1}$$



***

ب) نمودار تابع $y=\cos^{-1}x$ در فاصله ی $[0,\pi]$ قرینه ی نمودار تابع $y=\cos x$ نسبت به خط $y=x$ است.

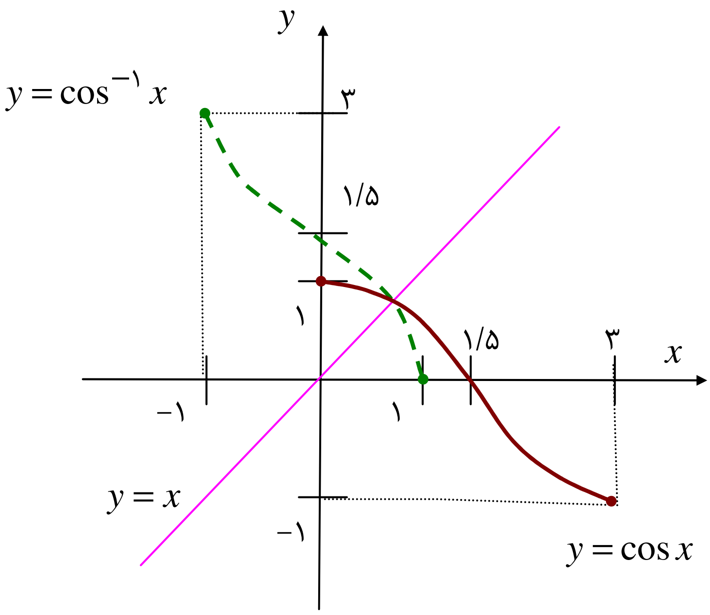
$f(x)=\cos x$

$f^{-1}(x)=\cos^{-1}x$

$$x=\pi\xrightarrow{y=\cos x}y=\cos\pi=-1\Rightarrow(\pi,-1)\in f\rightarrow(-1,\pi)\in f^{-1}$$

$$x=\frac{\pi}{۲}\xrightarrow{y=\cos x}y=\cos(\frac{\pi}{۲})=۰\Rightarrow(\frac{\pi}{۲},۰)\in f\rightarrow(۰,\frac{\pi}{۲})\in f^{-۱}$$

$$x=۰\xrightarrow{y=\cos x}y=\cos ۰=۱\Rightarrow(۰,۱)\in f\rightarrow(۱,۰)\in f^{-۱}$$



***

ج) نمودار تابع $y=\tan^{-۱}x$ در فاصله ی $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ قرینه ی نمودار تابع $y=\tan x$ نسبت به خط $y=x$ است.

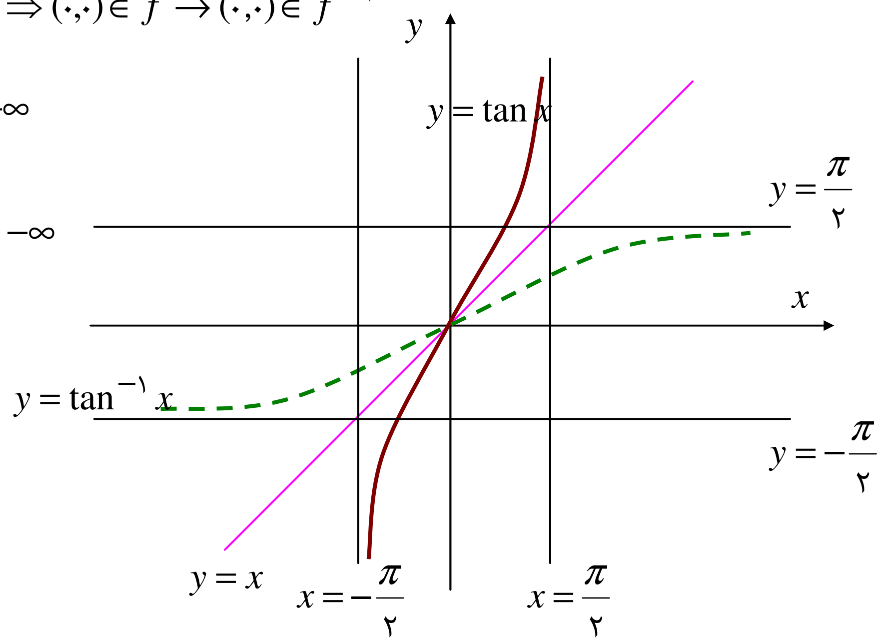
$f(x)=\tan x$

$f^{-۱}(x)=\tan^{-۱}x$

$$x=۰\xrightarrow{y=\tan x}y=\tan ۰=۰\Rightarrow(۰,۰)\in f\rightarrow(۰,۰)\in f^{-۱}$$

$$x\rightarrow(\frac{\pi}{۲})^{-}\xrightarrow{y=\tan x}y=+\infty$$

$$x\rightarrow(-\frac{\pi}{۲})^{+}\xrightarrow{y=\tan x}y=-\infty$$



د) نمودار تابع $y=\cot^{-1}x$ در فاصله ی $(0,\pi)$ قرینه ی نمودار تابع $y=\cot x$ نسبت به خط $y=x$ است.

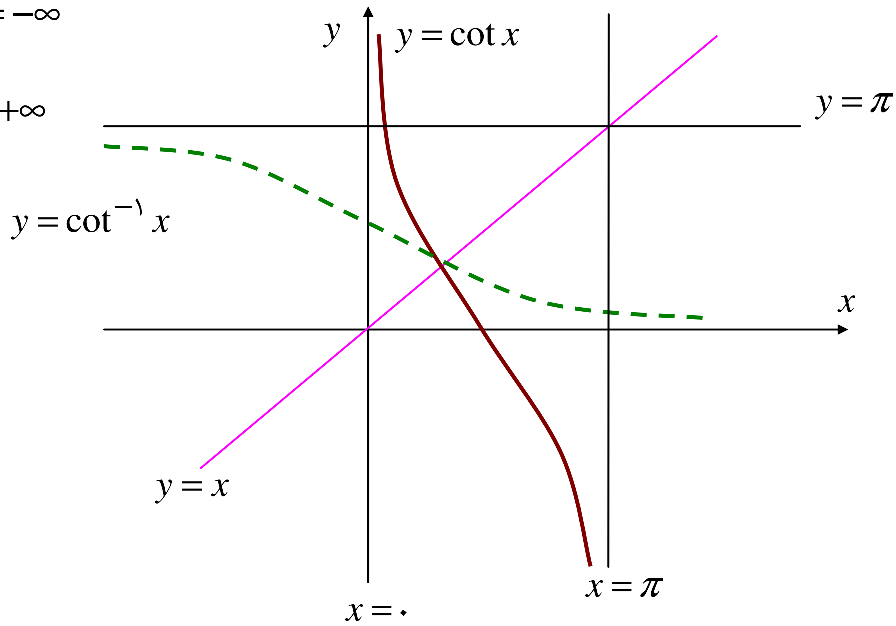
$f(x)=\cot x$

$f^{-1}(x)=\cot^{-1}x$

$$x=\frac{\pi}{2}\xrightarrow{y=\cot x}y=\cot\frac{\pi}{2}=0\Rightarrow(\frac{\pi}{2},0)\in f\rightarrow(0,\frac{\pi}{2})\in f^{-1}$$

$$x=\pi^{-}\xrightarrow{y=\cot x}y=-\infty$$

$$x=0^{+}\xrightarrow{y=\cot x}y=+\infty$$



***

حساب دیفرانسیل و انتگرال

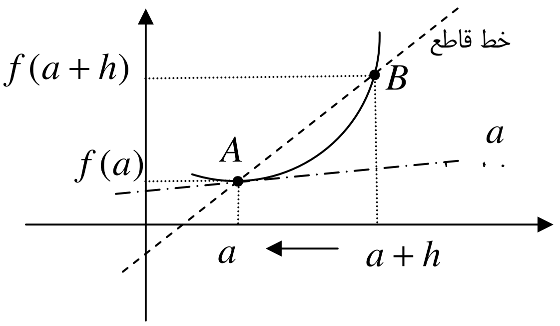
فصل سوم : مشتق و کاربرد آن

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی دبیرستان های اهواز و باوی

مسئله ی خط مماس

مسئله ی یافتن خط مماس در نقطه ی A به مسئله ی یافتن شیب خط مماس در این نقطه منجر می شود. برای یافتن خط مماس بر منحنی تابع $y = f(x)$ در نقطه ی A باید نقطه ای مانند B را روی منحنی در نزدیکی A در نظر بگیرم و با رسم خط قاطع AB ، نقطه ی Bرا به نقطه ی A نزدیک کنیم و ببینیم که آیا این خط ها به خط خاصی نزدیک می شوند، یا نه؟ واضح است که این خط همان خط مماس بر منحنی در نقطه ی A است. این عمل دقیقاً یک عمل حدگیری است و شیب این خط با یک عمل حدگیری به دست می آید.



$$A = \begin{bmatrix} a \\ f(a) \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} a+h \\ f(a+h) \end{bmatrix} \Rightarrow m_{AB} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$m = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ شیب خط مماس در صورت وجود

توجه : اگر در شکل فوق مختصات نقطه ی Bرا $(x, f(x))$ فرض کنیم. خواهیم داشت.

$$A = \begin{bmatrix} a \\ f(a) \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} x \\ f(x) \end{bmatrix} \Rightarrow m_{AB} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$m = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ شیب خط مماس در صورت وجود

***

تعریف خط مماس

اگر تابع f بر بازه ی بازی شامل a تعریف شده باشد و حد زیر موجود باشد، آنگاه خطی که از نقطه ی $A = \begin{bmatrix} a \\ f(a) \end{bmatrix}$ گذشته و به شیب m می باشد، خط مماس بر نمودار f در نقطه ی A نامیده می شود.

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

تمرین : شیب خط مماس بر نمودار $f(x)=x^{۲}$ را در نقطه ی $A(۱,۱)$ را تعیین کنید.

حل :

$$\text{شیب خط مماس}\ m=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱}=۱+۱=۲$$

تمرین : با توجه به تمرین قبل معادله ی خط مماس بر نمودار $f(x)=x^{۲}$ را در نقطه ی $A(۱,۱)$ را بنویسید.

حل :

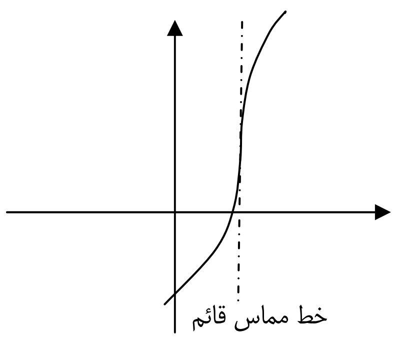
معادله ی خط مماس $y=m(x-a)+b$

$\to y=۲(x-۱)+۱\to y=۲x-۱$

توجه : تعریف فوق از خط مماس بر یک نمودار ، شامل خط مماس قائم نمی شود.اگر تابع f در a پیوسته بوده و

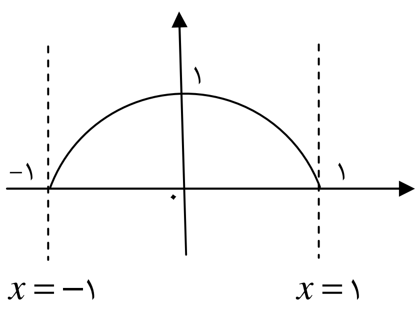
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty \ \vee\ -\infty$$

باشد، آنگاه خط $x=a$ که از نقطه ی $A(a,f(a))$ می گذرد. **خط مماس قائم** بر نمودار f است.



یادداشت : اگر دامنه ی f بازه ی بسته ی $[c,d]$ باشد، آنگاه تعریف خط مماس قائم را با توجه به پیوستگی f در نقاط انتهایی c و d طوری تعمیم می دهیم که نقاط انتهایی را در برگیرد.

مثال: خطوط $x=\pm ۱$ خطوط مماس قائم بر منحنی $f(x)=\sqrt{۱-x^{۲}}$ هستند. تابع f در نقاط $x=۱$ و $x=-۱$ پیوسته است.



تمرین : نشان دهید که خط $x=۱$ ، مماس قائم بر منحنی $f(x)=\sqrt[۳]{x-۱}$ می باشد.

حل :

$$\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt[۳]{x-۱}-۰}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt[۳]{x-۱}}{x-۱}\times\frac{\sqrt[۳]{(x-۱^{۲}}}{\sqrt[۳]{(x-۱)^{۲}}}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{x-۱}{x-۱}\times\frac{۱}{\sqrt[۳]{(x-۱)^{۲}}}=+\infty$$

***

مشتق تابع در یک نقطه

تعریف : فرض کنیم تابع f در یک همسایگی نقطه ی a تعریف شده باشد. اگر $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ موجود باشد، آن را مشتق تابع f در a نامیده و با $f'(a)$ یا $\frac{\partial f}{\partial x}|_{x=a}$ نمایش می دهند. در این صورت گوییم، تابع f در a مشتق پذیر است و در غیر این صورت (حد بالا موجود نباشد) ، گوییم f در a مشتق پذیر نیست.

توجه : مشتق تابع در یک نقطه را به شکل دیگری نیز می توان نوشت. فرض کنیم که $x=a+h$ پس $h=x-a$ و لذا

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\to f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

تمرین : مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در نقطه ی $x=۹$ به دست آورید.

حل :

$$f'(۹)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۹+h)-f(۹)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\sqrt{۹+h}-۳}{h}\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\lim_{h\to ۰}\frac{\sqrt{۹+h}-۳}{h}\times\frac{\sqrt{۹+h}+۳}{\sqrt{۹+h}+۳}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{h}{h}\times\frac{۱}{\sqrt{۹+h}+۳}=\frac{۱}{\sqrt{۹}+۳}=\frac{۱}{۶}$$

نتیجه : شیب خط مماس بر منحنی تابع $y=f(x)$ در نقطه ی $A(a,f(a))$ واقع بر منحنی تابع f برابر $f'(a)$ (در صورت وجود) است.

توجه : برای محاسبه ی مشتق تابع در نقطه ای مانند a باید $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ را در صورت وجود حساب کنـیم.

در برخی موارد ممکن است این حد موجود نباشد ولی حد های چپ و راست آن موجود باشند.

***

مشتق های یک طرفه

اگر تابع f در نقطه‌ی a و یک همسایگی راست a تعریف شده باشد، حد یـک طرفـه‌ی $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ را در صورت وجود، **مشتق راست** تابع f در نقطه ی a می نامند و آن را با نماد $f'_+(a)$ نمایش می دهند.

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$ مشتق راست

اگر تابع f در نقطه‌ی a و یک همسایگی چپ a تعریف شده باشد، حـد یـک طرفـه‌ی $\lim\limits_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ را در صورت وجود، **مشتق چپ** تابع f در نقطه ی a می نامند و آن را با نماد $f'_-(a)$ نمایش می دهند.

$$f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$ مشتق راست

تمرین : مشتقات یک طرفه ی تابع های زیر را در نقطه ی $x=۱$ به دست آورید.

الف) $f(x)=۲|x-۱|+۳$ ب) $g(x)=x^۲\operatorname{sgn}(x-۱)$

تعریف : تابع f که در همسایگی (راست و چپ) نقطه ی a تعریف شده باشد، در نقطه‌ی a مشتق پذیر است ، هرگاه :

الف : در این نقطه پیوسته باشد. ب : $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ موجود و برابر[1] باشند.

قضیه : اگر تابعی در نقطه ای مشتق پذیر باشد، آنگاه در آن نقطه نیز پیوسته خواهد بود.

اثبات :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)\to\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=\lim_{x\to a}(x-a)f'(a)$$

[1]. یعنی عدد های مساوی شوند.

$$\rightarrow \lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=\underbrace{\lim_{x\to a}(x-a)f'(a)}_{0}\rightarrow \lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=0$$

$$\rightarrow \lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}f(a)=0\rightarrow \lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

و این به معنی آن است که تابع در نقطه ی $x=a$ پیوسته است.

توجه : عکس قضیه ی فوق الزاماً برقرار نیست. (در واقع پیوستگی تابع f در نقطه ی a شرط لازم برای مشتق پذیری تابع f در نقطه ی a است، نه شرط کافی)

نتیجه : اگر تابعی در یک نقطه پیوسته نباشد، در آن نقطه مشتق پذیر نیست.

تمرین : مشتق پذیری تابع زیر را در نقطه ی $x=0$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\geq 0 \\ 1+x\sin x & x<0 \end{cases}$$

حل : ابتدا پیوستگی تابع را در نقطه ی داده شده بررسی می کنیم.

مقدار $f(0)=(0)^2+1=1$

حد راست $\lim_{x\to 0^+}f(x)=(0)^2+1=1$

حد چپ $\lim_{x\to 0^-}f(x)=1+(0)\sin(0)=1$

تابع در نقطه ی $x=0$ پیوسته است.

حال مشتقات یک طرفه را در این نقطه را بررسی می کنیم.

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(x^2+1)-1}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0^+}x=0$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(1+x\sin x)-1}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x\sin x}{x}=\lim_{x\to 0^-}\sin x=0$$

$$\Rightarrow f'_+(0)=f'_-(0)$$

تابع در نقطه ی $x=0$ مشتق پذیر است.

تمرین : مشتق پذیری تابع زیر را در نقطه ی $x=۰$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۱ & x\geq ۰ \\ ۱+x\sin x & x<۰ \end{cases}$$

حل **:** ابتدا پیوستگی تابع را در نقطه ی داده شده بررسی می کنیم.

مقدار $f(۰)=(۰)^{۲}+۱=۱$

حد راست $\lim\limits_{x\to ۰^{+}} f(x)=(۰)^{۲}+۱=۱$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۰^{-}} f(x)=۱+(۰)\sin(۰)=۱$

تابع در نقطه ی $x=۰$ پیوسته است.

حال مشتقات یک طرفه را در این نقطه را بررسی می کنیم.

$$f'_{+}(۰)=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{(x^{۲}+۱)-۱}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{x^{۲}}{x}=\lim_{x\to ۰^{+}}x=۰$$

$$f'_{-}(۰)=\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{(۱+x\sin x)-۱}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{x\sin x}{x}=\lim_{x\to ۰^{-}}\sin x=۰$$

$$\Rightarrow f'_{+}(۰)=f'_{-}(۰)$$

تابع در نقطه ی $x=۰$ مشتق پذیر است.

تمرین: مشتق پذیری تابع $f(x)=|x-۱|$ را در نقطه ی $x=۱$ بررسی کنید.

حل: ابتدا تابع را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$f(x)=\begin{cases} x-۱ & x\geq ۱ \\ -(x-۱) & x<۱ \end{cases}$$

حال پیوستگی تابع را در نقطه ی داده شده بررسی می کنیم.

مقدار $f(۱)=۱-۱=۰$

حد راست $\lim\limits_{x\to ۱^{+}} f(x)=۱-۱=۰$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = -(۱-۱) = ۰$

تابع در نقطه ی $x = ۱$ پیوسته است.

حال مشتقات یک طرفه را در این نقطه را بررسی می کنیم.

مشتق راست $f'_+(۱) = \lim\limits_{x\to ۱^+} \dfrac{f(x)-f(۱)}{x-۱} = \lim\limits_{x\to ۱^+} \dfrac{(x-۱)-۰}{x-۱} = ۱$

مشتق چپ $f'_-(۱) = \lim\limits_{x\to ۱^-} \dfrac{f(x)-f(۱)}{x-۱} = \lim\limits_{x\to ۱^-} \dfrac{-(x-۱)-۰}{x-۱} = -۱$

$\Rightarrow f'_+(۱) \neq f'_-(۱)$

تابع در نقطه ی $x = ۱$ مشتق پذیر نیست.

تمرین : مشتق پذیری تابع $f(x) = |\sin x|$ را در نقطه ی $x = ۰$ بررسی کنید.

حل : ابتدا تابع را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & ۰ \leq x < \dfrac{\pi}{۲} \\ -\sin x & -\dfrac{\pi}{۲} < x < ۰ \end{cases}$$

حال پیوستگی تابع را در نقطه ی داده شده بررسی می کنیم.

مقدار $f(۰) = \sin(۰) = ۰$

حد راست $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۰^+} \sin x = ۰$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۰^-} -\sin x = ۰$

تابع در نقطه ی $x = ۰$ پیوسته است.

حال مشتقات یک طرفه را در این نقطه را بررسی می کنیم.

مشتق راست $f'_+(۰) = \lim\limits_{x\to ۰^+} \dfrac{f(x)-f(۰)}{x-۰} = \lim\limits_{x\to ۰^+} \dfrac{\sin x - ۰}{x} = \lim\limits_{x\to ۰^+} \dfrac{\sin x}{x} = ۱$

مشتق چپ $f'_-(۰) = \lim\limits_{x\to ۰^-} \dfrac{f(x)-f(۰)}{x-۰} = \lim\limits_{x\to ۰^-} \dfrac{-\sin x - ۰}{x} = \lim\limits_{x\to ۰^-} \dfrac{-\sin x}{x} = -۱$

$\Rightarrow f'_{+}(\cdot) \neq f'_{-}(\cdot)$

تابع در نقطه ی $x = \cdot$ مشتق پذیر نیست.

***

تابع مشتق

می دانیم که مشتق تابع f در نقطه ای ثابت مانند a (در صورت وجود) از رابطه ی زیر به دست می آید.

$$f'(a) = \lim_{h \to \cdot} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

اگر متغیر x را جایگزین a کنیم، داریم :

$$f'(x) = \lim_{h \to \cdot} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

که بدین ترتیب می توانیم f' را تابع جدیدی در نظر بگیریم که به ازاء هر x ی که این حد وجود داشته باشد، x را به $f'(x)$ نظیر می کند. تابع f' را تابع مشتق f (یا به اختصار مشتق f) می نامیم و آن را با یکی از نماد های $f'(x)$ یا $\frac{\partial f}{\partial x}$ نمایش می دهند.

دامنه ی تابع f' زیر مجموعه ای از دامنه ی f می باشد که در تمام نقاط آن f مشتق پذیر می باشد.یعنی :

$$D_{f'} = D_f - \{x \mid \text{تابع } f \text{ در این مشتق پذیر نباشد.}\}$$

تمرین : مشتق تابع های زیر را به کمک تعریف مشتق به دست آورید.

الف) $f(x) = ۴x^۲ - ۵x$ ب) $g(x) = \sin x + \cos x$

تمرین : مشتق پذیری تابع زیر را در همه ی نقاط دامنه اش را بررسی و سپس دامنه ی تابع مشتق را بنویسید.

$$f(x) = \begin{cases} ۲x^۲ & x \leq ۱ \\ -x^۲ + ۳ & x > ۱ \end{cases}$$

حل : کافی است مشتق پذیری را فقط در نقطه ی $x = ۱$ را بررسی کنیم.

ابتدا پیوستگی تابع را در نقطه ی داده شده بررسی می کنیم.

مقدار $f(۱) = ۲(۱)^۲ = ۲$

حد راست $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = -(۱)^۲ + ۳ = ۲$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = ۲(۱)^۲ = ۲$

تابع در نقطه ی $x=۱$ پیوسته است.

حال مشتقات یک طرفه را در این نقطه را بررسی می کنیم.

مشتق راست $f'_+(۱) = \lim\limits_{x\to ۱^+} \dfrac{f(x)-f(۱)}{x-۱} = \lim\limits_{x\to ۱^+} \dfrac{(-x^۲+۳)-۲}{x-۱}$

$$= \lim_{x\to ۱^+} \frac{-x^۲+۱}{x-۱} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{-(x^۲-۱)}{x-۱} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{-(x-۱)(x+۱)}{x-۱} = \lim_{x\to ۱^+} -(x+۱) = -۲$$

مشتق چپ $f'_-(۱) = \lim\limits_{x\to ۱^-} \dfrac{f(x)-f(۱)}{x-۱} = \lim\limits_{x\to ۱^-} \dfrac{۲x^۲-۲}{x-۱}$

$$= \lim_{x\to ۱^-} \frac{۲(x^۲-۱)}{x-۱} = \lim_{x\to ۱^-} \frac{۲(x-۱)(x+۱)}{x-۱} = \lim_{x\to ۱^-} ۲(x+۱) = ۴$$

$$\Rightarrow f'_+(۱) \neq f'_-(۱)$$

تابع در نقطه ی $x=۱$ مشتق پذیر نیست.

پس تابع مشتق به شکل زیر است.

$$f'(x) = \begin{cases} ۴x & x<۱ \\ -۲x & x>۱ \end{cases}$$

$$D_{f'} = D_f - \{۱\} = R - \{۱\}$$

تمرین: دامنه ی مشتق تابع $f(x) = |x^۲-۱|$ را مشخص کنید.

حل: ابتدا تابع را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} x^۲-۱ & x\geq ۱ \\ -(x^۲-۱) & -۱<x<۱ \\ x^۲-۱ & x\leq -۱ \end{cases}$$

حال پیوستگی تابع را در نقاط داده شده بررسی می کنیم.

✓ بررسی پیوستگی در نقطه $x=۱$

مقدار $f(۱)=۱^۲-۱=۰$

حد راست $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=۱^۲-۱=۰$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=-(۱^۲-۱)=۰$

تابع در نقطه ی $x=۱$ پیوسته است.

حال مشتقات یکطرفه را در این نقطه را بررسی می کنیم.

$$f'_+(۱)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(x^۲-۱)-۰}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}(x+۱)=۲$$

$$f'_-(۱)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{-(x^۲-۱)-۰}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{-(x-۱)(x+۱)}{x-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱^-}-(x+۱)=-۲$$

تابع در نقطه ی $x=۱$ مشتق پذیر نیست.

✓ بررسی پیوستگی در نقطه $x=-۱$

مقدار $f(-۱)=(-۱)^۲-۱=۰$

حد راست $\lim\limits_{x\to (-۱)^+} f(x)=-[(-۱)^۲-۱]=۰$

حد چپ $\lim\limits_{x\to (-۱)^-} f(x)=(-۱)^۲-۱=۰$

تابع در نقطه ی $x=-۱$ پیوسته است.

حال مشتقات یکطرفه را در این نقطه را بررسی می کنیم.

$$f'_{+}(-۱)=\lim_{x\to(-۱)^{+}}\frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)^{+}}\frac{-(x^{۲}-۱)-۰}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)^{+}}\frac{-(x-۱)(x+۱)}{x+۱}=۲$$

$$f'_{-}(-۱)=\lim_{x\to(-۱)^{-}}\frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)^{-}}\frac{(x^{۲}-۱)-۰}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)^{-}}\frac{(x-۱)(x+۱)}{x+۱}=-۲$$

تابع در نقطه ی $x=-۱$ مشتق پذیر نیست.

پس تابع f در نقطه ها ی $x=۱$ و $x=-۱$ مشتق پذیر نیست. لذا

$$D_{f'}=D_f-\{-۱,۱\}\xrightarrow{D_f=R}D_{f'}=R-\{-۱,۱\}$$

$$f'(x)=\begin{cases}۲x & x>۱\\ -۲x & -۱<x<۱\\ ۲x & x<-۱\end{cases}$$

***

رابطه ی بین پیوستگی و مشتق پذیری

همانطور که قبلاً عنوان شد، اگر تابع f در a مشتق پذیر باشد،آنگاه در این نقطه پیوسته است. همچنین گفته شد که عکس این گزاره برقرار نمی باشد. و ممکن است تابعی در نقطه ی a پیوسته باشد،اما در این نقطه مشتق پذیر نباشد. مثلاً تابع $f(x)=|x|$ در نقطه ی $x=۰$ پیوسته است ولی چون $f'_{+}(۰)\neq f'_{-}(۰)$ در این نقطه مشتق پذیر نیست.

توجه داشته باشید که پیوستگی تابع f در نقطه ی a ، شرط لازم برای مشتق پذیری تابع f در نقطه ی a است، نه شرط کافی و لذا اگر تابعی در نقطه ای پیوسته نباشد، آنگاه در این نقطه مشتق پذیر نیست.

تمرین : تابع زیر در نقطه ی $x=۲$ مشتق پذیر است. مقادیر b و a را محاسبه کنید.

$$f(x)=\begin{cases}ax-b & x<۲\\ x^{۲}-۲ & x\geq ۲\end{cases}$$

حل : چون تابع f در نقطه ی $x=۲$ مشتق پذیر است. لذا در این نقطه پیوسته بوده و $f'_{+}(۲)=f'_{-}(۲)$ پس :

$$\lim_{x\to ۲^{+}}f(x)=\lim_{x\to ۲^{-}}f(x)=f(۲)\to ۲a-b=۲\quad(*)$$

$$f'(x)=\begin{cases}a & x<۲\\ ۲x & x\geq ۲\end{cases}$$

$$f'_{+}(۲) = f'_{-}(۲) \to ۲(۲) = a \to a = ۴$$

$$(*) \quad ۲a - b = ۲ \xrightarrow{a=۴} ۸ - b = ۲ \to b = ۶$$

تمرین : مقدار b و a را طوری پیدا کنید که تابع زیر در نقطه ی $x = ۱$ مشتق پذیر باشد.

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ & x \le ۱ \\ ۲ax + b & x > ۱ \end{cases}$$

حل : ابتدا پیوستگی و سپس مشتقات یک طرفه را بررسی می کنیم.

بررسی پیوستگی

حد راست $\lim_{x \to ۱^+} f(x) = ۲a(۱) + b = ۲a + b$

حد چپ $\lim_{x \to ۱^-} f(x) = (۱)^۲ = ۱$

مقدار $f(۱) = ۱$

$$\Rightarrow ۲a + b = ۱$$

بررسی مشتقات یک طرفه

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ & x \le ۱ \\ ۲ax + b & x > ۱ \end{cases} \to f'(x) = \begin{cases} ۲x & x \le ۱ \\ ۲a & x > ۱ \end{cases}$$

مشتق راست $f'_{+}(۱) = ۲a$

مشتق چپ $f'_{-}(۱) = ۲(۱) = ۲$

$$\Rightarrow ۲a = ۲ \to a = ۱$$

حال اگر مقدار a را در تساوی اول قرار دهیم. خواهیم داشت:

$$۲a + b = ۱ \xrightarrow{a=۱} b = -۱$$

***

قرار داد :

۱: اگر تابع f فقط در همسایگی راست نقطه ی a تعریف شده باشد. در این صورت گویند تابع f در نقطه ی a مشتق پذیر است، هرگاه :

الف : در نقطه ی a پیوسته باشد. ب : $f'_+(a)$ موجود باشد.

در این حالت قرار می دهیم. $f'(a)=f'_+(a)$

۲ : اگر تابع f فقط در همسایگی چپ نقطه ی a تعریف شده باشد. در این صورت گویند تابع f در نقطه ی a مشتق پذیر است، هرگاه :

الف : در نقطه ی a پیوسته باشد. ب : $f'_-(a)$ موجود باشد.

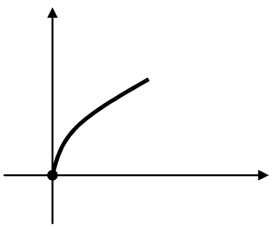
در این حالت قرار می دهیم. $f'(a)=f'_-(a)$

۳ : اگر تابع f در همسایگی نقطه ی a تعریف شده باشد. در این صورت گویند تابع f در نقطه ی a مشتق پذیر است، هرگاه :

الف : در نقطه ی a پیوسته باشد. ب : $f'_+(a)=f'_-(a)$ موجود باشد.

در این حالت قرار می دهیم. $f'(a)=f'_+(a)=f'_-(a)$

۶ : تابع در همسایگی (راست یا چپ) این نقطه تعریف نشده باشد.



مثال۱ : دامنه ی تابع $f(x)=\sqrt{x}$ مجموعه ی $[\cdot,+\infty)$ می باشد. بنابراین تابع در همسایگی راست نقطه ی $x=\cdot$ تعریف شده است.حال چون $\lim\limits_{x\to \cdot^+} f(x)=f(\cdot)=\cdot$ لذا در نقطه ی $x=\cdot$ پیوسته است. اما مشتق راست تابع در این نقطه موجود نمی باشد.

$$f'_+(\cdot)=\lim_{x\to\cdot^+}\frac{f(x)-f(\cdot)}{x-\cdot}=\lim_{x\to\cdot^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to\cdot^+}\frac{\text{۱}}{\sqrt{x}}=+\infty$$

بنابراین تابع در نقطه $x=\cdot$ مشتق پذیر نیست.

مثال۲ : دامنه ی تابع $f(x)=x\sqrt{x}$ مجموعه ی $[\cdot,+\infty)$ می باشد. بنابراین تابع در همسایگی راست نقطه ی $x=\cdot$ تعریف شده است.حال چون $\lim\limits_{x\to \cdot^+} f(x)=f(\cdot)=\cdot$ لذا در نقطه ی $x=\cdot$ پیوسته است و مشتق راست تابع در این نقطه موجود می باشد.

$$f'_+(\cdot)=\lim_{x\to\cdot^+}\frac{f(x)-f(\cdot)}{x-\cdot}=\lim_{x\to\cdot^+}\frac{x\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to\cdot^+}\sqrt{x}=\cdot$$

بنابراین تابع در نقطه $x=\cdot$ مشتق پذیر است و $f'(\cdot)=f'_+(\cdot)=\cdot$.

مثال ۳ : دامنه ی تابع $f(x)=\sqrt{-x}$ مجموعه ی $(-\infty,0]$ می باشد. بنابراین تابع در همسایگی چپ نقطه ی $x=0$ تعریف شده است.حال چون $\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=0$ لذا در نقطه ی $x=0$ پیوسته است لذا مشتق چپ تابع در این نقطه موجود نمی باشد.

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{-x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt{-x}}=+\infty$$

بنابراین تابع در نقطه ی $x=0$ مشتق پذیر نیست.

مثال ۴ : دامنه ی تابع $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ مجموعه ی $[-2,2]$ می باشد. بنابراین تابع در همسایگی نقطه ی $x=0$ تعریف شده است.حال چون $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=2$ لذا در نقطه ی $x=0$ پیوسته است. همچنین

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{x}\times\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{\sqrt{4-x^2}-2}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{4-x^2-4}{x}\times\frac{1}{\sqrt{4-x^2}-2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{4-x^2}-2}=0$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{x}\times\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{\sqrt{4-x^2}-2}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{4-x^2-4}{x}\times\frac{1}{\sqrt{4-x^2}-2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{\sqrt{4-x^2}-2}=0$$

پس $f'_+(0)=f'_-(0)=0$. بنابراین تابع در نقطه $x=0$ مشتق پذیر است و $f'(0)=0$

مثال ۵ : دامنه ی تابع $f(x)=|x|$ مجموعه ی R می باشد. بنابراین تابع در همسایگی نقطه ی $x=0$ تعریف شده است.حال چون $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=0$ لذا در نقطه ی $x=0$ پیوسته است. همچنین

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

$$f'_-(\cdot)=\lim_{x\to\cdot^-}\frac{f(x)-f(\cdot)}{x-\cdot}=\lim_{x\to\cdot^-}\frac{|x|}{x}\overset{\frac{\cdot}{\cdot}}{=}\lim_{x\to\cdot^-}\frac{-x}{x}=-۱$$

پس $f'_+(\cdot)\neq f'_-(\cdot)$. بنابراین تابع در نقطه $x=\cdot$ مشتق پذیر نیست.

مثال ۶ : دامنه ی تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x-۱}$ مجموعه ی اعداد حقیقی می باشد. بنابراین تابع در همسایگی نقطه ی $x=۱$ تعریف شده است. حال چون $\lim\limits_{x\to ۱^+}f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}f(x)=f(۱)=\cdot$ لذا در نقطه ی $x=۱$ پیوسته است.

همچنین

$$f'_+(۱)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{f(x)-f(\cdot)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{\sqrt[۳]{x-۱}}{x-۱}\overset{\frac{\cdot}{\cdot}}{=}\lim_{x\to ۱^+}\frac{۱}{\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}}=+\infty$$

$$f'_-(۱)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{f(x)-f(\cdot)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{\sqrt[۳]{x-۱}}{x-۱}\overset{\frac{\cdot}{\cdot}}{=}\lim_{x\to ۱^-}\frac{۱}{\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}}=+\infty$$

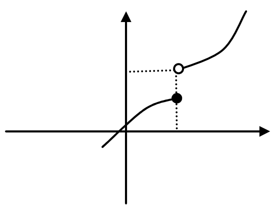
پس $f'_+(۱)$ و $f'_-(۱)$ موجود نمی باشند. بنابراین تابع در نقطه ی $x=۱$ مشتق پذیر نیست.

***

بررسی نقاط مشتق ناپذیر تابع

بنابر تعریف مشتق پذیری تابع در یک نقطه می توان گفت که تابع در نقاط زیر همواره مشتق ناپذیر است.

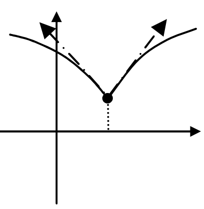
۱ : اگر تابع f در نقطه ی $x=a$ ناپیوسته باشد، آنگاه در این نقطه مشتق ناپذیر است.



در این مورد نقطه ی $x=a$ را نقطه ی ناپیوستگی می گویند.

مانند: تابع $f(x)=[x]$ که در نقطه ی $x=\cdot$ پیوسته نیست.

۲ : تابع f در نقطه ی $x=a$ پیوسته است ولی مشتق راست و چپ تابع در این نقطه موجود و برابر نباشند. (عدد های غیر مساوی)



در این مورد نقطه ی $x=a$ را نقطه ی زاویه دار یا گوشه می گویند.

مانند: تابع $f(x)=|x|$ که در نقطه‌ی $x=۰$ پیوسته است ولی مشتق چپ آن در این نقطه -۱ و مشتق راست آن ۱است.

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & x\geq ۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}$$

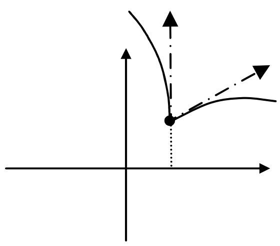
مقدار $f(۰)=۰$

حد راست $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^+} x=۰$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^-} (-x)=۰$

مشتق راست $f'_+(۰)=\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{x}{x}=۱$

مشتق چپ $f'_-(۰)=\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{-x}{x}=-۱$



۳ : تابع f در نقطه ی $x=a$ پیوسته است ولی مشتق راست یا چپ تابع در این نقطه یکی عدد و دیگری ∞ شود.

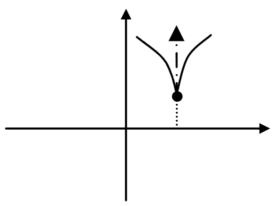
در این مورد نقطه ی $x=a$ را نیز نقطه ی زاویه دار یا گوشه می گویند.

مانند: تابع $f(x)=\begin{cases} (x-۱)^۲ & x\leq ۱ \\ \sqrt{x-۱} & x>۱ \end{cases}$ که در نقطه ی $x=۱$ پیوسته است ولی

$$f'_+(۱)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{\sqrt{x-۱}}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x-۱}{(x-۱)\sqrt{x-۱}}=+\infty$$

$$f'_-(۱)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{(x-۱)^۲}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}(x-۱)=۰$$

۴ : تابع f در نقطه ی $x=a$ پیوسته است ولی مشتق راست یا چپ تابع یکی $+\infty$ و دیگری $-\infty$ شود.

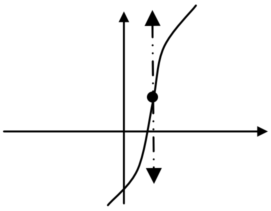


در این مورد نقطه ی $x=a$ را نقطه ی بازگشتی می گویند.

مانند: تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x^۲}$ در نقطه ی $x=۰$ پیوسته ولی مشتق پذیر نیست و این نقطه بازگشتی است. زیرا

$$f'_{+}(\cdot) = \lim_{x \to \cdot^{+}} \frac{f(x) - f(\cdot)}{x - \cdot} = \lim_{x \to \cdot^{+}} \frac{\sqrt[۳]{x^{۲}}}{x} = \lim_{x \to \cdot^{+}} \frac{۱}{\sqrt[۳]{x}} = +\infty$$

$$f'_{-}(\cdot) = \lim_{x \to \cdot^{-}} \frac{f(x) - f(\cdot)}{x - \cdot} = \lim_{x \to \cdot^{-}} \frac{\sqrt[۳]{x^{۲}}}{x} = \lim_{x \to \cdot^{-}} \frac{۱}{\sqrt[۳]{x}} = -\infty$$



۵ : تابع f در نقطه ی $x = a$ پیوسته است ولی مشتق راست یا چپ تابع هر دو $+\infty$ یا هر دو $-\infty$ شوند.

در این مورد نقطه ی $x = a$ را نقطه ی عطف قائم می گویند.

مانند: نمودار تابع $f(x) = \sqrt[۵]{x^{۳}}$ که در نقطه ی $x = \cdot$ پیوسته است ولی

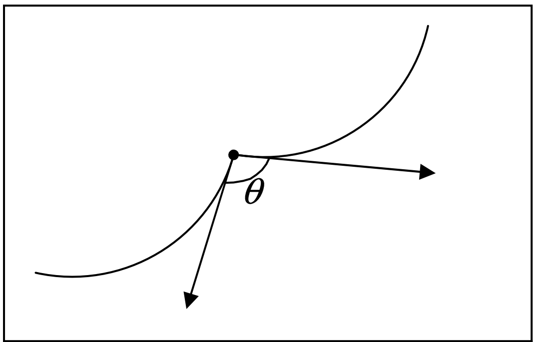
$$f'_{+}(\cdot) = \lim_{x \to \cdot^{+}} \frac{f(x) - f(\cdot)}{x - \cdot} = \lim_{x \to \cdot^{+}} \frac{\sqrt[۵]{x^{۳}}}{x} = \lim_{x \to \cdot^{+}} \frac{۱}{\sqrt[۵]{x^{۲}}} = +\infty$$

$$f'_{-}(\cdot) = \lim_{x \to \cdot^{-}} \frac{f(x) - f(\cdot)}{x - \cdot} = \lim_{x \to \cdot^{-}} \frac{\sqrt[۵]{x^{۳}}}{x} = \lim_{x \to \cdot^{-}} \frac{۱}{\sqrt[۵]{x^{۲}}} = +\infty$$

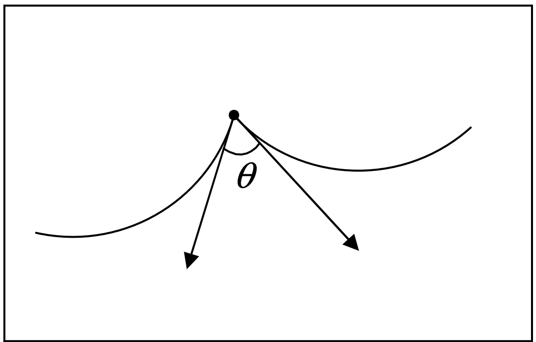
***

یادداشت : اگر نقطه ی A از منحنی تابع، از مشتق های چپ و راست، حداقل یکی عدد ولی نـابرابر باشـند، آنگـاه A را یک نقطه ی زاویه دار یا یک گوشه برای تابع f می نامند. در واقع در این نقطه از منحنی، خط مماس قائم نداریم، بلکـه دو خط مماس (نیم مماس) داریم. اگر $m_۱$ و $m_۲$ شیب های این دو خط مماس باشند.آنگـاه زاویـه ی بـین دو ممـاس چـپ و راست به شکل زیر است.البته اندازه ی θ بستگی به جهت نیم مماس ها دارد که ممکن است حاده یا منفرجه باشد.

$$\tan\theta = \frac{m_۱ - m_۲}{۱ + m_۱ m_۲}$$



زاویه ی بین دو نیم مماس منفرجه است.



زاویه ی بین دو نیم مماس حاده است.

تمرین : نشان دهید که $x=0$ یک نقطه ی گوشه برای تابع زیر می باشد. سپس زاویه ی بین دو مماس چپ و راست را در این نقطه تعیین کنید.

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & x\geq 0\\ x^2 & x<0\end{cases}$$

حل :

$$f'(x)=\begin{cases}\cos x & x>0\\ 2x & x<0\end{cases}$$

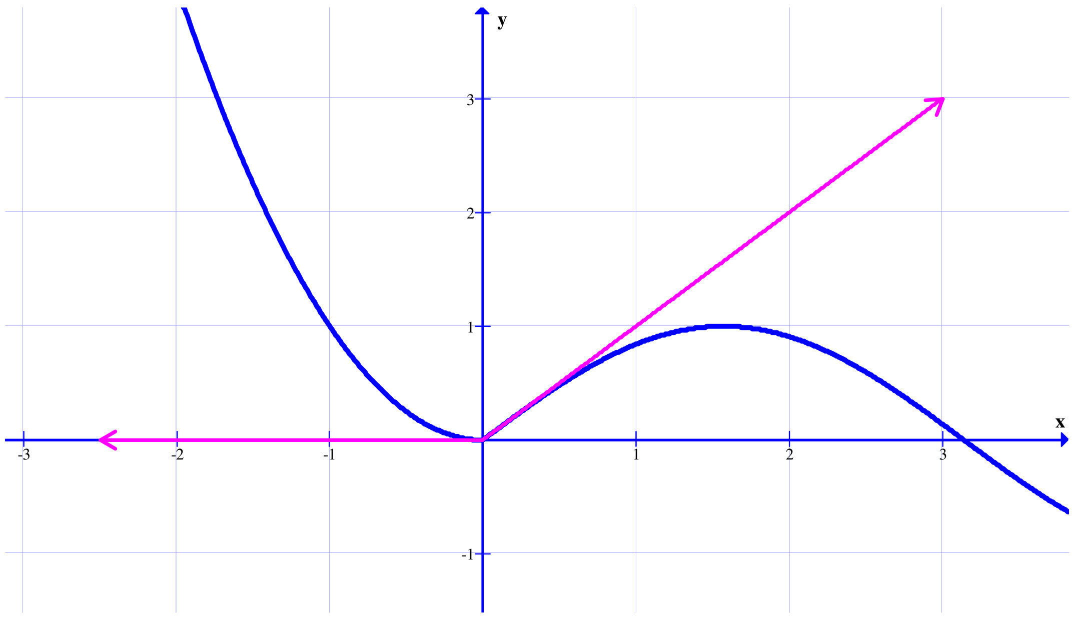
$f'_+(x)=\cos(0)=1=m_1$ مشتق راست

$f'_-(x)=2(0)=0=m_2$ مشتق چپ

چون مشتق چپ و راست در $x=0$ هر دو عدد و نابرابر شده اند، پس تابع در $x=0$ یک نقطه ی گوشه دارد. زاویه ی بین این دو نیم مماس را می توان به شکل زیر تعیین کرد.

$$\tan\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\frac{1-0}{1+(1)(0)}=1\rightarrow\theta=45^\circ$$

با توجه به جهت نیم مماس ها می توان $\theta=135^\circ$ را در نظر گرفت. به شکل زیر توجه نمایید.



***

قضایای مشتق تابع در یک نقطه

استفاده از تعریف مشتق برای محاسبه ی مشتق توابع در اکثر مواقع وقت گیر و مشکل است، لذا جهت رفع این مشکل قضایای مشتق که همگی به کمک تعریف قابل اثبات هستند، به صورت زیر مطرح می شوند.

قضیه : اگر $f(x)=k$ یک تابع ثابت باشد. ثابت کنید که $f'(a)=۰$

اثبات :

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{k-k}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{۰}{x-a}=۰$$

قضیه: اگر توابع g و f در نقطه ی a مشتق پذیر باشند. در این صورت:

(۱) تابع kf نیز در a مشتق پذیر است و $(kf)'(a)=kf'(a)$

(۲) تابع $f+g$ نیز در a مشتق پذیر است و $(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$

(۳) تابع $f-g$ نیز در a مشتق پذیر است و $(f-g)'(a)=f'(a)-g'(a)$

(۴) تابع fg نیز در a مشتق پذیر است و $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$

(۵) تابع $\frac{۱}{f}$ نیز (به شرط $f(a)\neq ۰$) در a مشتق پذیر است و $(\frac{۱}{f})'(a)=-\frac{f'(a)}{f^{۲}(a)}$

(۶) تابع $\frac{f}{g}$ نیز (به شرط $g(a)\neq ۰$) در a مشتق پذیر است و

$$(\frac{f}{g})'(a)=\frac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{g^{۲}(a)}$$

اثبات:

۱)

$$(kf)'(a)=\lim_{x\to a}\frac{kf(x)-kf(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{k(f(x)-f(a))}{x-a}=k\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=kf'(a)$$

۲)

$$(f+g)'(a)=\lim_{x\to a}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)+g(x)-f(a)-g(a)}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

$$= f'(a) + g'(a)$$

۳)

$$(f-g)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{(f-g)(x)-(f-g)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-g(x)-f(a)+g(a)}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

$$= f'(a) - g'(a)$$

۴)

$$(f.g)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{(f.g)(x)-(f.g)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x).g(x)-f(a).g(a)}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x).g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a).g(a)}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{(f(x)-f(a))g(x)+f(a)(g(x)-g(a))}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.g(x) + f(a).\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}. \lim_{x\to a} g(x) + \lim_{x\to a} f(a). \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = f'(a).g(a) + f(a).g'(a)$$

۵)

$$\left(\frac{۱}{f}\right)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{\left(\frac{۱}{f}\right)(x) - \left(\frac{۱}{f}\right)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{۱}{f(x)} - \frac{۱}{f(a)}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(a)-f(x)}{f(x)f(a)}}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} \left(\frac{۱}{f(x)f(a)} \times \frac{f(a)-f(x)}{x-a}\right) = \lim_{x\to a} \frac{۱}{f(x)f(a)} \times \lim_{x\to a} \frac{f(a)-f(x)}{x-a}$$

$$= -\frac{۱}{f(a)f(a)} \times \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\frac{۱}{f^{۲}(a)} \times f'(a) = -\frac{f'(a)}{f^{۲}(a)}$$

۶)

$$(\frac{f}{g})'(a)=[f(a)\times(\frac{1}{g})(a)]'$$
$$=f'(a)\times(\frac{1}{g})(a)+f(a)\times(\frac{1}{g})'(a)=f'(a)\times\frac{1}{g(a)}+f(a)\times\frac{-g'(a)}{g^{2}(a)}$$
$$=\frac{f'(a)}{g(a)}-\frac{g'(a)f(a)}{g^{2}(a)}=\frac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{g^{2}(a)}$$

قضیه : فرض کنید تابع g در نقطه ی a و تابع f در $g(a)$ مشتق پذیر باشند، در این صورت تابع fog در a مشتق پذیر است و $(fog)'(a)=g'(a)f'(g(a))$

اثبات : قرار می دهیم $u=g(x)$ و $b=g(a)$ آنگاه

$$\lim_{x\to a}u=\lim_{x\to a}g(x)=g(a)=b$$

از طرفی $x\to a$ نتیجه می دهد $u\to b$. بنابراین :

$$(fog)'(a)=\lim_{x\to a}\frac{(fog)(x)-(fog)(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(f(g(x))-(f(g(a))}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(u)-f(b)}{x-a}$$
$$=\lim_{u\to b}\frac{f(u)-f(b)}{u-b}\times\lim_{x\to a}\frac{u-b}{x-a}=\lim_{u\to b}\frac{f(u)-f(b)}{u-b}\times\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$
$$=f'(b)g'(a)=f'(g(a))g'(a)$$

تمرین : اگر $f(x)=x^{2}$. مشتق تابع $y=f(\sin x)$ را در نقطه ی $x=\frac{\pi}{4}$ را به دست آورید.

***

فرمول های محاسبه ی مشتق توابع (یادآوری و تکمیل)

با استفاده تعریف تابع مشتق ، می توانیم فرمول هایی برای مشتق توابع به دست آوریم که به کمک آنها به سادگی می توان مشتق توابع در هر نقطه ای که تابع در آن مشتق پذیر است را محاسبه نمود. اثبات برخی از این فرمول ها را در درس حسابان داشته اید، در این قسمت اثبات فرمول های جدید را در ادامه ملاحظه خواهید کرد.

۱) $f(x)=a\to f'(x)=0$

۲) $f(x)=ax\to f'(x)=a$

۳) $f(x)=x^{n}\to f'(x)=nx^{n-1}$

۴) $f(x)=\frac{۱}{x} \rightarrow f'(x)=\frac{-۱}{x^{۲}}$

۵) $f(x)=\sqrt{x} \rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$

۶) $f(x)=\sqrt[m]{x^n} \rightarrow f'(x)=\frac{n}{m\sqrt[m]{x^{m-n}}}$

۷) $f(x)=\sin x \rightarrow f'(x)=\cos x$

۸) $f(x)=\cos x \rightarrow f'(x)=-\sin x$

۹) $f(x)=\tan x \rightarrow f'(x)=۱+\tan^{۲} x$

۱۰) $f(x)=\cot x \rightarrow f'(x)=-(۱+\cot^{۲} x)$

اثبات ۷ :

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{۲\sin\frac{(x+h)-(x)}{۲}\cos\frac{(x+h)+(x)}{۲}}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\sin\frac{h}{۲}\cos\frac{۲x+h}{۲}}{\frac{h}{۲}}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{\sin\frac{h}{۲}}{\frac{h}{۲}}\times\cos\frac{۲x+h}{۲}=\lim_{h\to ۰}\cos\frac{۲x+h}{۲}=\cos x$$

اثبات ۸ :

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{-۲\sin\frac{(x+h)+(x)}{۲}\sin\frac{(x+h)-(x)}{۲}}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{-\sin\frac{h}{۲}\sin\frac{۲x+h}{۲}}{-\frac{h}{۲}}$$

$$= \lim_{h\to ۰} \left(-\frac{\sin \frac{h}{۲}}{\frac{h}{۲}}\right) \times \sin\frac{۲x+h}{۲} = \lim_{h\to ۰} \left(-\sin\frac{۲x+h}{۲}\right) = -\sin x$$

اثبات ۹ :

$$f'(x) = \lim_{h\to ۰} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to ۰} \frac{\tan(x+h)-\tan(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to ۰} \frac{\frac{\sin(x+h-x)}{\cos(x+h)\cos x}}{h} = \lim_{h\to ۰} \frac{\frac{\sin h}{\cos(x+h)\cos x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to ۰} \frac{\sin h}{h} \times \frac{۱}{\cos(x+h)\cos x} = \frac{۱}{(\cos x)(\cos x)} = \frac{۱}{\cos^۲ x} = ۱ + \tan^۲ x$$

اثبات ۱۰ :

$$f'(x) = \lim_{h\to ۰} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to ۰} \frac{\cot(x+h)-\cot(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to ۰} \frac{-\frac{\sin(x+h-x)}{\sin(x+h)\sin x}}{h} = \lim_{h\to ۰} \frac{-\frac{\sin h}{\sin(x+h)\sin x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to ۰} \left(-\frac{\sin h}{h}\right) \times \frac{۱}{\sin(x+h)\sin x} = -\frac{۱}{(\sin x)(\sin x)} = -\frac{۱}{\sin^۲ x} = -(۱ + \cot^۲ x)$$

توجه : ضریب تابع در عمل مشتق گیری شرکت نمی کند. یعنی $y = af(x) \to y' = af'(x)$

اثبات :

$$y' = \lim_{h\to ۰} \frac{af(x+h)-af(x)}{h} = \lim_{h\to ۰} \frac{a(f(x+h)-f(x))}{h} = a \lim_{h\to ۰} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = af'(x)$$

تمرین : مشتق تابع $f(x) = ۳\sin x$ را در نقطه ی $x = \pi$ به دست آورید.

***

قضایای تابع مشتق

اگر u تابعی مشتق پذیر بر حسب x باشد.آنگاه می توان قضایای زیر را اثبات نمود.

قضیه ی ۱ : ضریب تابع در مشتق گیری شرکت نمی کند. یعنی مشتق $y=au$ می شود $y'=au'$.

اثبات :

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{au(x+h)-au(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a(u(x+h)-u(x))}{h}=a\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}=au'$$

مثال :

$$y=3\sin x\to y'=3\cos x$$

$$y=5x^3\to y'=5(3x^2)=15x^2$$

....

قضیه ی ۲ : **مشتق مجموع (یا تفاضل) دو یا چند تابع**

$$y=u+v+w+\ldots\to y'=u'+v'+w'+\ldots.$$

اثبات : اثبات برای مجموع دو تابع یعنی: $f(x)=u(x)+v(x)$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(u+v)(x+h)-(u+v)(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)+v(x+h)-u(x)-v(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}$$
$$=u'(x)+v'(x)$$

مثال:

$$y=-x^3+5x+4\to y'=-3x^2+5$$

$$y=\sin x-2\cos x\to y'=\cos x+2\sin x$$

***

قضیه ی ۳ : **مشتق حاصل ضرب دو یا چند تابع**

$$y=u.v\to y'=u'.v+v'.u$$

$$y=u.v.w\to y'=u'.v.w+v'.u.w+w'.u.v$$

اثبات :

$$f(x)=u(x).v(x)$$

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(u.v)(x+h)-(u.v)(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{u(x+h).v(x+h)-u(x).v(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{u(x+h).v(x+h)-u(x).v(x)+v(x).u(x+h)-v(x).u(x+h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{v(x).u(x+h)-u(x).v(x)+u(x+h).v(x+h)-v(x).u(x+h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{[u(x+h)-u(x)]v(x)+[v(x+h)-v(x)]u(x+h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}.v(x)+\lim_{h\to ۰}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}.u(x+h)=u'(x).v(x)+v'(x).u(x)$$

مثال:

$$y=(-x^{۳}+۵x+۱).(۴+۲x^{۳})$$

$$\to y'=(-۳x^{۲}+۵).(۴+۲x^{۳})+(۶x^{۲}).(-x^{۳}+۵x+۱)$$

مثال:

$$y=\sqrt{x}.\sin x.\cos x$$

$$\to y'=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\sin x.\cos x+\cos x.\sqrt{x}.\cos x+(-\sin x)\sqrt{x}.\sin x$$

$$=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\sin x.\cos x+\sqrt{x}.\cos^{۲}x-\sqrt{x}.\sin^{۲}x$$

توجه: اگر u تابعی بر حسب x باشد. در این صورت مشتق تابع $y=a.u^n$ را می توان به شکل زیر نوشت:

$$y'=a.n.u'.u^{n-۱}$$

اثبات :

$$y=a.u^n\to y=a\times\underbrace{u\times u\times\ldots\times u}_{n\ \text{بار}}$$

$$\to y'=\underbrace{a\times u'\times\underbrace{u\times u\times\ldots\times u}_{n-۱\ \text{بار}}+a\times u\times u'\times u\times u\times\ldots\times u+\ldots+a\times u\times u\times u\times\ldots\times u'}_{n\ \text{بار}}$$

$$\to a.n.u'.u^{n-۱}$$

مثال:

$$y = ۵(\sin x - \cos x)^{۳} \rightarrow y' = ۵(۳)(\cos x + \sin x)(\sin x - \cos x)^{۲}$$

***

قضیه ی **۴ : مشتق تابع خارج قسمت دو تابع**

$$y = \frac{۱}{v} \rightarrow y' = \frac{-v'}{v^{۲}}$$

اثبات :

$$f(x) = \frac{۱}{v(x)}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to ۰} \frac{\frac{۱}{v(x+h)} - \frac{۱}{v(x)}}{h} = \lim_{h \to ۰} \frac{\frac{v(x) - v(x+h)}{v(x+h)v(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to ۰} \frac{-\frac{v(x+h) - v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)} = \lim_{h \to ۰} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \times \lim_{h \to ۰} \frac{۱}{v(x+h)v(x)}$$

$$= -v'(x) \times \frac{۱}{v^{۲}(x)} = \frac{-v'(x)}{v^{۲}(x)}$$

مثال :

$$y = \frac{۱}{x^{۲} + ۳x} \rightarrow y' = \frac{-(۲x + ۳)}{(x^{۲} + ۳x)^{۲}}$$

$$y = \frac{۱}{\tan x} \rightarrow y' = \frac{-(۱ + \tan^{۲} x)}{\tan^{۲} x}$$

....

قضیه ی **۵ : مشتق خارج قسمت دو تابع**

$$y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u'.v - v'.u}{v^{۲}}$$

اثبات :

$$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$$

$$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}=u(x)\times\frac{۱}{v(x)}\to f'(x)=u'(x)\times\frac{۱}{v(x)}+u(x)\times\frac{-v'(x)}{v^{۲}(x)}$$
$$=\frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v^{۲}(x)}$$

مثال:

$$y=\frac{۳x^{۲}-۵x}{۱-۲x^{۳}}\to y'=\frac{(۶x-۵)(۱-۲x^{۳})-(-۶x^{۲})(۳x^{۲}-۵x)}{(۱-۲x^{۳})^{۲}}$$

....

قضیه ی ۶ **: مشتق تابع رادیکالی با فرجه ی۲**

$$y=\sqrt{u}\to y'=\frac{u'}{۲\sqrt{u}}$$

اثبات :

$$f(x)=\sqrt{u(x)}$$
$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\sqrt{u(x+h)}-\sqrt{u(x)}}{h}$$
$$=\lim_{h\to ۰}\left(\frac{\sqrt{u(x+h)}-\sqrt{u(x)}}{h}\times\frac{\sqrt{u(x+h)}+\sqrt{u(x)}}{\sqrt{u(x+h)}+\sqrt{u(x)}}\right)$$
$$=\lim_{h\to ۰}\left(\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\times\frac{۱}{\sqrt{u(x+h)}+\sqrt{u(x)}}\right)$$
$$=\lim_{h\to ۰}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\times\lim_{h\to ۰}\frac{۱}{\sqrt{u(x+h)}+\sqrt{u(x)}}=u'(x)\times\frac{۱}{۲\sqrt{u(x)}}$$

مثال:

$$y=\sqrt{۳x^{۲}-۵x}\to y'=\frac{۶x-۵}{۲\sqrt{۳x^{۲}-۵x}}$$
$$y=\sqrt{\sin x}\to y'=\frac{\cos x}{۲\sqrt{\sin x}}$$

....

قضیه ی ۷ : **مشتق تابع رادیکالی با فرجه ی بالاتر از ۲**

$$y=\sqrt[m]{x^n}\,,m>n\to y'=\frac{n}{m\sqrt[m]{x^{m-n}}}$$
$$y=\sqrt[m]{u^n}\,,m>n\to y'=\frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$$

مثال:

$$y=\sqrt[5]{(2x^3-x)^3}\to y'=\frac{3(6x^2-1)}{5\sqrt[5]{(2x^3-x)^2}}$$
$$y=\sqrt[7]{\cos x}\to y'=\frac{1(-\sin x)}{7\sqrt[7]{\cos^6 x}}$$

....

قضیه ی ۸ : **مشتق تابع تابع (تابع مرکب)**

$$y=f(u)\to y'=u'f'(u)$$

اثبات : قرار می دهیم $u=g(x)$

$$(fog)'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(fog)(x+h)-(fog)(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(f(g(x+h))-(f(g(x))}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(f(g(x+h))-(f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\times\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(g(x))\times g'(x)$$
$$=f'(u)\times u'$$

مثال :

۱) $y=f(x^2-\sin x)\to y'=(2x-\cos x)f'(x^2-\sin x)$

۲) $y=f(g(x))\to y'=g'(x).f'(g(x))$

تمرین برای حل : اگر $f(x)=x^2+5x$ باشد. مشتق $y=f(\cos x)$ را حساب کنید.

نتیجه ی ۱ : اگر u تابعی مشتق پذیر بر حسب x باشد. در این صورت

$$y=a.u^n\to y'=a.n.u'.u^{n-1}$$

اثبات: قرار می دهیم $f(x)=a.x^n$ و $g(x)=u$ در این صورت $f'(x)=a.n.x^{n-1}$ از طرفی :

$$y = f(u) \to y' = u'.f'(u) = u'.(a.n.u^{n-1}) = a.n.u'.u^{n-1}$$

مثال:

$$y = 3(x^2 - 4x + 5)^7 \to y' = 21(2x - 4)(x^2 - 4x + 5)^6$$

نتیجه ی۲ (قاعده ی زنجیری) : اگر y تابعی از u و u تابعی از x باشد، آنگاه مشتق y نسبت به x برابر است با حاصل ضرب مشتق y نسبت به u در مشتق u نسبت به x یعنی

$$y = f(u) \to y' = u'f'(u)$$

یا به نمادی دیگر

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial x}$$

مثال : اگر $y = \sin u$ و $u = x + \sqrt{x}$ باشد. مشتق y نسبت به x را به دست آورید.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial x} = (\cos u)(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}})$$

$$\to \frac{\partial y}{\partial x} = (\cos(x + \sqrt{x}))(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}})$$

تمرین برای حل :

۱ : اگر $y = u\sqrt[3]{u}$ و $u = \sqrt{x} - 1$ باشد. مشتق y نسبت به x را در نقطه ی $x = 4$ به دست آورید.

۲ : به کمک قاعده ی زنجیری مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x^4 + 1}$ را به دست آورید.

توجه : قاعده ی زنجیری برای چند تابع قابل تعمیم است. : اگر y تابعی از u و u تابعی از v و v تابعی بر حسب x باشد، آنگاه مشتق y نسبت به x به شگل زیر است.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial x}$$

تمرین برای حل : اگر $\begin{cases} y = 2u^2 - u \\ u = \sin v \\ v = \sqrt{x} \end{cases}$ مشتق تابع y نسبت به x را به دست آورید.

قضیه ی ۹ : مشتق توابع مثلثاتی

$$y=\sin x \to y'=\cos x$$
$$y=\sin u \to y'=u'.\cos u$$
$$y=a.\sin^n u \to y'=a.n.u'.\cos u.\sin^{n-1} u$$

$$y=\cos x \to y'=-\sin x$$
$$y=\cos u \to y'=-u'.\sin u$$
$$y=a.\cos^n u \to y'=-a.n.u'.\sin u.\cos^{n-1} u$$

$$y=\tan x \to y'=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$$
$$y=\tan u \to y'=u'.(1+\tan^2 u)$$
$$y=a.\tan^n u \to y'=a.n.u'.(1+\tan^2 u).\tan^{n-1} u$$

$$y=\cot x \to y'=-(1+\cot^2 x)=\frac{-1}{Sin^2 x}$$
$$y=\cot u \to y'=-u'.(1+\cot^2 u)$$
$$y=a.\cot^n u \to y'=-a.n.u'.(1+\cot^2 u).\cot^{n-1} u$$

اثبات ۲ :

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin u(x+h)-\sin u(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{u(x+h)-u(x)}{2}\cos\frac{u(x+h)+u(x)}{2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{u(x+h)-u(x)}{2}}{\frac{u(x+h)-u(x)}{2}}\times\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\times\lim_{h\to 0}\cos\frac{u(x+h)+u(x)}{2}$$

$$=۱\times u'(x)\times\cos\frac{u(x+۰)+u(x)}{۲}=u'(x)\times\cos u(x)$$

مثال :

$$۱)\ \ y=\sin(\sqrt{۲x-۳})\to y'=\frac{۲}{۲\sqrt{۲x-۳}}\cos(\sqrt{۲x-۳})$$

$$۲)\ \ y=\tan\sqrt{x}\to y'=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۱+\tan^{۲}x)$$

$$۳)\ \ y=۳\cos^{۵}(۲x)\to y'=-۳(۵)(۲)\sin(۲x)\cos^{۴}(۲x)$$

تمرین برای حل :

۱ : مشتق تابع $y=\tan(\sin ۲x)$ را در نقطه ی $x=۰$ بدست آورید.

۲ : به کمک قاعده ی زنجیری مشتق تابع $y=a.\sin^{n}u$ را به دست آورید.

نتیجه:

$$y=\sec x\to y'=\sec x.\tan x$$
$$y=\sec u\to y'=u'.\sec u.\tan u$$

اثبات:

$$y=\sec x=\frac{۱}{\cos x}\to y'=\frac{-(-\sin x)}{\cos^{۲}x}=\frac{۱}{\cos x}\times\frac{\sin x}{\cos x}=\sec x.\tan x$$

$$y=\cos ecx\to y'=-\cos ecx.\cot x$$
$$y=\cos ecu\to y'=-u'.\cos ecu.\cot u$$

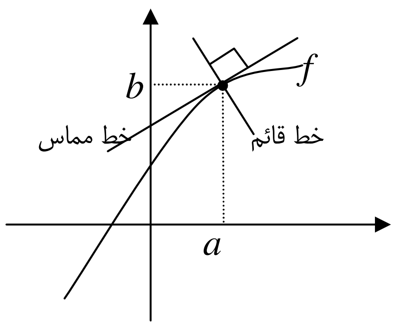
مثال :

$$y=\sec(\sqrt{x})\to y'=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\sec(\sqrt{x})\tan(\sqrt{x})$$

....

خط مماس و خط قائم بر منحنی از نقطه ی روی منحنی

بنابر آنچه که در تعریف مشتق دیدیم. در صورتی که تابع f در نقطه ی (a,b) مشتق پذیر باشد. در این نقطه دارای خط مماس است. شیب و معادله ی خط مماس بر منحنی تابع f در این نقطه به شکل زیر است.



شیب خط مماس $m = f'(a)$

معادله ی خط مماس $y = m(x-a)+b$

همچنین خط قائم بر منحنی تابع f در نقطه ی (a,b) ، خطی است که در همین نقطه بر خط مماس، عمود شود. پس:

شیب خط قائم $m' = -\frac{۱}{m}$

معادله ی خط قائم $y = m'(x-a)+b$

مثال : معادلات خط های مماس و قائم بر منحنی $f(x)=\sqrt{x}$ در نقطه ی $(۱,۱)$ را بیابید.

حل :

$$f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

شیب خط مماس $m = f'(۱) = \frac{۱}{۲\sqrt{(۱)}} = \frac{۱}{۲}$

شیب خط قائم $m' = -\frac{۱}{m} = -۲$

معادله ی خط مماس $y = m(x-a)+b \rightarrow y = \frac{۱}{۲}(x-۱)+۱ \rightarrow y = \frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۲}$

معادله ی خط قائم $y = m'(x-a)+b \rightarrow y = -۲(x-۱)+۱ \rightarrow y = -۲x+۳$

تذکر : بنابر آنچه که قبلاً گفته شد، اگر مشتق تابع f در نقطه ی $x=a$ پیوسته و $f'(a)=+\infty$ یا $f'(a)=-\infty$ در این صورت گویند، منحنق نمودار تابع در این نقطه مماس قائم دارد.

***

حل چند تمرین :

۱ : نقاطی از منحنی $y=\frac{۱}{x}$ را که در آنها خط مماس بر خط $y=۲x$ عمود است، را بیابید.

حل : گیریم که طول نقطه ی مورد نظر $x=\alpha$ باشد. پس :

$$y=\frac{۱}{x}\to y'=-\frac{۱}{x^{۲}}$$

شیب خط مماس $m=f'(\alpha)=-\frac{۱}{\alpha^{۲}}$

با توجه به شرط عمود بودن دو خط می توان نوشت:

$$m.m'=-۱$$

$$(-\frac{۱}{\alpha^{۲}})(۲)=-۱\to\frac{۲}{\alpha^{۲}}=۱\to\alpha^{۲}=۲\to\alpha=\pm\sqrt{۲}$$

۲ : آیا تابع های زیر در نقطه ی مشخص شده خط مماس دارند؟ اگر پاسخ مثبت است، معادله ی خط مماس را بنویسید؟

الف : $f(x)=\sin x$ در $x=۰$ ب : $g(x)=|\sin x|$ در $x=۰$

حل الف : تابع f در $x=۰$ پیوسته است و

$$f'_{+}(۰)=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{\sin x}{x}=۱$$

$$f'_{-}(۰)=\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{\sin x}{x}=۱$$

پس f در $x=۰$ مشتق پذیر است. در نتیجه :

$$f(x)=\sin x\to f(۰)=\sin(۰)=۰$$

$$f'(x)=\cos x\to f'(۰)=\cos(۰)=۱$$

شیب خط مماس $m=f'(۰)=۱$

معادله ی خط مماس $y=m(x-a)+b\to y=۱(x-۰)+۰\to y=x$

حل ب :

$$g'_+(\cdot) = \lim_{x\to\cdot^+} \frac{g(x)-g(\cdot)}{x-\cdot} = \lim_{x\to\cdot^+} \frac{\sin x}{x} = ۱$$

$$g'_-(\cdot) = \lim_{x\to\cdot^-} \frac{g(x)-g(\cdot)}{x-\cdot} = \lim_{x\to\cdot^+} \frac{-\sin x}{x} = -۱$$

لذا تابع در $x=\cdot$ مشتق پذیر نیست.

۳ : آیا تابع های زیر در نقطه ی مشخص شده خط مماس دارند؟ اگر پاسخ مثبت است؟ معادله ی خط مماس را بیابید.

الف : $f(x)=|x|$ در $x=۱$ ب : $g(x)=|x^۲-۱|$ در $x=۱$

ج : $h(x)=\sqrt[۳]{x}$ در $x=\cdot$ د : $e(x)=x\,\mathrm{sgn}(x)$ در $x=\cdot$

حل الف :

$$f'(۱) = \lim_{x\to ۱} \frac{f(x)-f(۱)}{x-۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{|x|-۱}{x-۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{x-۱}{x-۱} = ۱$$

$m = f'(۱) = ۱$ شیب خط مماس

$y = m(x-a)+b \to y = ۱(x-۱)+۱ \to y = x$ معادله ی خط مماس

حل ب :

$$g(x)=|x^۲-۱| = \begin{cases} x^۲-۱ & x>۱ \\ -x^۲+۱ & -۱\le x\le ۱ \\ x^۲-۱ & x<-۱ \end{cases} \to g'(x) = \begin{cases} ۲x & x>۱ \\ -۲x & -۱<x<۱ \\ ۲x & x<-۱ \end{cases}$$

چون $g'_+(۱)=۲$ و $g'_-(۱)=-۲$ پس تابع در نقطه ی $x=۱$ مشتق پذیر نیست و لذا در این نقطه خط مماس ندارد.

حل ج :

$$h(x)=\sqrt[۳]{x} \to h'(x) = \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}$$

پس $h'(\cdot)=+\infty$ یعنی تابع در نقطه ی $x=\cdot$ مشتق پذیر نیست و در این نقطه خط مماس قائم دارد.

حل د :

$$e(x)=x\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases} x & x>1 \\ 0 & x=0 \\ -x & x<1 \end{cases} \rightarrow e'(x)=\begin{cases} 1 & x>1 \\ -1 & x<1 \end{cases}$$

چون $e'_{+}(0)=1$ و $e'_{-}(0)=-1$ پس تابع در نقطه ی $x=0$ مشتق پذیر نیست و لذا در این نقطه خط مماس ندارد.

تمرین برای حل : تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ را در نظر بگیرید.

الف : ثابت کنید که $f'(0)$ وجود ندارد.

ب : به ازای هر $x\neq 0$ تابع $f'(x)$ را به کمک تعریف به دست آورید.

ج : نشان دهید که تابع f در نقطه ی $(0,0)$ مماس قائم دارد.

***

آهنگ تغییر

فرض کنید کمیت y تابعی از کمیت x باشد. متغیر x را متغیر مستقل و متغیر y که تابعی از x است را متغیر وابسته می نامند و برای نمایش این وابستگی از رابطه ی $y=f(x)$ استفاده می کنیم. واضح است که تغییر x ، تغییر y را به همراه دارد. لذا مفهوم آنهگ تغییر را به شکل زیر تعریف می کنیم.

آهنگ تغییرات متوسط

آهنگ تغییرات متوسط تابع f نسبت به تغییرات x ، وقتی x از $x_۱$ به $x_۲$ تغییر می کند، برابر است با

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱}$$

مثال : اگر شعاع دایره ای از ۲ به ۳ سانتی متر افزایش یابد. آهنگ تغییر متوسط مساحت آن را تعیین کنید.

حل :

$$S(r)=\pi r^۲$$

$$\text{آهنگ تغییر متوسط}=\frac{S(۳)-S(۲)}{۳-۲}=\pi(۳)^۲-\pi(۲)^۲=۹\pi-۴\pi=۵\pi\ \ cm^۲$$

یعنی وقتی شعاع دایره از ۲ به ۳ سانتی متر افزایش یابد. مساحت دایره به طور متوسط ۵π سانتی متر مربع افزایش می یابد.

آهنگ تغییرات لحظه ای (آنی)

آهنگ تغییرات لحظه ای تابع f نسبت به تغییرات x ، وقتی x برابر a ، برابر است با

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

مثال : آهنگ تغییر مساحت دایره ای به شعاع r را نسبت به r وقتی که r برابر ۲ سانتی متر را حساب کنید.

حل :

$$S(r)=\pi r^۲$$

$$\text{آهنگ تغییر لحظه ای}\quad S'(r)=۲\pi r\to S'(۲)=۲\pi(۲)=۴\pi\ \ cm^۲$$

یعنی وقتی شعاع دایره ۲ باشد. با افزایش شعاع به اندازه ی یک واحد ، مساحت تقریباً ۴π سانتی متر مربع تغییر می کند.

تمرین : اگر هوا را به داخل بالونی کروی شکل بدمیم. آهنگ تغییر حجم بالون ، وقتی که شعاع آن ۱۵ سانتی متر است، را محاسبه کنید.

حل :

$$v(r)=\frac{۴}{۳}\pi r^{۳} \rightarrow v'(r)=۴\pi r^{۲} \rightarrow v'(۱۵)=۴\pi(۱۵)^{۲}=۴\pi(۲۲۵)=۹۰۰\pi$$

یعنی اگر یک واحد (یک سانتی متر) دیگر به شعاع اضافه شود. تقریباً ۹۰۰π سانتی متر مکعب به حجم بالون افزوده می شود.

تمرین: حجم آب یک منبع آب، t دقیقه پس از شروع تخلیه، بر حسب لیتر برابر است با :

$$v(t)=۲۵۰(۱۶-t)^{۲}$$

آهنگ لحظه ای تخلیه ی آب بعد از ۴ دقیقه ، چقدر است؟ آن را تفسیر کنید.

حل :

$$v'(t)=۲(۲۵۰)(-۱)(۱۶-t)=-۵۰۰(۱۶-t) \rightarrow v'(۴)=-۵۰۰(۱۶-۴)=-۶۰۰۰$$

یعنی وقتی که ۴ دقیقه از زمان تخلیه ی آب منبع گذشته باشد، پس از یک دقیقه ی دیگر تقریباً ۶۰۰۰ لیتر دیگر تخلیه می شود.

توجه : مفهوم آهنگ تغییر را می توان در علوم دیگر را نیز بکار برد. کافی است دو متغیر وابسته به همدیگر را طوری در نظر گرفت که تغییر یکی منجر به تغییر در دیگری شود. برای مثال مفهوم آهنگ تغییر را می توان در فیزیک، در اقتصاد و .... نیز بکار برد.

مفهوم آهنگ تغییر در فیزیک :

در فیزیک ، سرعت همان آهنگ تغییر مکان نسبت به تغییر زمان و سرعت لحظه ای همان آهنگ لحظه ای تغییر مسافت در زمان مشخص می باشد. همچنین شتاب همان آهنگ تغییر سرعت نسبت به تغییر زمان و شتاب لحظه ای همان آهنگ لحظه ای تغییر سرعت در زمان مشخص می باشد. لذا

سرعت متوسط $\overline{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_{۲})-s(t_{۱})}{t_{۲}-t_{۱}}$

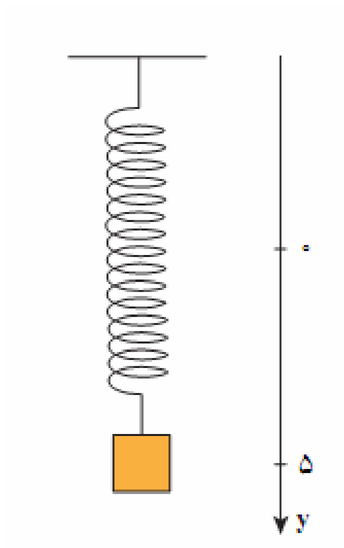
سرعت لحظه ای در زمان $t_{\circ}$ $v(t_{\circ})=s'(t_{\circ})$

شتاب متوسط $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_۲) - v(t_۱)}{t_۲ - t_۱}$

شتاب لحظه ای در زمان $t_۰$ $a(t_۰) = v'(t_۰)$

مثال : جسمی به انتهای فنری آویزان است. آن را به اندازه ی ۵ سانتی متر پایین کشیده و در لحظه ی $t = ۰$ رها می کنیم.(مطابق شکل زیر جهت رو به پایین، جهت مثبت است.) موقعیت این جسم در زمان t از رابطه ی $y = f(t) = ۵\cos t$ به دست می آید. سرعت و شتاب این جسم را در زمان t پیدا کنید و سپس به کمک نتایج به دست آمده حرکت جسم را تحلیل کنید.

حل :



$$y = ۵\cos t \to v(t) = -۵\sin t \to a(t) = -۵\cos t$$

متحرک در لحظه ی $t = ۰$ از حالت سکون از نقطه ی ۵ متری مبدأ در جهت منفی حرکت کرده و هنگام عبور از مبدأ سرعتی برابر ۵ سانتی متر در ثانیه دارد. در لحظه ی $t = \pi$ در فاصله ی ۵ متری در جهت منفی قرار گرفته و یک لحظه سرعت متحرک صفر شده و سپس با شتاب ۵ سانتی متر بر مجذور ثانیه در جهت مثبت حرکت می کند.

t	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
$y(t)$	۵	۰	−۵	۰	۵
$v(t)$	۰	−۵	۰	۵	۰
$a(t)$	−۵	۰	۵	۰	−۵

مفهوم آهنگ تغییر در اقتصاد :

فرض کنید $c(x)$ کل مبلغی باشد که کارخانه ای برای تولید x واحد از یک نوع کالا، هزینه می کند. تابع c را تابع هزینه می نامند. مشابه تعریف آهنگ تغییر ، مقدار حد $\frac{\Delta c}{\Delta x}$ وقتی Δx به سمت صفر میل می کند را آهنگ لحظه ای تغییر هزینه نسبت به تعداد کالای تولید شده را هزینه ی نهایی تولید می نامند.

چون معمولاً مقدار x ها عدد صحیح می باشند، ممکن است بی معنی باشد که Δx به سمت صفر میل می کند. بنابراین هزینه ی نهایی تولید را سهواً به عنوان هزینه ی اضافی لازم برای تولید یک واحد دیگر محصول تعریف می کنند. یعنی

$$\Delta c = c(x+۱) - c(x)$$

مثال : هزینه ی ساخت x یخچال $c(x)$ تومان است. که در آن

$$c(x) = ۸۰۰۰۰۰۰ + ۴۰۰۰۰۰x - ۵۰۰x^۲$$

می باشد. هزینه ی تولید ۱۰۱ امین یخچال چقدر است و معنی آن را توضیح دهید.

حل :

$$c'(x) = ۴۰۰۰۰۰ - ۱۰۰۰x$$

$$\rightarrow c'(۱۰۰) = ۴۰۰۰۰۰ - ۱۰۰۰(۱۰۰) = ۳۰۰۰۰۰$$

یعنی وقتی کارخانه ۱۰۰ یخچال تولید کرده و بخواهد ۱۰۱ امین یخچال را تولید کند. تقریباً ۳۰۰۰۰۰ تومان هزینه می کند.

تمرین : یک کارخانه پارچه بافی ، طاقه هایی از پارچه ای به عرض ثابت تولید می کند. هزینه ی تولید x متر از این پارچه $c(x)$ تومان است.

الف : معنی $c'(x)$ چیست؟ ب : معنی $c'(۱۰۰۰) = ۹۰۰$ چیست؟

حل :

الف : یعنی هزینه ی اضافی برای تولید یک متر پارچه اضافه تر در حالی که x متر پارچه تولید می شود.

ب : یعنی در کارخانه ای که در حال تولید ۱۰۰۰ متر پارچه است. اگر بخواهیم ۱ متر پارچه اضافه تر تولید کنیم، تقریباً ۹۰۰ تومان باید هزینه ی اضافی بپردازیم.

حل چند تمرین :

۱ : حجم یک مکعب به طول ضلع x عبارت است از $V = x^{۳}$ آهنگ تغییر حجم مکعب نسبت به x را وقتی $x = ۴$ است را بیابید.

حل :

$$V(x) = x^{۳} \to V'(x) = ۳x^{۲} \to V'(۴) = ۳(۴)^{۲} = ۴۸$$

۲ : آهنگ تغییر مساحت دایره را نسبت به قطر آن بیابید.

حل :

$$S(r) = \pi r^{۲} \xrightarrow{d=۲r} S(d) = \pi (\frac{d}{۲})^{۲} = \frac{\pi d^{۲}}{۴} \to S'(d) = \frac{\pi d}{۲}$$

۳ : فرض کنید آنفولانزا در یک منطقه شیوع پیدا کرده است و مسئولین اداره ی بهداری تعداد افراد مبتلا به بیماری در زمان t (بر حسب روز از زمان شیوع) را برابر $P(t) = ۶۰t^{۲} - t^{۳}$ تخمین می زنند. با شرط اینکه $۰ \le t \le ۴۰$

الف : آهنگ تغییر پخش آنفولانزا را در $t = ۳۰$ پیدا کنید.

ب : چه زمانی آهنگ پخش آنفولانزا ۹۰۰ نفر در روز است؟

حل :

$$P(t) = ۶۰t^{۲} - t^{۳} \to P'(t) = ۱۲۰t - ۳t^{۲} \to P'(۳۰) = ۱۲۰(۳۰) - ۳(۳۰)^{۲} = ۳۶۰۰ - ۲۷۰۰ = ۹۰۰$$
$$P(t) = ۱۲۰t - ۳t^{۲} \xrightarrow{P(t)=۹۰۰} ۱۲۰t - ۳t^{۲} = ۹۰۰ \to ۴۰t - t^{۲} = ۳۰۰ \to t^{۲} - ۴۰t + ۳۰۰ = ۰$$
$$\to (t-۳۰)(t-۱۰) = ۰ \to t = ۳۰ \ , \quad t = ۱۰$$

۴ : فرض کنید تابع هزینه ی تولید x واحد از محصولی $C(x) = ۰/۰۰۱x^{۳} - ۳x$ و سطح تولید روزانه ۱۰۰ واحد است.

الف : هزینه ی افزایش تولید از ۱۰۰ به ۱۰۱ واحد در روز چقدر است؟

ب : هزینه ی نهایی در این سطح تولید چقدر است؟

حل :

$$C(۱۰۱) - C(۱۰۰) = (۰/۰۰۱(۱۰۱)^{۳} - ۳(۱۰۱)) - (۰/۰۰۱(۱۰۰)^{۳} - ۳(۱۰۰)) =$$

$$C'(x) = ۰/۰۰۳x^{۲} - ۳ \to C'(۱۰۰) = ۰/۰۰۳(۱۰۰)^{۲} - ۳ =$$

۵ : فرض کنید که در آمد حاصل از تولید x واحد از محصولی $R(x)=۰/۱x^{۲}-۳x$ باشد. درآمد نهایی « آهنـگ آنـی تغییر در آمد » را در سطح تولید ۱۸۰۰ واحد حساب کنید.

حل :

$$R(x)=۰/۱x^{۲}-۳x \rightarrow R'(x)=۰/۲x-۳ \rightarrow R'(۱۸۰۰)=۰/۲(۱۸۰۰)-۳=۳۵۷$$

کمیت های وابسته

مسائل زیادی وجود دارد که در آنها دو یا چند متغیر وابسته به متغیر سومی تعریف می شوند. مـثلاً در حرکـت هواپیمـای در حال اوج گیری هم ارتفاع نسبت به زمان در حال افزایش است و هم سرعت نسبت به زمان تغییر می کند. پـس دو کمیـت ارتفاع و سرعت وابسته به کمیت زمان هستند.

در مطالعه ی این گونه کمیت ها باید از قوانین مشتق استفاده کنیم . اما چون نحوه ی مشتق گیری از توابع با بیش از یـک متغیر را فعلاً نمی دانیم، سعی می کنیم که یکی از متغیر ها را بر حسب دیگری پیدا کرده ، سپس عملیات مـشتق گیـری را انجام دهیم. پس روند حل اینگونه مسائل به قرار زیر است.

۱: در صورت امکان ، شکلی را برای مسأله رسم می کنیم.

۲: متغیر ها را تعریف می کنیم و عبارات را بر حسب این متغیر ها می نویسیم.

۳: یک معادله ی اولیه برای کمیت های مرتبط با یکدیگر می نویسیم.

۴: اگر این معادله به عنوان تابع ، بیش از یک متغیر داشته باشد،آن را به تابعی یک متغیره تبدیل می کنیم.

۵: با استفاده از روش های مشتق گیری ، سرعت تغییرات کمیت های مورد نظر را نسبت به یکدیگر تعیین می کنیم.

تمرین : سنگریزه ای را داخل آب ساکن برکه ای می اندازیم. اگر شعاع موج ایجاد شده با سرعت ۲ سانتی متر بر ثانیه افزایش یابد، مساحت موج ایجاد شده زمانی که شعاع ۸ سانتی متر است، با چه سرعتی افزایش می یابد.

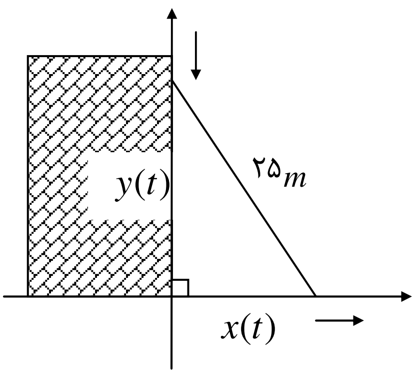
حل :

$$s(t)=\pi r^{۲}(t)\rightarrow s'(t)=۲\pi\, r(t)r'(t)$$

$$\rightarrow s'(t)=۲\pi(۸)(۲)=۳۲\pi \quad cm^{۲}/s$$

تمرین: یک نردبان به طول ۲۵ متر به دیوار قائم تکیه دارد.اگر پای نردبان به طور افقی و با سرعت ۳ متر بـر ثانیـه کـشیده شود، حساب کنید وقتی پای آن در فاصله ی ۱۵ متری از دیوار باشد، سر نردبان به چه سرعتی پایین می آید؟

حل:



اگر t زمان سقوط نردبان به ثانیه و y فاصله ی سرنردبان تا زمین در ثانیه ی t ام و x فاصله ی پای نردبان تا دیوار در ثانیه ی t ام باشد. چون پای نردبان بـه طور افقی با سرعت ۳ متر بر ثانیـه کـشیده مـی شـود.پـس $x'(t)=۳$ و مـی

خواهیم مقدار $y'(t)$ را وقتی که $x(t)=۱۵$ باشد، را بیابیم. از رابطه ی فیثاغورس داریم.

$$x^۲(t)+y^۲(t)=(۲۵)^۲ \xrightarrow{x(t)=۱۵} y(t)=۲۰$$

$$۲y(t)y'(t)+۲x(t)x'(t)=۰ \xrightarrow{\div ۲} y(t)y'(t)+x(t)x'(t)=۰$$

$$\to (۲۰)y'(t)+(۱۵)(۳)=۰ \to y'(t)=-\frac{۴۵}{۲۰}=-\frac{۹}{۴}=-۲/۲۵\ \frac{m}{s}$$

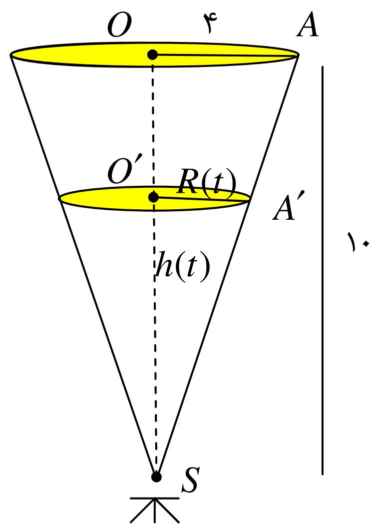
تمرین: نقطه ی $M(x,y)$ بر روی مسیری به معادله ی $۲y^۲-x^۲=۱$ در حال حرکت است، در لحظه ای که سرعت متغیر x برابر۰/۱ متر بر ثانیه است. این نقطه در موقعیت $M(۱,۱)$ قرار می گیرد. در این لحظه سرعت متغیر y چند متر بر ثانیه است.

حل: بدیهی است که تغییر x و y وابسته به زمان است. لذا:

$$۲y^۲(t)-x^۲(t)=۱ \to ۴y(t)y'(t)-۲x(t)x'(t)=۰ \to y'(t)=\frac{x(t)x'(t)}{۲y(t)}$$

$$\xrightarrow{x(t)=۱,\, y(t)=۱,\, x'(t)=۰/۱} y'(t)=\frac{(۱)(۰/۱)}{۲(۱)}=۰/۰۵\ \frac{m}{s}$$

تمرین: مطابق شکل در ته ظرف مخروطی سوراخ ریزی تعبیه شده است که آب از آن خارج می شود. اگر در موقعی که ارتفاع سطح آب ۶ سانتی متر است، با سرعت ۲ سانتی متر مکعب بر دقیقه حجم آن کاهش یابد، حساب کنید که ارتفاع آب با چه سرعتی کاهش می یابد.(شعاع قاعده ی ظرف مخروطی ۴ سانتی متر و ارتفاع آن ۱۰ سانتی متر است.)



$$OA=۴\ ,\ OS=۱۰\ ,V'(t)=-۲\ \frac{cm^۳}{\min}$$

حل:

به کمک تشابه مثلث ها داریم:

$$\overset{\Delta}{OAS} \approx \overset{\Delta}{O'A'S} \to \frac{OA}{O'A'} = \frac{OS}{O'S} = \frac{AS}{A'S} \xrightarrow{\frac{OA}{O'A'}=\frac{OS}{O'S'}} \frac{۴}{R(t)} = \frac{۱۰}{h(t)} \to R(t) = \frac{۲}{۵}h(t)$$

برای حجم محلول داریم:

$$V(t) = \frac{۱}{۳}\pi R^{۲}(t)h(t) \xrightarrow{R(t)=\frac{۲}{۵}h(t)} V(t) = \frac{۴}{۷۵}\pi h^{۳}(t)$$

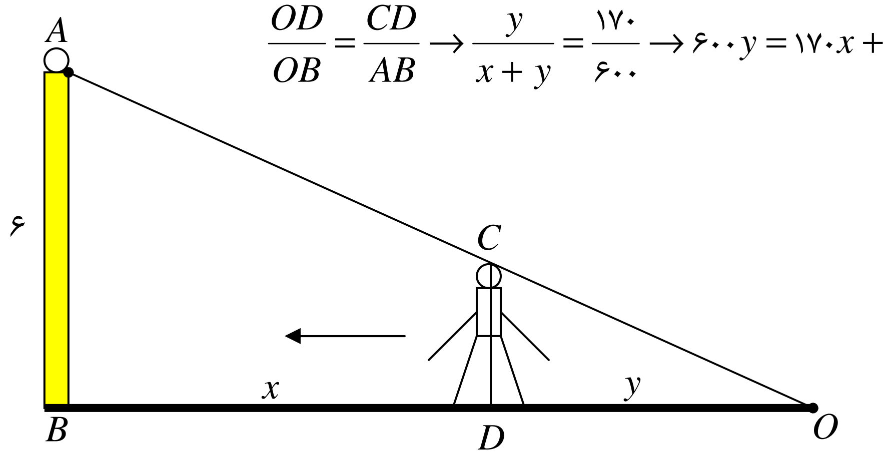
$$V'(t) = \frac{۴}{۲۵}\pi h^{۲}(t)h'(t) \to -۲ = \frac{۴}{۲۵}\pi(۳۶)h'(t) \to h'(t) = -\frac{۲۵}{۷۲\pi}$$

یعنی وقتی ارتفاع سطح آب ۶ سانتی متر است سرعت کاهش ارتفاع آن $\frac{۲۵}{۷۲\pi}$ سانتی متر در دقیقه است.

تمرین : مردی با قد ۱۷۰ سانتی متر با سرعت ۳ متر در ثانیه در خیابانی افقی به طرف تیر چراغی حرکت می کند که ارتفاع آن۶ متر است. طول سایه ی این فرد با چه سرعتی تغییر می کند.

حل : چون $AB \parallel CD$ پس دو مثلث OAB و OCD با هم متشابه هستند. بنابراین:

$$\frac{OD}{OB} = \frac{CD}{AB} \to \frac{y}{x+y} = \frac{۱۷۰}{۶۰۰} \to ۶۰۰y = ۱۷۰x + ۱۷۰y \to ۴۳۰y = ۱۷۰x$$



$$۴۳۰y(t) = ۱۷۰x(t) \to ۴۳۰y'(t) = ۱۷۰x'(t) \xrightarrow{x'(t)=-۳} ۴۳۰y'(t) = ۱۷۰(-۳) \to y'(t) = -\frac{۵۱}{۴۳}\frac{m}{s}$$

طول سایه در حال کاهش است.

***

تمرین برای حل :

۱ : مثلثی با مساحت ثابت ۲۱ متر مربع و قاعده ی ۷ متر را در نظر بگیرید. اگر اندازه ی قاعده ی این مثلث را با سـرعت ۲ متر بر ثانیه کاهش یابد، ارتفاع آن با چه سرعتی تغییر می کند.

۲ : نقطه ی M بر روی مسیر $۳x^۲ - y^۲ + ۲xy = ۳$ در حال حرکت است، هنگامی که M در نقطـه ی (۱,۲) قـرار دارد. مولفه ی x آن با سرعت ۲ متر بر ثانیه کاهش می یابد. سرعت تغییر مولفه ی y آن چقدر است؟

۳ : بشکه ای به شکل استوانه و به شعاع قاعده ی ۵۰ سانتی متر پر از آب است. اگر آب از سـوراخی کـه در انتهـای بـشکه ایجاد شده، با سرعت $۲/۵\pi$ سانتی متر مکعب بر ثانیه از بشکه در حال خارج شدن باشد. ارتفاع آب به چه سرعتی کم می شود؟

۴ : اگر ذره ای روی مسیر $\frac{xy^۳}{۱+y^۲} = \frac{۸}{۵}$ حرکت کند و مؤلفه ی x آن با سرعت ۶ متر بر ثانیه افزایش یابد، هنگـامی کـه ذره در نقطه ی (۲و۱) قرار دارد.

الف: مؤلفه ی y با چه سرعتی تغییر می کند؟ ب: ذره در حال اوج گرفتن است یا در حال سقوط؟

مشتق تابع ضمنی

هر معادله به شکل $f(x,y)=۰$ ممکن است خود تابع نباشد ولی می توان از آن یک یا دو تابع استخراج نمود. مانند معادله ی $x^۲+y^۲=۱$ که تابع نیست ولی توابع زیر از آن استخراج می شوند.

$$y=\sqrt{۱-x^۲} \quad \text{و} \quad y=-\sqrt{۱-x^۲}$$

به همین دلیل است که چنین معادلاتی به توابع ضمنی موسوم هستند. در هر حالت در چنین معادلاتی بیشتر اوقات محاسبه ی y بطور صریح برحسب x امکان پذیر نمی باشد.

منظور از مشتق تابع ضمنی مشتق توابع بدست آمده از آن است. برای محاسبه ی مشتق هر تابع ضمنی به یکی از دو روش زیر می توان عمل کرد.

روش اول: چون y تابعی بر حسب x می باشد، پس از طرفین معادله و جمله به جمله با رعایت قواعد،مشتق می گیریم و از معادله ی حاصل y' را محاسبه می کنیم. توجه کنید که:

$$x \xrightarrow{\text{مشتق}} ۱$$
$$x^n \xrightarrow{\text{مشتق}} nx^{n-۱}$$
$$y \xrightarrow{\text{مشتق}} y'$$
$$y^n \xrightarrow{\text{مشتق}} n.y'.y^{n-۱}$$

تمرین: مشتق توابع زیر را بدست آورید.

۱) $x^۲+۳xy+y^۳-x+۲=۰$

۲) $۳x^۲+۵y^۳-۲x+۱=۷xy$

۳) $\sin x+\cos y=x+y$

روش دوم: چون y تابعی بر حسب x است، پس داریم.

$$f(x,y)=۰ \xrightarrow{\text{مشتق}} f'_x+y'.f'_y=۰ \rightarrow y'=-\frac{f'_x}{f'_y}$$

لذا پس از منتقل کردن تمام جملات به یک طرف معادله، دستور زیر را بکار می گیریم.

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = \begin{array}{l} \longrightarrow \text{مشتق نسبت به } x \text{ (} y \text{ عدد فرض می شود.)} \\ \longrightarrow \text{مشتق نسبت به } y \text{ (} x \text{ عدد فرض می شود.)} \end{array}$$

تمرین: مشتق توابع زیر را بدست آورید.

۱) $x^۲ + ۳xy + y^۳ - x + ۲ = ۰$

۲) $۵x^۳ y^۲ = ۲x + ۳y - \sqrt{x} + \sqrt{y} + ۱$

۳) $(x+y)^۳ + x^۲ y = x^۳$

۴) $y = \sin(x+y)$

۵) $x\sin y + y\sin x = x + y$

۶) $\cos y = y^۲ \sin x$

تمرین: مشتق تابع را بدست آورید.

$$f(x) = \sqrt{\sin x + \cos x + \sqrt{\sin x + \cos x + \sqrt{\sin x + \cos x + \sqrt{\dots}}}}$$

حل:

$$f(x) = \sqrt{\sin x + \cos x + \sqrt{\sin x + \cos x + \sqrt{\sin x + \cos x + \sqrt{\dots}}}}$$

$$\xrightarrow{\text{توان}۲} f^۲(x) = \sin x + \cos x + \sqrt{\sin x + \cos x + \sqrt{\sin x + \cos x + \sqrt{\dots}}}$$

$$\rightarrow f^۲(x) = \sin x + \cos x + f(x)$$

تابع بدست آمده ضمنی است. لذا

$$y^۲ = \sin x + \cos x + y \rightarrow y^۲ - y - \sin x - \cos x = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} y' = -\frac{-\cos x + \sin x}{۲y - ۱}$$

تمرین برای حل :

۱: معادله ی خط مماس بر منحنی $x^۳ + y^۳ = ۹$ در نقطه ی (۱,۲) را بیابید.

۲ : مشتق تابع $y = x + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x + \dots}}}$ را به دست آورید.

***

مشتق تابع وارون

فرض کنیم f تابعی وارون پذیر و f^{-1} وارون آن باشد. در این صورت اگر f مشتق پذیر و مشتق آن ناصفر باشد، آنگاه f^{-1} نیز مشتق پذیر است و داریم.

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

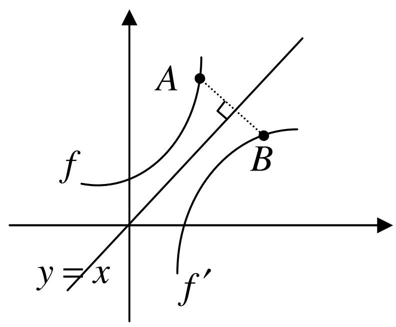
دلیل این امر این است که چون f^{-1} وارون f است. لذا :

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

حال کافی است از طرفین این تساوی مشتق می گیریم.

$$(f^{-1})'(x).f'(f^{-1}(x)) = 1 \rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

نتیجه : اگر $A(a,b)$ نقطه ای از منحنی تابع f باشد.در این صورت $B(b,a)$ نقطه ای متناظر آن از منحنی تابع f^{-1} می باشد. در این صورت



$$f^{-1}(b) = a$$

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} \rightarrow (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

توجه کنید در این حالت $f'(a)$ باید موجود و مخالف صفر باشد.

تمرین : مقدار مشتق معکوس تابع $f(x) = x^3 + 2x + 1$ را در نقطه ی $x = 0$ روی منحنی f را به دست آورید.

حل :

$$f(x)=x^{۳}+۲x+۱ \xrightarrow{x=۰} f(۰)=(۰)^{۳}+۲(۰)+۱=۱$$

$$A(۰,۱)\in f \rightarrow B(۱,۰)\in f^{-۱}$$

$$f(x)=x^{۳}+۲x+۱ \rightarrow f'(x)=۳x^{۲}+۲$$

$$(f^{-۱})'(۱)=\frac{۱}{f'(۰)}=\frac{۱}{۳(۰)^{۲}+۲}=\frac{۱}{۲}$$

تمرین برای حل :

۱ : اگر $f(x)=x^{۳}+۲x$ ، مقدار $(f^{-۱})'(۳)$ را محاسبه کنید.

۲ : فرض کنید $f(x)=۲x^{۳}+۳x^{۲}+۶x+۱$ مقدار $(f^{-۱})'(۱)$ را در صورت وجود پیدا کنید.

تمرین چند تمرین مهم:

۱ : فرض کنید $f^{-۱}$ تابع وارون تـابع مـشتق پـذیر f باشـد اگـر $g(x)=\frac{۱}{f^{-۱}(x)}$ و $f(۱)=۲$ و $f'(۱)=\frac{۱}{۸}$

مقدار $g'(۲)$ را بیابید.

حل :

$$g'(۲)=\left(\frac{۱}{f^{-۱}(۲)}\right)'=\frac{-(f^{-۱})'(۲)}{(f^{-۱}(۲))^{۲}}=\frac{-\frac{۱}{f'(۱)}}{(۱)^{۲}}=-\frac{۱}{f'(۱)}=-\frac{۱}{\frac{۱}{۸}}=-۸$$

۲ : معادله ی خط مماس بر نمودار تابع وارون $f(x)=\frac{x+۲}{x-۱}$ را در نقطه ی $(۲,۴)$ به دست آورید.

حل :

$$f(x)=\frac{x+۲}{x-۱} \rightarrow f'(x)=\frac{-۳}{(x-۱)^{۲}} \rightarrow f'(۲)=-۳$$

نقطه ی $(۴,۲)\in f^{-۱}$ است. لذا :

شیب خط مماس $m=(f^{-۱})'(۴)=\frac{۱}{f'(۲)}=\frac{۱}{-۳}$

معادله ی خط مماس $y=\frac{-۱}{۳}(x-۴)+۲ \rightarrow y=-\frac{۱}{۳}x+\frac{۱۰}{۳}$

۳ : تابع $f:R\rightarrow R$ در مجموعه ی اعداد حقیقی وارون پذیر و مشتق پذیر است و $f'(x)=\sqrt{۹+f^{۲}(x)}$ ، مقـدار $(f^{-۱})'(۴)$ را پیدا کنید.

حل : فرض کنیم که $f \ni (a,۴)$ پس $f(a)=۴$ و $f'(a)=\sqrt{۹+f^{۲}(a)}$ لذا :

$$f'(a)=\sqrt{۹+f^{۲}(a)}=\sqrt{۹+(۴)^{۲}}=\sqrt{۲۵}=۵$$

$$(f^{-۱})'(۴)=\frac{۱}{f'(a)}=\frac{۱}{۵}$$

***

مشتق توابع معکوس مثلثاتی

$$y=\sin^{-۱}x \rightarrow y'=\frac{۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$$
$$y=\sin^{-۱}u \rightarrow y'=\frac{u'}{\sqrt{۱-u^{۲}}}$$

$$y=\tan^{-۱}x \rightarrow y'=\frac{۱}{۱+x^{۲}}$$
$$y=\tan^{-۱}u \rightarrow y'=\frac{u'}{۱+u^{۲}}$$

$$y=\cos^{-۱}x \rightarrow y'=\frac{-۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$$
$$y=\cos^{-۱}u \rightarrow y'=\frac{-u'}{\sqrt{۱-u^{۲}}}$$

$$y=\cot^{-۱}x \rightarrow y'=\frac{-۱}{۱+x^{۲}}$$
$$y=\cot^{-۱}u \rightarrow y'=\frac{-u'}{۱+u^{۲}}$$

مثال : مشتق تابع $y=\sin^{-۱}(۳x+x^{۲})$ را بدست آورید.

$$y'=\frac{۳+۲x}{\sqrt{۱-(۳x+x^{۲})^{۲}}}$$

تمرین: مشتق تابع $y=\sin^{-۱}x$ را ثابت کنید.

اثبات: فرض می کنیم $x\in(-۱,۱)$

$$y=\sin^{-۱}x \rightarrow x=\sin y$$

حال از دو طرف مشتق می گیریم.

$$1 = y'\cos y \to y' = \frac{1}{\cos y} \xrightarrow{\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y}} y' = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$\xrightarrow{x=\sin y \to x^2 = \sin^2 y} y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

***

مشتق تابع نمایی طبیعی

اگر e عدد نپرین باشد. در این صورت تابع $f(x) = e^x$ را تابع نمایی طبیعی می نامند. تابع مشتق این تابع به شـکل زیـر است.

$$f(x) = e^x \to f'(x) = e^x$$

اثبات : قبل از ورود به اثبات یاد آوری می کنیم که : $\lim\limits_{t\to+\infty} (1+\frac{1}{t})^t = e$

لذا با تغییر متغیر خواهیم داشت :

$$\xrightarrow{h=\frac{1}{t}} \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e \to (1+h)^{\frac{1}{h}} \approx e \to ((1+h)^{\frac{1}{h}})^h \approx e^h \to 1+h \approx e^h$$

حال به مشتق تابع برمی گردیم و تساوی فوق نیز استفاده می کنیم.

$$f(x) = e^x$$

$$\to f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x . e^h - e^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = e^x \lim_{h\to 0}\frac{1+h-1}{h} = e^x \lim_{h\to 0}(1) = e^x$$

توجه : اگر u تابعی مشتق پذیر بر حسب x باشد. در این صورت:

$$y = e^u \to y' = u'e^u$$

برای اثبات این قسمت قاعده ی زنجیری استفاده می کنیم. برای این کار قرار می دهیم.

$f(x) = e^x$ و $u = g(x)$ پس $y = (fog)(x)$ پس :

$g'(x)=u'$ و $f'(x)=e^{x}$

$$y=f(g(x))\rightarrow y'=g'(x)f'(g(x))=u'f'(u)=u'e^{u}$$

مثال : مشتق توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f(x)=e^{\tan x}$ ب) $f(x)=x^{۲}e^{-x^{۲}}$

حل :

الف) $f'(x)=(۱+\tan^{۲}x)e^{\tan x}$

ب) $f'(x)=۲xe^{-x^{۲}}+(-۲x)(e^{-x^{۲}})(x^{۲})=۲xe^{-x^{۲}}-۲x^{۳}e^{-x^{۲}}$

تمرین برای حل :

۱ : معادله ی خط مماس بر منحنی $y=e^{۲x}\cos\pi x$ را در نقطه ی $(۰,۱)$ پیدا کنید.

۲ : مشتق توابع زیر را پیدا کنید.

الف) $f(x)=۲e^{۳x+\sin x}$ ب) $f(x)=e^{\sqrt{x}}$

۳ : مشتق تابع $f(x)=e^{Cosx+Sinx}$ در نقطه ی $x=\frac{\pi}{۲}$ را تعیین کنید.

۴ : اگر $e^{x}+e^{y}-x^{۲}-y^{۲}-۲=۰$ مشتق تابع y را برحسب x یعنی $\frac{dy}{dx}$ را به دست آورید.

***

مشتق تابع لگاریتمی طبیعی

می دانیم که تابع $f(x)=e^{x}$ تابعی پیوسته و یک به یک می باشد و لذا وارون پذیر بوده و وارون آن نیز پیوسته است. وارون این تابع را به شکل $f(x)=L_{n}x$ نمایش می دهند و ان را تابع لگاریتمی طبیعی می نامند. تابع مشتق این تابع به شکل زیر است.

$$f(x)=L_{n}x\rightarrow f'(x)=\frac{۱}{x}$$

به کمک مشتق گیری ضمنی به سهولت می توان این مطلب را ثابت کرد.

$$y = L_n x \rightarrow x = e^y$$

$$\rightarrow (x)' = (e^y)' \rightarrow ۱ = y'e^y \rightarrow y' = \frac{۱}{e^y} \rightarrow y' = \frac{۱}{x}$$

توجه : اگر u تابعی مشتق پذیر بر حسب x باشد. در این صورت:

$$y = L_n u \rightarrow y' = \frac{u'}{u}$$

برای اثبات این قسمت قاعده ی زنجیری استفاده می کنیم. برای این کار قرار می دهیم.

$f(x) = L_n x$ و $u = g(x)$ پس $y = (fog)(x)$ پس :

$$g'(x) = u' \quad \text{و} \quad f'(x) = \frac{۱}{x}$$

$$y = f(g(x)) \rightarrow y' = g'(x) f'(g(x)) = u'f'(u) = u'(\frac{۱}{u}) = \frac{u'}{u}$$

مثال : مشتق توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = L_n(x^۴ + ۱)$ ب) $f(x) = L_n |\cos x|$

حل :

الف) $f'(x) = \dfrac{۴x^۳}{x^۴ + ۱}$ ب) $f'(x) = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$

تمرین : مشتق تابع وارون، تابع $f(x) = ۳x + L_n x$ ، را در نقطه ی $x = ۳$ به دست آورید.

حل : فرض کنیم که $(a,۳) \in f$ پس :

$$f(a) = ۳ \rightarrow ۳a + L_n a = ۳ \rightarrow a = ۱$$

$$f(x) = ۳x + L_n x \rightarrow f'(x) = ۳ + \frac{۱}{x}$$

$$(f^{-۱})'(۳) = \frac{۱}{f'(۱)} = \frac{۱}{۳ + ۱} = \frac{۱}{۴}$$

توجه : اگر u تابعی مشتق پذیر بر حسب x باشد. در این صورت:

$$y = a^x \rightarrow y' = a^x L_n a$$

$$y = a^u \rightarrow y' = u' a^u L_n a$$

$$y = \log_a^x \rightarrow y' = \frac{۱}{x} \times \frac{۱}{L_n a}$$

$$y = \log_a^u \rightarrow y' = \frac{u'}{u} \times \frac{۱}{L_n a}$$

مثال :

$$y = ۳^{\sin x} \rightarrow y' = (\cos x)(۳^{\sin x}) L_n ۳$$

$$y = \log_۳^{x^۲ + \sin x} \rightarrow y' = \frac{۲x + \cos x}{x^۲ + \sin x} \times \frac{۱}{L_n ۳}$$

تمرین برای حل :

۱ : مشتق توابع زیر را پیدا کنید.

الف) $f(x) = L_n |\sin x|$ ب) $f(x) = L_n |x^۲ - ۱|$

۲ : مشتق توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y = x^x$ ب) $y = x^{\sin x}$

***

قاعده ی هوپیتال

هرگاه g و f توابعی مشتق پذیر در a بوده و $f(a) = g(a) = ۰$ باشد، دراین صورت واضح است که حد کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ وقتی $x \rightarrow a$ به صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ در می آید. برای رفع ابهام این کسر با فرض اینکه $x \neq a$ می توان به شکل زیر عمل کرد.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x\to x_۰} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim_{x\to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

یعنی برای محاسبه ی حد کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ وقتی که $x \to a$ اگر به صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ درآید،کسری تشکیل می دهیم که صورت آن مشتق صورت کسر داده شده و مخرج آن نیز مشتق مخرج کسر داده شده باشند و سپس حد کسر بدست آمده را محاسبه می کنیم.

توجه: اگر حد کسر جدید نیز به شکل $\frac{۰}{۰}$ در آید، عمل مشتق گیری را مجدداً تکرار می کنیم.

تمرین: حد های زیر را محاسبه کنید.

$$۱)\ \lim_{x\to ۱}\frac{۳x^۴-۳x^۳+۲x-۲}{۲x^۲-۵x+۳}$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۱}\frac{x^n-۱}{x^m-۱}$$

$$۳)\ \lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos x}{\sin x}$$

$$۴)\ \lim_{x\to ۴}\frac{x-۴}{\sqrt{x^۲-۷}-۳}$$

تمرین: حد $\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos x^۲}{x^۲\sin x^۲}$ را محاسبه کنید. (جواب $\frac{۱}{۲}$)

تمرین : با استفاده از قاعده ی هوپیتال تساوی های زیر را ثابت کنید.

$$۱)\ \lim_{x\to ۰}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^۲}=\frac{۱}{۲}(b^۲-a^۲)$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۰}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}=b-a$$

$$۳)\ \lim_{x\to ۰}\frac{a^x-b^x}{x}=L_n(\frac{a}{b})$$

$$۴)\ \lim_{h\to ۰}\frac{f(a+mh)-f(a+nh)}{h}=(m-n)f'(a)$$

***

مشتقات مراتب بالاتر

اگر تابع f روی بازه ی باز $I=(a,b)$ مشتق پذیر باشد. در این صورت تابع مشتق مرتبه ی اول یعنی f' وجود دارد. حال اگر تابع f' در این فاصله یا زیر مجموعه ای از آن مشتق پذیر باشد، می توان تابع مشتق مرتبه ی دوم را به صورت زیر تعریف نمود.

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$$

به همین ترتیب و در صورت مشتق پذیر بودن f'' می توان مشتق مرتبه سوم را نیز تعریف نمود. به جدول زیر توجه کنید.

تابع	$y=f(x)$	
مشتق مرتبه ی اول	$y'=f'(x)$	$\frac{\partial y}{\partial x}$
مشتق مرتبه ی دوم	$y''=f''(x)$	$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$
مشتق مرتبه ی سوم	$y'''=f'''(x)$	$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$
مشتق مرتبه ی چهارم	$y^{(4)}=f^{(4)}(x)$	$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$
....	....	....
مشتق مرتبه ی n ام	$y^{(n)}=f^{(n)}(x)$	$\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$

تمرین: مشتق پذیری تابع $y=x|x|$ را برای مشتقات مرتبه ی اول و مرتبه ی دوم بررسی کنید.

حل: ابتدا تابع را به صورت چند ضابطه ای تعریف می کنیم.

$$x>0 \xrightarrow{|x|=x} f(x)=x.x=x^2$$

$$x=0 \xrightarrow{|x|=0} f(x)=0$$

$$x<0 \xrightarrow{|x|=-x} f(x)=x.(-x)=-x^2$$

$$\therefore f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x>۰ \\ ۰ & x=۰ \\ -x^{۲} & x<۰ \end{cases} \qquad D_f=R$$

حل باید پیوستگی و مشتقات یک طرفه ی تابع را برای وجود مشتق مرتبه ی اول بررسی می کنیم. این کار را در نقطـه ی $x=۰$ (نقطه ی شکستگی نمودار تابع)انجام می دهیم.

حد راست $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=۰^{۲}=۰$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=-(۰^{۲})=۰$

مقدار $f(۰)=۰$

مشتق راست $f'_+(۰)=\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{x^{۲}-۰}{x-۰}=\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{x^{۲}}{x}=\lim\limits_{x\to ۰^+} x=۰$

مشتق چپ $f'_-(۰)=\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{-x^{۲}-۰}{x-۰}=\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{-x^{۲}}{x}=\lim\limits_{x\to ۰^-}(-x)=۰$

پس تابع در نقطه ی $x=۰$ پیوسته و مشتق پذیر است. لذا:

$$f'(x)=\begin{cases} ۲x & x>۰ \\ ۰ & x=۰ \\ -۲x & x<۰ \end{cases} \qquad D_{f'}=R$$

حال پیوستگی و مشتق پذیری تابع مشتق مرتبه ی اول را برای وجود مشتق مرتبه ی دوم بررسی می کنیم. این کـار را در نقطه ی $x=۰$ (نقطه ی شکستگی نمودار تابع مشتق اول)انجام می دهیم.

حد راست $\lim\limits_{x\to ۰^+} f'(x)=۲(۰)=۰$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۰^-} f'(x)=-۲(۰)=۰$

مقدار $f'(۰)=۰$

مشتق راست $f''_+(۰)=\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{f'(x)-f'(۰)}{x-۰}=\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{۲x-۰}{x-۰}=۲$

مشتق چپ $f''_{-}(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-2x-0}{x-0}=-2$

پس تابع مشتق مرتبه ی اول در نقطه ی $x=0$ پیوسته است ولی مشتق پذیر نیست. لذا:

$$f''(x)=\begin{cases} 2 & x>0 \\ \text{وجود ندارد} & x=0 \\ -2 & x<0 \end{cases} \qquad D_{f''}=R-\{0\}$$

تمرین: تابع زیر در نقطه ی $x=1$ مشتق مرتبه دوم دارد. مقدار c و b و a را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & x\le 1 \\ ax^2+bx+c & x>1 \end{cases}$$

حل: چون تابع f مشتق مرتبه ی دوم دارد. پس مشتق مرتبه ی اول داشته و مشتق مرتبه ی اول آن در این نقطه پیوسته و مشتق پذیر است.لذا داریم:

تابع $f(x)=\begin{cases} x^3 & x\le 1 \\ ax^2+bx+c & x>1 \end{cases}$

مشتق مرتبه ی اول $f'(x)=\begin{cases} 3x^2 & x\le 1 \\ 2ax+b & x>1 \end{cases}$

مشتق مرتبه ی دوم $f''(x)=\begin{cases} 6x & x\le 1 \\ 2a & x>1 \end{cases}$

* بررسی پیوستی تابع در نقطه ی $x=1$

حد راست $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=a+b+c$

حد چپ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1$

مقدار $f(1)=1$

و چون تابع در این نقطه پیوسته است پس: $a+b+c=1$

* بررسی مشتقات یک طرفه تابع

مشتق راست $f'_{+}(1)=2a+b$

مشتق چپ $f'_{-}(۱)=۳$

و چون تابع در این نقطه مشتق مرتبه ی اول دارد پس: $۲a+b=۳$

* بررسی پیوستگی مشتق مرتبه ی اول که همان مشتقات یک طرفه ی تابع است.

* بررسی مشتقات یک طرفه ی مشتق مرتبه ی اول

مشتق راست $f''_{+}(۱)=۲a$

مشتق چپ $f''_{-}(۱)=۶$

و چون تابع مشتق در این نقطه مرتبه ی دوم دارد، پس: $۲a=۶$

در نهایت می توان نوشت:

$$۲a=۶ \rightarrow a=۳$$

$$۲a+b=۳ \xrightarrow{a=۳} ۲(۳)+b=۳ \rightarrow b=-۳$$

$$a+b+c=۱ \xrightarrow{a=۳,b=-۳} ۳-۳+c=۱ \rightarrow c=۱$$

تمرین: مشتق مرتبه ی دوم تابع $y=۲x^۳+۵x+۲\sqrt{\sin x}$ را بیابید.

حل:

$$y=۲x^۳+۵x+۲\sqrt{\sin x}$$

$$\rightarrow y'=۶x^۲+۵+۲\times\frac{\cos x}{۲\sqrt{\sin x}}=۶x^۲+۵+\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$$

$$\rightarrow y''=۱۲x+\frac{-\sin x\sqrt{\sin x}-(\frac{\cos x}{۲\sqrt{\sin x}})\cos x}{\sin x}$$

تمرین: هرگاه $y=\sin^۲ x$ ثابت کنید که $y''=۲\cos ۲x$

تمرین: هرگاه $y=\sqrt{x^۲+۲x}$ ثابت کنید که $y'^۲+yy''=۱$

تمرین: هرگاه $y=a\sin\omega t+b\cos\omega t$ ثابت کنید که $y''+\omega^۲ y=۰$

نکته: مشتق مرتبه ی n ام توابع زیر به شکل زیر است. این روابط به کمک استقرای ریاضی اثبات می شوند.

$$۱)\ y=\frac{۱}{x}\to y^{(n)}=\frac{(-۱)^n n!}{x^{n+۱}}$$

$$۲)\ y=\frac{۱}{ax+b}\to y^{(n)}=\frac{(-۱)^n n!a^n}{(ax+b)^{n+۱}}$$

$$۳)\ y=(ax+b)^n\to y^{(n)}=n!a^n$$

$$۴)\ y=f(ax)\to y^{(n)}=a^n f^{(n)}(ax)$$

$$۵)\ y=\sin ax\to y^{(n)}=a^n.\sin(ax+\frac{n\pi}{۲})$$

$$۶)\ y=\cos ax\to y^{(n)}=a^n.\cos(ax+\frac{n\pi}{۲})$$

$$۷)\ y=e^{ax+b}\to y^{(n)}=a^n e^{ax+b}$$

$$۸)\ y=L_n x\to y^{(n)}=\frac{(-۱)^{n-۱}(n-۱)!}{x^n}$$

تمرین: مشتق مرتبه ی پنجم تابع $y=\frac{۳}{x}$ را بدست آورید.

حل :

$$y=\frac{۳}{x}=۳(\frac{۱}{x})\to y^{(۵)}=۳(\frac{(-۱)^۵ ۵!}{x^{۵+۱}})=۳(\frac{-۱۲۰}{x^۶})=\frac{-۳۶۰}{x^۶}$$

تمرین: مشتق مرتبه ی نهم تابع $y=\frac{۵}{۲x-۱}$ را بدست آورید.

تمرین: مشتق مرتبه ی پانزده ام تابع $y=\frac{۱}{۲^{۱۴}}\sin ۲x$ را در نقطه ی $x=\frac{\pi}{۶}$ بدست آورید.

تمرین: مشتق مرتبه ی پنجاه ام تابع $y=\sin x+\cos x$ را بیابید.

تمرین برای حل :

۱ : مشتق پنجم تابع $f(x)=\frac{۱}{۳۲}e^{۲x}$ را به دست آورید.

۲ : مقدار λ هایی را پیدا کنید که به ازای آنها $y=e^{\lambda x}$ در معادله ی دیفرانسیل[1] $y''+۶y'+۸y=۰$ صدق کند.

۳ : مشتق مرتبه ی ده ام تابع $y=(\sin ax+\cos ax)^۲$ را بیابید.

۴ : مشتق مرتبه ی بیست و هفتم تابع $y=\sin x.\cos x$ را بیابید.

۵ : اگر مشتق دوم تابع $y=\tan^{-۱}x+ax^۲$ در نقطه ی $x=۱$ برابر $\frac{۳}{۲}$ باشد. مقدار a را محاسبه کنید.

[1] . معادله ای که رابطه ای بین y و مشتقات اول یا بالاتر آن را بیان می کند، یک معادله ی دیفرانسیل نامیده می شود.

۶ : فرمول های بند ۵ و ۶ را به کمک استقرای ریاضی ثابت کنید.

۷ : هرگاه $x^{2}+y^{2}=1$ حاصل $\frac{d^{2}y}{dx^{2}}$ را بیابید.

***

حل تمارین مهم

در این قسمت تمرین های مهم کتاب در قسمت مشتق را بررسی و حل می کنیم.

۱: (مثال ص۱۳۵) نمودار تابع $f(x)=x^{۳}$ و مشتق آن را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

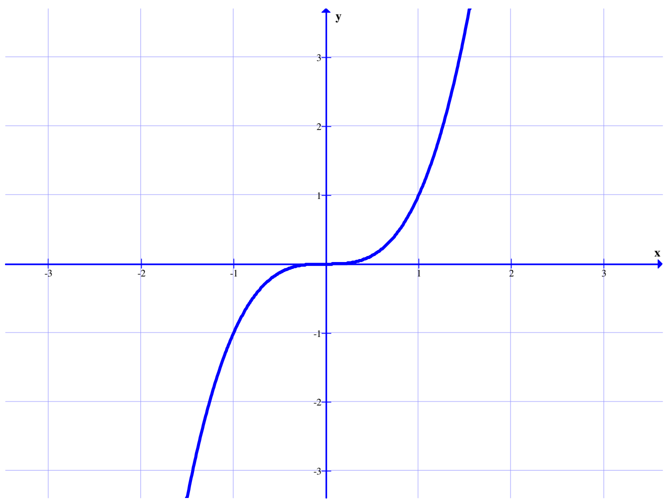
حل :

$f(x)=x^{۳}$

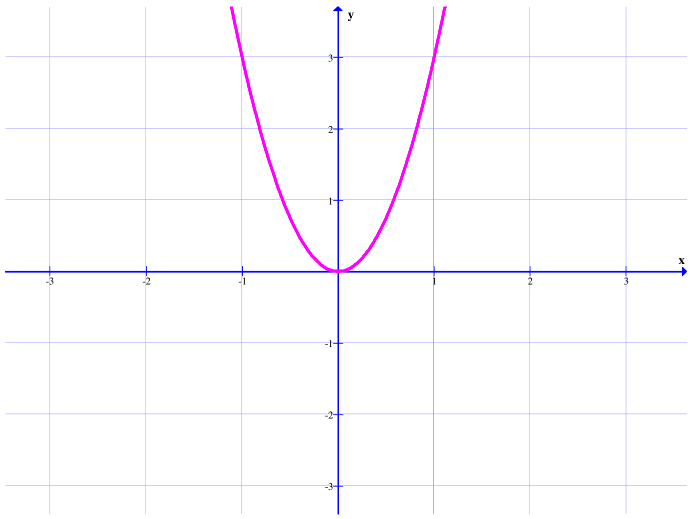
x	−۲	−۱	۰	۱	۲
y	−۸	−۱	۰	۱	۸

$f'(x)=۳x^{۲}$

x	−۲	−۱	۰	۱	۲
y	۱۲	۳	۰	۳	۱۲



توضیح : در بازه های $(۰,+\infty)$ و $(-\infty,۰)$ شیب خطوط مماس بر منحنی نمودار f مثبت است. پس نمودار مشتق آن بالای محور x قرار می گیرد. در بازه ی های فوق هر چه به صفر نزدیک باشیم، شیب خط مماس کمتر و کمتر می شود، یعنی نمودار تابع مشتق به صفر نزدیک می شود. از طرفی در بازه ی $(-\infty,۰)$ تابع f' نزولی و در بازه ی $(x,+\infty)$ صعودی است. در نقطه ی $x=۰$ شیب خط مماس صفر است. لذا مشتق تابع نیز در این نقطه صفر می باشد.



تمرین مشابه : (مثال ص۱۳۵) نمودار تابع $f(x)=x^{۲}$ و مشتق آن را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

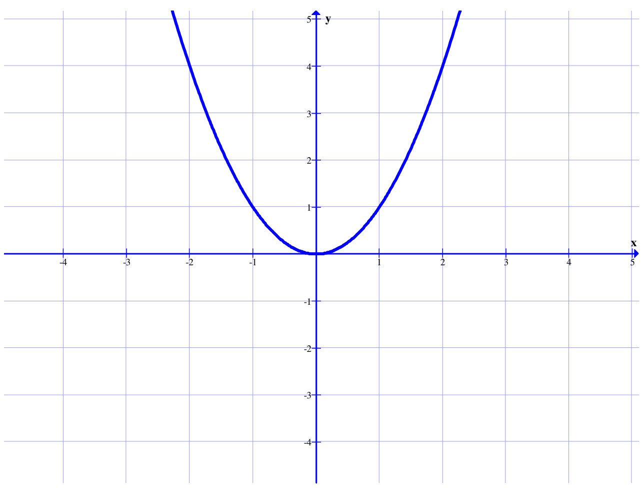
حل :

$f(x)=x^{۲}$

x	-۱	۰	۱
y	-۱	۰	۱

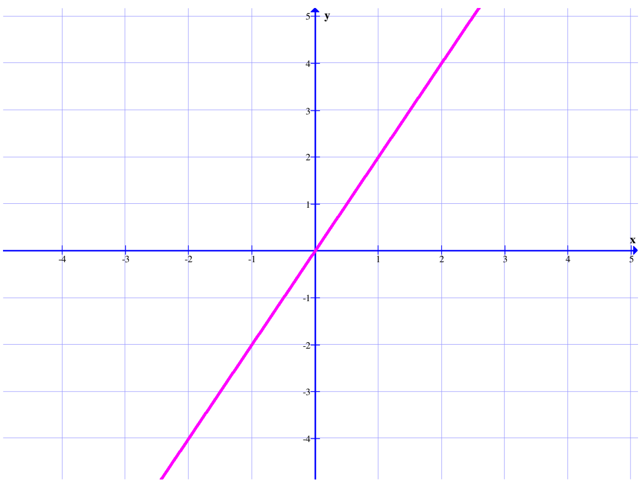
$f'(x)=۲x$

x	-۱	۰	۱
y	-۲	۰	۲



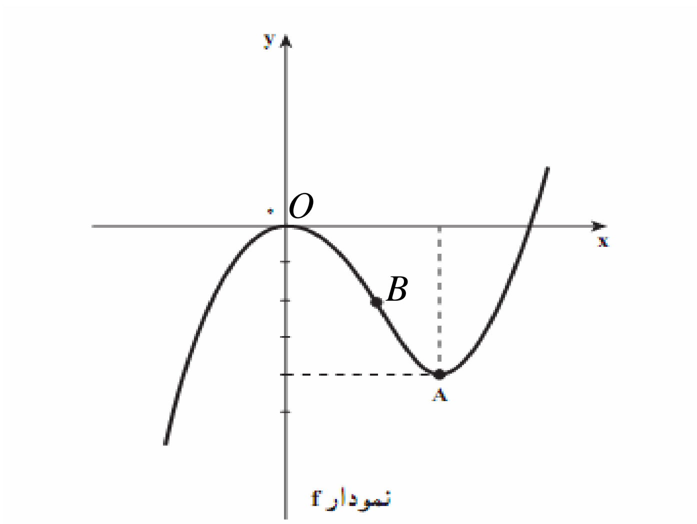
توضیح : در بازه ی $(\cdot,+\infty)$ شیب خطوط مماس بر منحنی نمودار f مثبت است. پس نمودار مشتق آن بـالای محـور x قرار می گیرد. : در بازه ی $(-\infty,\cdot)$ شیب خطوط مماس بر منحنی نمودار f منفی است. پس نمودار مشتق آن زیـر محـور x قرار می گیرد. در بازه ی های فوق هر چه به صفر نزدیک باشیم، شیب خط مماس کمتر و کمتر می شود، یعنی نمـودار تابع مشتق به صفر نزدیک می شود. از طرفی در بـازه هـای $(\cdot,+\infty)$ و $(-\infty,\cdot)$ تـابع f' صـعودی اسـت. در نقطـه ی $x=\cdot$ شیب خط مماس صفر است. لذا مشتق تابع نیز در این نقطه صفر می باشد.

x	$-\infty$	$\cdot$	$+\infty$
y	شیب خط مماس منفی	$\cdot$	شیب خط مماس مثبت
y'	نمودار f' زیر محور طول ها	$\cdot$	نمودار f' بالای محور طول ها



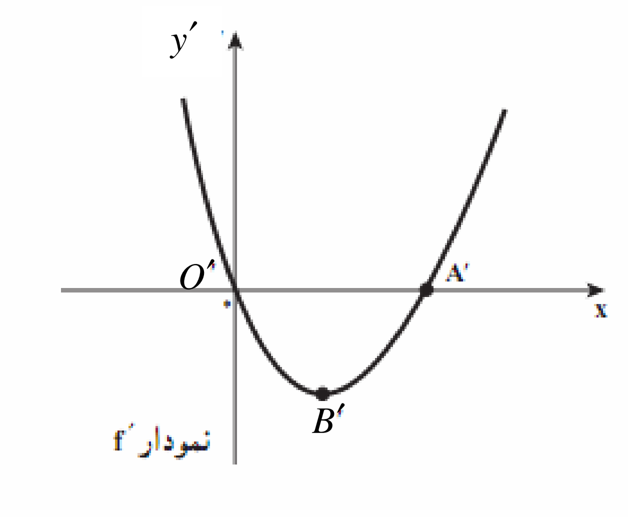
***

۲ : (مثال ص ۱۳۴) نمودار تـابع f در شـکل زیر نشان داده شـده اسـت. بـا اسـتفاده از آن نمودار تابع f' را به تقریب نشان دهید.



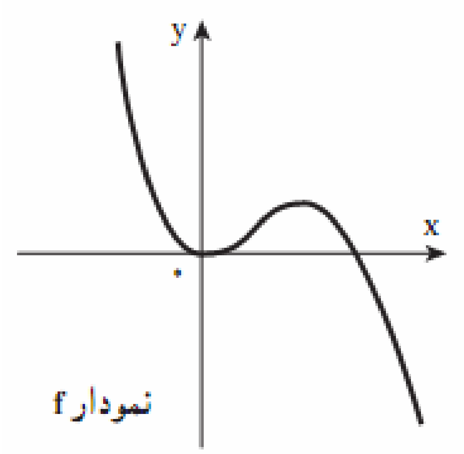
حل : شیب خط های مماس بـر منحنـی f قبل از نقطه ی O مثبت است. پـس در ایـن جاها f' مثبت است و خط ممـاس در نقطـه

ی O افقی است. پس به ازای طول این نقطه مقدار f' صفر است و بین O و A شیب خط های مماس منفی است. پس در این جاها f' منفی است و نمودار f' زیر محور x ها است و خط مماس در نقطه ی A افقی است. پس به ازای طول این نقطه مقدار تابع f' صفر است. در نتیجه نمودار f' محور x ها را در نقاط O' و A' (نقاط O' با O و A' با A هم طولند.) قطع می کند. بعد از نقطه ی A شیب خط های مماس مثبت است. پس در این جاها f' مثبت است و نمودار f' بالای محور x ها است. بنابراین f' را می توان به صورت شکل زیر نمایش داد. نقطه ی B' روی نمودار f' نقطه ای هم طول نقطه ی B از نمودار f است که در این نقطه مقدار مشتق کمترین است.

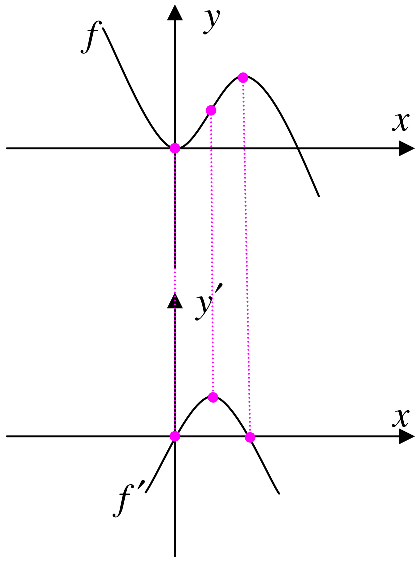


***

۳ : (تمرین در کلاس ص ۱۳۵) نمودار تابع f به شکل زیر است. از روی آن نمودار f' را رسم کنید.



حل : با توجه به شیب خطوط مماس در نقاط مختلف نمودار تابع f می توان نمودار تابع f' را به شکل زیر رسم نمود.



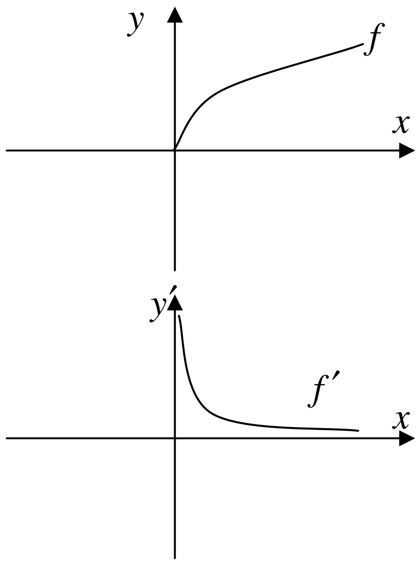
***

۴ : (تمرین در کلاس ص ۱۳۶) نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را رسم نموده و سپس به کمک آن نمودار تابع f' را رسم کنید.

$f(x)=\sqrt{x}$

x	۰	۱	۴
y	۰	۱	۲

حل : با توجه به شیب خطوط مماس در نقاط مختلف نمودار تابع f می توان نمودار تابع f' را به شکل زیر رسم نمود.



توجه داشته باشید که چون $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ این نتیجه با نمودار f' مطابق دارد. $D_{f'}=(0,+\infty)$

x	۰	۰/۲۵	۱	۴
y	ن	۱	۰/۵	۰/۲۵

***

۵ : (تمرین در کلاس ص ۱۳۷ ب) نشان دهید مبدأ مختصات یک گوشه برای تابع زیر می باشد. اندازه ی زاویـه ی ایجـاد شده در گوشه را به دست آورید.

$$f(x)=\begin{cases} x & x<0 \\ x^2 & x\geq 0 \end{cases}$$

حل :

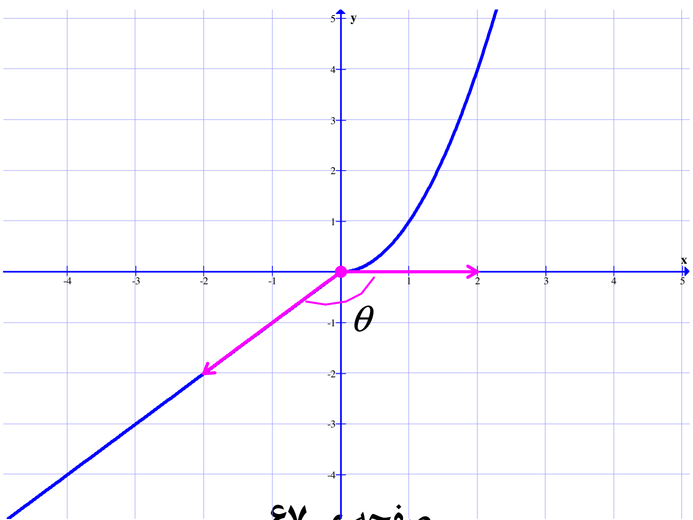
$$f'(x)=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 2x & x\leq 0 \end{cases}$$

مشتق راست $m_1=f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} x=0$

مشتق چپ $m_2=f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} 1=1$

چون در نقطه ی مبدأ مختصات مشتق چپ و راست، حداقل یکی عدد ولی نابرابرند، پس مبدأ مختصات گوشه یـا نقطـه ی زاویه دار است.

$$\tan\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\frac{0-1}{1+(0)(1)}=-1\rightarrow \theta=-1\Rightarrow \theta=135^\circ$$



۶ : (مثال ص ۱۴۰) مقادیر a و b را به قسمی تعیین کنید که تابع زیر در نقطه ی $x=۰$ مشتق پذیر باشد.

$$f(x)=\begin{cases}(x+۱)^{۳} & x\le ۰\\ ax+a+b & x>۰\end{cases}$$

حل : اولاً تابع در نقطه ی $x=۰$ پیوسته است. پس :

حد راست $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=a(۰)+a+b=a+b$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=(۰+۱)^{۳}=۱$

مقدار $f(۰)=(۰+۱)^{۳}=۱$

$\therefore\ a+b=۱$

ثانیاً مشتق راست و مشتق چپ تابع در این نقطه برابرند.

$$f'(x)=\begin{cases}۳(۱)(x+۱)^{۲} & x\le ۰\\ a & x>۰\end{cases}$$

مشتق راست $f'_{+}(۰)=a$

مشتق چپ $f'_{-}(۰)=۳(۰+۱)^{۲}=۳$

$\therefore\ a=۳$

و چون $a+b=۱$ لذا $b=-۲$

***

۷ : (تمرین در کلاس ص ۱۴۱) تابع f در نقطه ی a پیوسته است. ثابت کنیـد تـابع $g(x)=(x-a)f(x)$ در نقطـه ی a مشتق پذیر است.

حل : تابع f در نقطه ی a پیوسته است. پس:

$$g'(a)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)f(x)-(a-a)f(a)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)f(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

و چون حد فوق موجود است. پس تابع g در a مشتق پذیر است و $g'(a)=f(a)$

***

۸ : (مثال ص ۱۴۱) معادله ی حرکت ذره ای $s=t^{۳}-۴t^{۲}+۲t+۳$ است.(s بر حسب سانتی متر و t بر حسب ثانیه است.) شتاب این ذره را به عنوان تابعی از زمان پیدا کنید. پس از گذشت ۳ ثانیه شتاب چقدر است؟

حل :

$$s=t^{۳}-۴t^{۲}+۲t+۳\rightarrow v=s'(t)=۳t^{۲}-۸t+۲\rightarrow a=v'(t)=۶t-۸$$

پس از گذشت ۳ ثانیه شتاب برابر است با :

$$a(۳)=۶(۳)-۸=۱۰\,\frac{cm}{s^{۲}}$$

***

۹ : (تمرین در کلاس ص۱۴۱) معادله ی خط مماس بر منحنی $y=\frac{x}{x^{۲}+۶}$ را در نقطه ی $(۲,۰/۲)$ پیدا کنید.

حل : واضح است که نقطه ی $(۲,۰/۲)$ روی منحنی قرار دارد. (در معادله ی تابع صدق می کند.)

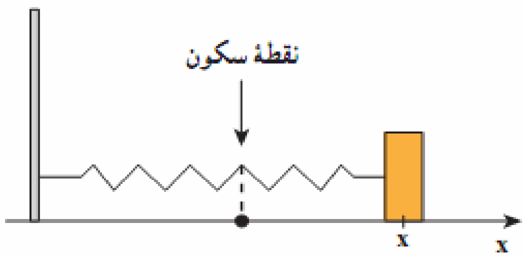
$$y'=\frac{(x^{۲}+۶)-۲x(x)}{(x^{۲}+۶)^{۲}}=\frac{-x^{۲}+۶}{(x^{۲}+۶)^{۲}}$$

$m=f'(۲)=\frac{۱}{۵۰}$ شیب خط مماس

$y=\frac{۱}{۵۰}(x-۲)+\frac{۲}{۱۰}$ معادله ی خط مماس

***

۱۰ : (مثال ص۱۴۴) جسمی که به انتهای فنری متصل است به طور افقی روی سطحی صاف نوسان می کند.(شکل روبرو) معادله ی حرکت این جسم $x(t)=۶\sin t$ است (x بر حسب سانتی متر و t بر حسب ثانیه)



الف) سرعت و شتاب این جسم را در لحظه ی t به دست آورید.

ب) موقعیت ، سرعت و شتاب مورد نظر را در زمان $t=\frac{۲\pi}{۳}$ و جهت حرکت در این زمان چگونه است؟

حل :

معادله ی موقعیت $x(t)=۶\sin t$

معادله ی سرعت $v(t)=x'(t)=۶\cos t$

معادله ی شتاب $a(t)=v'(t)=-۶\sin t$

موقعیت در زمان $t=\frac{۲\pi}{۳}$ $\quad x(\frac{۲\pi}{۳})=۶\sin(\frac{۲\pi}{۳})=۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۳\sqrt{۳}\ cm$

در موقعیت $۳\sqrt{۳}$ سانتی متری از نقطه ی سکون

سرعت در زمان $t=\frac{۲\pi}{۳}$ $\quad v(\frac{۲\pi}{۳})=۶\cos(\frac{۲\pi}{۳})=۶(-\frac{۱}{۲})=-۳\ \frac{cm}{s}$

چون سرعت منفی است، حرکت جسم به سمت چپ است.

شتاب در زمان $t=\frac{۲\pi}{۳}$ $\quad a(\frac{۲\pi}{۳})=-۶\sin(\frac{۲\pi}{۳})=-۶(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=-۳\sqrt{۳}\ \frac{cm}{s^۲}$

چون شتاب منفی است، پس شتاب کند شونده است.

***

۱۱ : توجه (ص۱۴۵) : قاعده ی مشتقگیری از تابع $y=x^n$ که در آن n یک عدد طبیعی می باشد. برای هر عدد حقیقی مانند r نیز قابل تعمیم است. و لذا می توان نوشت:

$$y=x^r \rightarrow y'=r\,x^{r-۱}$$

مثال : مشتق توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f(x)=x^{\frac{۲}{۳}}$ $\qquad$ ب) $f(x)=x^{\sqrt{۲}}$ $\qquad$ ج) $f(x)=x^{\pi}$

حل :

الف) $f'(x)=\frac{۲}{۳}x^{\frac{۲}{۳}-۱}=\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}$ $\qquad$ ب) $f'(x)=\sqrt{۲}x^{\sqrt{۲}-۱}$ $\qquad$ ج) $f'(x)=\pi x^{\pi-۱}$

۱۲ : (مثال ص ۱۴۶) فرض کنید $f(x)=\sqrt[۳]{x^{۲}}$

الف : ضابطه ی تابع مشتق f را به دست آورید.　　　ب : دامنه ی مشتق تابع f را تعیین کنید.

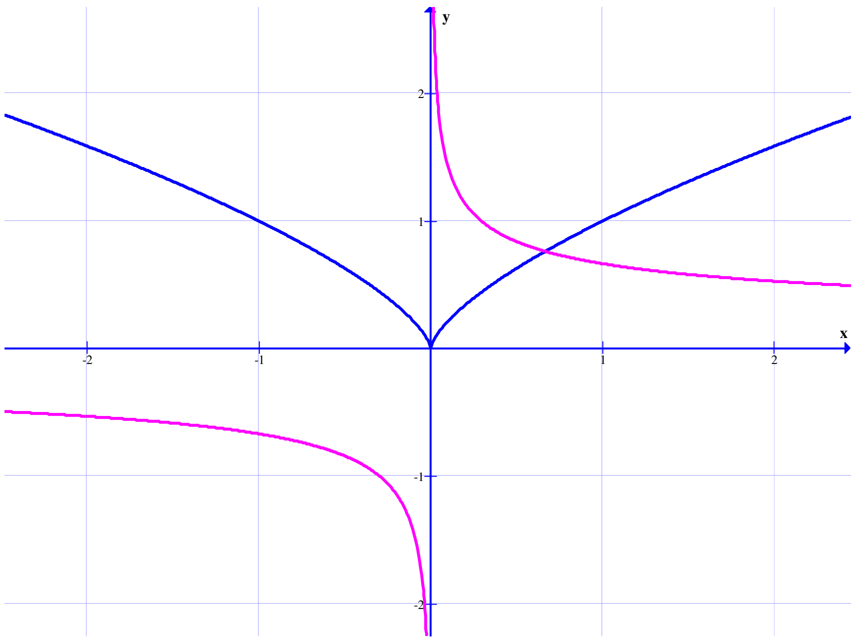
ج : نمودار تابع f و مشتق آن را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

حل :

$$f(x)=x^{\frac{۲}{۳}} \rightarrow f'(x)=\frac{۲}{۳}x^{\frac{۲}{۳}-۱}=\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}=\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

تابع در نقطه ی $x=۰$ مشتق پذیر نیست. پس

$$D_{f'}=D_f-\{۰\}=R-\{۰\}$$



***

۱۳ : (تمرین در کلاس ص ۱۴۷) با فرض اینکه $f(x)=\sqrt[۹]{x^{۲}}$ ، حاصل $\lim\limits_{h\rightarrow ۰}\dfrac{f^{۳}(۱+h)-f^{۳}(۱)}{h}$ را به دست آورید.

حل :

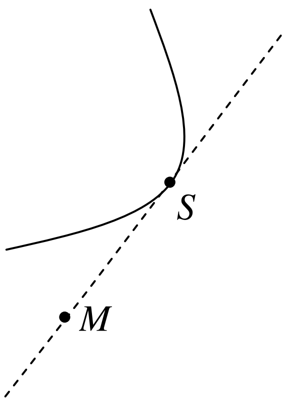
$$f(x)=\sqrt[۹]{x^{۲}} \rightarrow f^{۳}(x)=(\sqrt[۹]{x^{۲}})^{۳} \rightarrow f^{۳}(x)=\sqrt[۳]{x^{۲}}$$

قرار می دهیم. $g(x)=f^{3}(x)=x^{\frac{2}{3}}$ پس $g'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ و حد $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f^{3}(1+h)-f^{3}(1)}{h}$ همـان مـشتق تابع g در نقطه ی $x=1$ است.لذا:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^{3}(1+h)-f^{3}(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=g'(1)=\frac{2}{3\sqrt[3]{1}}=\frac{2}{3}$$

***

۱۴ : تعیین معادله ی خط مماس بر منحنی در نقطه ی خارج آن



برای این کار طول نقطه ی تماس را α فرض کنید و معادله ی خط مماس را بـر حسب α بنویسید.حال چون این خط مماس از نقطه ی M می گذرد،لذا مختصات نقطه ی M را در معادله ی خط مماس قرار داده و مقـدار α را بدسـت آوریـد.بـا تعیین مقدار α معادله ی خط (یا خط های) مماس را می توان نوشت.

تمرین: معادله ی خـط ممـاس بـر منحنـی $y=-x^{2}+3x$ گـذرا از نقطـه ی $M(2,3)$ را بدست آورید.

حل: مختصات نقطه ی $M(2,3)$ در معادله ی تابع صدق نمی کند، لذا این نقطه روی منحنی واقع نیست.

نقطه ی تماس را $S(\alpha,\beta)$ فرض می کنیم.

طول نقطه ی تماس $x=\alpha \xrightarrow{y=-x^{2}+3x} \beta=-\alpha^{2}+3\alpha$

نقطه ی تماس $S(\alpha,-\alpha^{2}+3\alpha)$

حال از تابع مشتق گرفته و شیب خط مماس را در نقطه ی S بدست می آوریم.

$$y'=-2x+3\rightarrow m=-2\alpha+3$$

اکنون معادله ی خط مماس را می نویسیم.

$$y=m(x-a)+b$$
$$\rightarrow y=(-2\alpha+3)(x-\alpha)+\beta$$

$$\to y = -۲\alpha x + ۲\alpha^{۲} + ۳x - ۳\alpha + (-\alpha^{۲} + ۳\alpha)$$
$$\to y = (-۲\alpha + ۳)x + \alpha^{۲}$$

این معادله باید از نقطه ی $M\,(۲,۳)$ بگذرد.

$$۳ = (-۲\alpha + ۳)(۲) + \alpha^{۲}$$
$$\to \alpha^{۲} - ۴\alpha + ۳ = ۰ * \to \alpha = ۱, \alpha = ۳$$

در نهایت معادله ی خط های مماس به شکل زیر در خواهند آمد.

$$\alpha = ۱ \Rightarrow y = x + ۱$$
$$\alpha = ۳ \Rightarrow y = -۳x + ۹$$

توجه: تعداد ریشه های معادله ی * مبین تعداد خط های مماس بر منحنی گذرا از نقطه ی M است.

***

۱۵ : (مثال ص ۱۴۷): معادله ی خط مماس بر منحنی $f(x) = x^{۲} - x$ گذرا از نقطه ی $M\,(۴,۸)$ را بدست آورید.

حل: مختصات نقطه ی $M\,(۴,۸)$ در معادله ی تابع صدق نمی کند، لذا این نقطه روی منحنی واقع نیست.

نقطه ی تماس را $S(\alpha, \beta)$ فرض می کنیم.

$$\text{طول نقطه ی تماس } x = \alpha \xrightarrow{y = x^{۲} - x} \beta = \alpha^{۲} - \alpha$$

$$\text{نقطه ی تماس } S(\alpha, \alpha^{۲} - \alpha)$$

حال از تابع مشتق گرفته و شیب خط مماس را در نقطه ی S بدست می آوریم.

$$y' = ۲x - ۱ \to m = ۲\alpha - ۱$$

اکنون معادله ی خط مماس را می نویسیم.

$$y - b = m(x - a)$$
$$\to y = (۲\alpha - ۱)(x - \alpha) + \beta$$
$$\to y = ۲\alpha x - ۲\alpha^{۲} - x + \alpha + \alpha^{۲} - \alpha$$
$$\to y = (۲\alpha - ۱)x - \alpha^{۲}$$

این معادله باید از نقطه ی $M\,(۴,۸)$ بگذرد.

$$۸ = (۲\alpha - ۱)(۴) + \alpha^{۲}$$
$$\to \alpha^{۲} + ۴\alpha - ۱۲ = ۰ \to (\alpha + ۶)(\alpha - ۲) = ۰ \to \alpha = -۶, \alpha = ۲$$

در نهایت معادله ی خط های مماس به شکل زیر در خواهند آمد.

$\alpha=-۶\Rightarrow y=-۱۳x+۳۶$

$\alpha=۲\Rightarrow y=۳x-۴$

***

۱۶ : (تمرین در کلاس۱ ص ۱۴۸) معادله ی خط مماس و قائم بـر منحنـی $y=\dfrac{\cos x}{۲+\sin x}$ در نقطـه ی $(۰,\frac{۱}{۲})$ را پیـدا کنید.

حل: مختصات نقطه ی $(۰,\frac{۱}{۲})$ در معادله ی تابع صدق می کند، لذا این نقطه روی منحنی واقع است.پس :

$$y=\frac{\cos x}{۲+\sin x}\rightarrow y'=\frac{(-\sin x)(۲+\sin x)-(\cos x)(\cos x)}{(۲+\sin x)^۲}$$

$$=\frac{-۲\sin x-\sin^۲ x-\cos^۲ x}{(۲+\sin x)^۲}=\frac{-۲\sin x-(\sin^۲ x+\cos^۲ x)}{(۲+\sin x)^۲}=\frac{-۲\sin x-۱}{(۲+\sin x)^۲}$$

$$\rightarrow m=\frac{-۲\sin(۰)-۱}{(۲+\sin(۰))^۲}=\frac{-۱}{۴}$$ شیب خط مماس

$$y=m(x-a)+b\rightarrow y=\frac{-۱}{۴}(x-۰)+\frac{۱}{۲}$$ معادله ی خط مماس

$$\rightarrow m'=-\frac{۱}{m}=۴$$ شیب خط قائم

$$y=m'(x-a)+b\rightarrow y=۴(x-۰)+\frac{۱}{۲}$$ معادله ی خط قائم

***

۱۷ : (تمرین در کلاس۲ ص ۱۴۸) از نقطه ی $A(۰,-۱)$ دو خط مماس بر منحنی $f(x)=x^۲+x$ رسم شـده اسـت. معادلات این دو خط مماس را به دست آورید.

حل: مختصات نقطه ی $A(۰,-۱)$ در معادله ی تابع صدق نمی کند، لذا این نقطه روی منحنی واقع نیست.

نقطه ی تماس را $S(\alpha,\beta)$ فرض می کنیم.

طول نقطه ی تماس $x=\alpha\xrightarrow{y=x^۲+x}\beta=\alpha^۲+\alpha$

نقطه ی تماس $S(\alpha,\alpha^۲+\alpha)$

حال از تابع مشتق گرفته و شیب خط مماس را در نقطه ی S بدست می آوریم.

$$y'=2x+1 \to m=2\alpha+1$$

اکنون معادله ی خط مماس را می نویسیم.

$$\begin{aligned}&y-b=m(x-a)\\&\to y=(2\alpha+1)(x-\alpha)+\beta\\&\to y=2\alpha x-2\alpha^2+x-\alpha+\alpha^2+\alpha\\&\to y=(2\alpha+1)x-\alpha^2\end{aligned}$$

این معادله باید از نقطه ی $A(0,-1)$ بگذرد.

$$\begin{aligned}&-1=(2\alpha+1)(0)-\alpha^2\\&\to \alpha^2=1\to \alpha=1,\alpha=-1\end{aligned}$$

در نهایت معادله ی خط های مماس به شکل زیر در خواهند آمد.

$$\begin{aligned}&\alpha=1\Rightarrow y=3x-1\\&\alpha=-1\Rightarrow y=-x-1\end{aligned}$$

***

۱۸ : (تمرین در کلاس۳ ص ۱۴۸) خط $y=2x+1$ در نقطه ی $x=1$ بر منحنی پیوسته‌ی $y=f(x)$ مماس است.

مقدار $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f^2(x)+3f(x)-18}{x-1}$ را حساب کنید.

حل :

نقطه ی $x=1$ نقطه ی مشترک تابع و خط مماس می باشد. پس $f(1)=3$

$m=f'(1)=2$ شیب خط مماس

$$\lim_{x\to 1}\frac{f^2(x)+3f(x)-18}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(f^2(x)-9)+(3f(x)-9)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(f(x)-3)(f(x)+3)+3(f(x)-3)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(f(x)-3)}{x-1}\times(f(x)+3)+\frac{3(f(x)-3)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x\to 1}(f(x)+3)+3\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$= f'(۱) \times \lim_{x \to ۱} (f(۱) + ۳) + ۳f'(۱) = ۲(۳+۳) + ۳(۲) = ۱۲ + ۶ = ۱۸$$

توجه : می توان از قاعده ی هوپیتال نیز استفاده نمود.

$$\lim_{x \to ۱} \frac{f^۲(x) + ۳f(x) - ۱۸}{x - ۱} \overset{\frac{\cdot}{\cdot}}{=} \lim_{x \to ۱} \frac{۲f(x)f'(x) + ۳f'(x)}{۱} = ۲f(۱)f'(۱) + ۳f'(۱)$$
$$= ۲(۳)(۲) + ۳(۲) = ۱۲ + ۶ = ۱۸$$

***

۱۹ : (تمرین در کلاس ص۱۴۹) مشتق چهارم تابع $f(x) = (x^۲ + ۱)(x^۲ + ۲)(x^۲ + ۳)$ را در $x = ۱$ حساب کنید.

حل :

$$f(x) = (x^۲ + ۱)(x^۲ + ۲)(x^۲ + ۳) = (x^۴ + ۳x^۲ + ۲)(x^۲ + ۳) = x^۶ + ۶x^۴ + ۱۱x^۲ + ۶$$

$$f'(x) = ۶x^۵ + ۲۴x^۳ + ۲۲x$$

$$f''(x) = ۳۰x^۴ + ۷۲x^۲ + ۲۲$$

$$f'''(x) = ۱۲۰x^۳ + ۱۴۴x$$

$$f^{(۴)}(x) = ۳۶۰x^۲ + ۱۴۴ \to f^{(۴)}(۱) = ۳۶۰(۱)^۲ + ۱۴۴ = ۵۰۴$$

***

۲۰ : (تمرین در کلاس ص ۱۵۰) فرض کنید $f(x) = |x^۲ - ۴|$

الف : مشتق پذیری تابع f را در $x = ۲$ و $x = -۲$ بررسی کنید.

ب : ضابطه ی تابع مشتق و نمودار آن را رسم کنید.

ج : با تعیین ضابطه ی توابع مشتق مرتبه دوم، سوم و nام را به دست آورید.

حل :

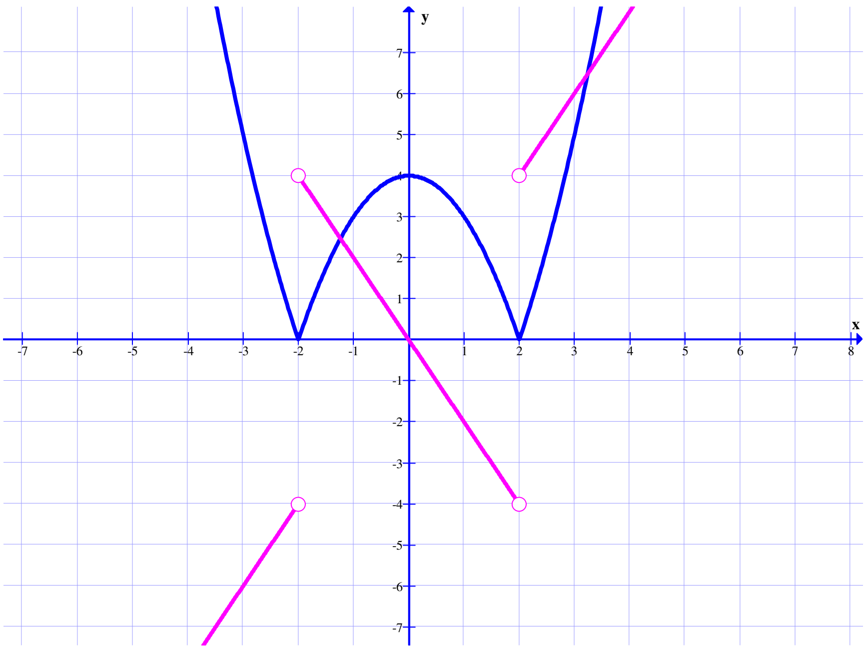
$$f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۴ & x > ۲ \\ -x^۲ + ۴ & -۲ \le x \le ۲ \\ x^۲ - ۴ & x < -۲ \end{cases}$$

x	$x=-۲$	$x=۲$
حد راست	۰	۰
حد چپ	۰	۰
مقدار	۰	۰
مشتق راست	-۴	۴
مشتق چپ	۴	-۴

تابع در نقاط $x=۲$ و $x=-۲$ مشتق پذیر نیست.

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} ۲x & x>۲ \\ -۲x & -۲<x<۲ \\ ۲x & x<-۲ \end{cases}$$

نمودار تابع f و مشتق آن به شکل زیر است.



ضابطه ی مشتقات مراتب بالاتر

$$\Rightarrow f''(x)=\begin{cases} ۲ & x>۲ \\ -۲ & -۲<x<۲ \\ ۲ & x<-۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{(۳)}(x)=۰ \quad x\neq ۲,-۲$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(x)=۰ \quad x\neq ۲,-۲$$

***

۲۱ : (مثال ص ۱۵۱) مشتق چپ و مشتق راست تابع $f(x)=|x-۱|+۲|x-۲|$ در $x=۱$ را در صورت وجود به دست آورید.

حل : ابتدا تابع را به صورت چند ضابطه ای می نویسیم.

$$f(x)=\begin{cases} x-۱+۲(x-۲)=۳x-۵ & x>۲ \\ x-۱-۲(x-۲)=-x+۳ & ۱\le x\le ۲ \\ -x+۱-۲(x-۲)=-۳x+۵ & x<۱ \end{cases}$$

مشتق راست $f'_+(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^+}(-۱)=-۱$

مشتق چپ $f'_-(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^+}(-۳)=-۳$

تابع f در نقطه ی $x=۱$ مشتق پذیر نیست.

***

۲۲ : (تمرین در کلاس ص ۱۵۱) مشتق چپ و مشتق راست تابع f با ضابطه ی $f(x)=x[x^۳+۳]$ در $x=۰$ را در صورت وجود به دست آورید.

حل : تابع در نقطه ی $x=۰$ پیوسته است و $f(۰)=۰$

$$f'_+(۰)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x[x^۳+۳]}{x}=\lim_{x\to ۰^+}[x^۳+۳]=\lim_{x\to ۰^+}[x^۳]+۳=۰+۳=۳$$

$$f'_-(۰)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x[x^۳+۳]}{x}=\lim_{x\to ۰^-}[x^۳+۳]=\lim_{x\to ۰^-}[x^۳]+۳=-۱+۳=۲$$

و چون $f'_+(۰)\neq f'_-(۰)$ پس تابع در $x=۰$ مشتق پذیر نیست.

***

۲۳ : (مسئله ی ۱ ص ۱۵۲) فرض کنید تابع f در $x=۱$ مشتق پذیر و $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(۱+h)}{h}=۳$ ، مقدار های $f(۱)$ و $f'(۱)$ را به دست آورید.

حل :

$$f'(۱)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}\xrightarrow{\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)}{h}=۳} f(۱)=۰\ ,\ \ f'(۱)=۳$$

***

۲۴ : (مسئله ی ۲ ص ۱۵۲) تابع f به شکل زیر تعریف شده است. حاصل $\lim\limits_{h\to ۰^-}\frac{f(۱+h)-۱}{h}$ را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases} x^۳ & |x|\geq ۱ \\ ۲x^۲-۱ & |x|<۱\end{cases}$$

حل :

$$f(x)=\begin{cases} x^۳ & x\geq ۱\ ,\ x\leq -۱ \\ ۲x^۲-۱ & -۱<x<۱\end{cases}$$

$$f(۱)=۱$$

$$\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(۱+h)-۱}{h}=\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}=f'_-(۱)=\lim_{x\to ۱^-}۴x=۴(۱)=۴$$

***

۲۵ : (مسئله ی ۳ ص ۱۵۲) فرض کنید که $f(x)=\sin x[\cos\frac{x}{۲}]$ مشتق چپ و راست تابع f را در نقطه ی $x=\pi$ حساب کنید.

حل :

$$f(\pi)=\sin\pi[\cos\frac{\pi}{۲}]=۰$$

$$f'_-(\pi)=\lim_{x\to \pi^-}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=\lim_{x\to \pi^-}\frac{\sin x[\cos\frac{x}{۲}]}{x-\pi}=\lim_{x\to \pi^-}\frac{(\sin x)(۰)}{x-\pi}=۰$$

$$f'_+(\pi)=\lim_{x\to \pi^+}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=\lim_{x\to \pi^+}\frac{\sin x[\cos\frac{x}{۲}]}{x-\pi}=\lim_{x\to \pi^+}\frac{(\sin x)(-۱)}{x-\pi}$$

$$= \lim_{t \to ۰^+} \frac{-\sin(\pi + t)}{t} = \lim_{t \to ۰^+} \frac{\sin t}{t} = ۱$$

توجه : در حالت $x \to \pi^-$ متغیر x در ربع دوم قرار دارد. لذا $[\cos \frac{\pi}{۲}] = ۰$ همچنین در حالت $x \to \pi^+$ متغیر x در ربع سوم قرار دارد. لذا $[\cos \frac{\pi}{۲}] = -۱$

***

۲۶ : (مسئله ی ۴ الف ص ۱۵۲) ثابت کنید اگر f در a مشتق پذیر باشد، حد زیر موجود و برابر $f'(a)$ است.

$$\lim_{h \to ۰} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{۲h} = f'(a)$$

حل :

$$\lim_{h \to ۰} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{۲h} = \lim_{h \to ۰} \frac{f(a+h) - f(a) - f(a-h) + f(a)}{۲h}$$

$$= \frac{۱}{۲} \lim_{h \to ۰} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{۱}{۲} \lim_{h \to ۰} \frac{f(a-h) - f(a)}{۲h}$$

$$= \frac{۱}{۲} \lim_{h \to ۰} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{۱}{۲}(-۱) \lim_{h \to ۰} \frac{f(a+(-h) - f(a)}{(-h)} = \frac{۱}{۲} f'(a) + \frac{۱}{۲} f'(a) = f'(a)$$

***

۲۶ : (مسئله ی ۴ ب ص ۱۵۲) ثابت کنید که اگر حد در تمرین قبل وجود داشته باشد، لزومی ندارد که تابع در نقطه ی a مشتق پذیر باشد.

حل : قرار می دهیم که $f(x) = |x|$ و $x = ۰$ پس :

$$\lim_{h \to ۰} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{۲h} = \lim_{h \to ۰} \frac{f(۰+h) - f(۰-h)}{۲h} = \lim_{h \to ۰} \frac{f(h) - f(-h)}{۲h}$$

$$= \lim_{h \to ۰} \frac{|h| - |-h|}{۲h} = \lim_{h \to ۰} \frac{|h| - |h|}{۲h} = ۰$$

در حالی که تابع $f(x) = |x|$ در نقطه ی $x = ۰$ مشتق پذیر نیست.

***

۲۷ : (مسئله ی ۶ ص ۱۵۳) فرض کنید $y=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ ، حاصل عبارت $y^2+2y'y(1+x)$ را به دست آورید.

حل :

$$y=\frac{x}{\sqrt{1+x}}\to y'=\frac{(1)(\sqrt{1+x})-\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}\times x}{(\sqrt{1+x})^2}=\frac{\dfrac{2(1+x)-x}{2\sqrt{1+x}}}{1+x}=\frac{2+x}{2(1+x)\sqrt{1+x}}$$

$$y^2+2y'y(1+x)=(\frac{x}{\sqrt{1+x}})^2+2(\frac{2+x}{2(1+x)\sqrt{1+x}})(\frac{x}{\sqrt{1+x}})(1+x)=(\frac{x^2}{1+x})+(\frac{2x+x^2}{1+x})$$

$$=\frac{2x(1+x)}{1+x}=2x$$

***

۲۸ : (مسئله ی ۸ ص ۱۵۳) فرض کنید $f(x)=x^6-2x^4-x+1$ ، حاصل عبارت $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(1+h)-f'(1)}{h}$

را به دست آورید.

حل :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(1+h)-f'(1)}{h}=f''(1)$$

$$f(x)=x^6-2x^4-x+1$$

$$f'(x)=6x^5-8x^3-1$$

$$f''(x)=30x^4-24x^2$$

$$\Rightarrow f''(1)=30(1)^4-24(1)^2=30-24=6$$

***

۲۹ : (مسئله ی ۹ ص ۱۵۴) مشتق تابع $f(x)=\dfrac{x+1}{x}\operatorname{sgn}(x^2-x+1)$ را به دست آورید.

حل :

$$f(x)=\frac{x+1}{x}\operatorname{sgn}(x^2-x+1)$$

ابتدا عبارت $x^{۲}-x+۱$ را تعیین علامت می کنیم.

$x^{۲}-x+۱=۰ \to$ معادله ریشه ندارد.

و چون $\Delta=(-۱)^{۲}-۴(۱)(۱)=-۳<۰$ و $a=۱>۰$ لذا این عبارت همواره مثبت است. پس :

$$\operatorname{sgn}(x^{۲}-x+۱)=۱$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x+۱}{x}(۱)=\frac{x+۱}{x}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{(۱)(x)-(۱)(x+۱)}{x^{۲}}=\frac{-۱}{x^{۲}}$$

***

۳۰ : (تمرین برای حل) مشتق تابع زیر را به دست آورید.

$$f(x)=\frac{x+۱}{x}\operatorname{sgn}(-x^{۲}+x-۱)$$

***

۳۱ : (مسئله ی ۱۰ ص ۱۵۴) ضابطه ی تابع درجه ی دوم f را چنان انتخاب کنید که $f(۱)=۲$ و $f'(۱)=۳$ و $f''(۱)=۴$ باشد.

حل : قرار می دهیم. $f(x)=ax^{۲}+bx+c$

$$f(x)=ax^{۲}+bx+c \xrightarrow{f(۱)=۲} a+b+c=۲$$

$$f'(x)=۲ax+b \xrightarrow{f'(۱)=۳} ۲a+b=۳$$

$$f''(x)=۲a \xrightarrow{f''(۱)=۴} ۲a=۴$$

$$۲a=۴ \to a=۲ \xrightarrow{۲a+b=۳} ۴+b=۳ \to b=-۱ \xrightarrow{a+b+c=۲} ۲-۱+c=۲ \to c=۱$$

$$\therefore\ f(x)=۲x^{۲}-x+۱$$

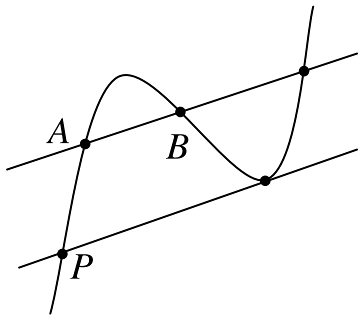
***

۳۲ : (مسئله ی ۱۱ ص ۱۵۴) نقطه ای روی نمودار تابع $y = x^۲ + x$ پیدا کنید که در آن نقطه، خط مماس بر منحنی تابع، موازی قاطعی باشد که دو نقطه با طولهای $x = ۱$ و $x = ۳$ واقع بر منحنی تابع را به هم وصل کند.

حل : فرض کنیم که نقطه ی مورد نظر $P(\alpha, \beta)$ باشد. چون این نقطه روی منحنی نمودار تابع قرار دارد، پس :

$m = f'(\alpha) \xrightarrow{f'(x)=۲x+۱} m = ۲\alpha + ۱$ شیب خط مماس

از طرفی شیب خط گذرا از نقاط B و A را می توان محاسبه نمود.



$$A\Big|_{(۱)^۲+۱}^{۱} \to A\Big|_{۲}^{۱}$$

$$B\Big|_{(۳)^۲+۳}^{۳} \to B\Big|_{۱۲}^{۳}$$

$$m_{AB} = \frac{۱۲-۲}{۳-۱} = \frac{۱۰}{۲} = ۵$$

طبق مسئله خط مماس گذرا از نقطه ی P با خط گذرا از نقاط B و A موازیند. پس :

$$m_{AB} = f'(\alpha) \to ۵ = ۲\alpha + ۱ \to \alpha = ۲$$

$$\therefore\ P\Big|_{(۲)^۲+۲}^{۲} \to P\Big|_{۶}^{۲}$$

***

۳۳ : (مسئله ی ۱۲ ص ۱۵۴) معادله ی خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \dfrac{۱+۲\sin x}{\sin x}$ را در نقطه ی $(\frac{\pi}{۶}, ۴)$ به دست آورید.

حل :

$$f(\frac{\pi}{۶}) = \frac{۱+۲\sin(\frac{\pi}{۶})}{\sin(\frac{\pi}{۶})} = \frac{۱+۲(\frac{۱}{۲})}{(\frac{۱}{۲})} = \frac{۱+۱}{\frac{۱}{۲}} = ۴ \to$$ نقطه ی $(\frac{\pi}{۶}, ۴)$ روی منحنی نمودار f قرار دارد.

$$f'(x) = \frac{(۲\cos x)(\sin x) - (\cos x)(۱+۲\sin x)}{(\sin x)^۲} = \frac{-\cos x}{\sin^۲ x}$$

شیب خط مماس $m=f'(\frac{\pi}{۶})=\dfrac{-\cos(\frac{\pi}{۶})}{\sin^{۲}(\frac{\pi}{۶})}=\dfrac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{۴}}=-۲\sqrt{۳}$

معادله ی خط مماس $y=m(x-a)+b \to y=-۲\sqrt{۳}(x-\frac{\pi}{۶})+۴$

***

۳۴ : (تمرین ۱۴ ص ۱۵۴) با استقرای ریاضی احکام زیر را ثابت کنید.

الف : مشتق مرتبه ی nام تابع $f(x)=\sin x$ برابر $f^{(n)}=\sin(x+\frac{n\pi}{۲})$ است.

ب : مشتق مرتبه ی nام تابع $f(x)=\cos x$ برابر $f^{(n)}=\cos(x+\frac{n\pi}{۲})$ است.

حل الف :

$P(۱)$ درست است. $f(x)=\sin x \to f'(x)=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{۲})$

فرض استقرا $f(x)=\sin x \to f^{(k)}=\sin(x+\frac{k\pi}{۲})$

حکم استقرا $f(x)=\sin x \to f^{(k+۱)}=\sin(x+\frac{(k+۱)\pi}{۲})$

طرف چپ حکم

$$f^{(k+۱)}=(f^{(k)})'=(۱)\cos(x+\frac{k\pi}{۲})=\sin(\frac{\pi}{۲}+(x+\frac{k\pi}{۲}))=\sin(x+\frac{(k+۱)\pi}{۲})$$

حل ب :

$P(۱)$ درست است. $f(x)=\cos x \to f'(x)=-\sin x=\cos(x+\frac{\pi}{۲})$

فرض استقرا $f(x)=\cos x \to f^{(k)}=\cos(x+\frac{k\pi}{۲})$

حکم استقرا $f(x)=\cos x \to f^{(k+۱)}=\cos(x+\frac{(k+۱)\pi}{۲})$

طرف چپ حکم

$$f^{(k+1)}=(f^{(k)})'=-(1)\sin(x+\frac{k\pi}{2})=\cos(\frac{\pi}{2}+(x+\frac{k\pi}{2}))=\cos(x+\frac{(k+1)\pi}{2})$$

***

تمرین برای حل : با استقرای ریاضی احکام زیر را ثابت کنید.

الف : مشتق مرتبه ی nام تابع $f(x)=e^{ax}$ برابر $f^{(n)}=a^n e^{ax}$ است.

ب : مشتق مرتبه ی nام تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ برابر $f^{(n)}=\frac{(-1)^n(n!)}{x^{n+1}}$ است.

***

۳۵ : (مثال ص ۱۵۹) معادله ی خط مماس بر منحنی $x^2+y^2=4$ را در نقطه ی $(1,\sqrt{3})$ بیابید.

حل : نقطه ی $(1,\sqrt{3})$ در معادله ی $x^2+y^2=4$ صدق می کند. پس این نقطه روی منحنی قرار دارد.

$$x^2+y^2=4 \rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

شیب خط مماس $m=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

معادله ی خط مماس $y=m(x-a)+b \rightarrow y=-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)+\sqrt{3}$

***

۳۶ : (تمرین در کلاس الف ص ۱۶۰) اگر $\cos\sqrt{y}=y^2\sin x$ ، $\frac{dy}{dx}$ را پیدا کنید.

حل : مشتق گیری از یک تابع ضمنی

$$\cos\sqrt{y}-y^2\sin x=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{-y^2\cos x}{-\frac{1}{2\sqrt{y}}\sin\sqrt{y}-2y\sin x}=-\frac{2y^2\sqrt{y}\cos x}{\sin\sqrt{y}-4y\sqrt{y}\sin x}$$

***

۳۷ : (تمرین در کلاس ب ص ۱۶۰) اگر $x+y^{۴}+۱=y+x^{۲}+xy^{۲}$ ، $\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}$ را در نقطه ی $(۱,۱)$ پیدا کنید.

حل : مشتق مرتبه ی دوم تابع ضمنی داده شده، مد نظر است.

$$x+y^{۴}+۱-y-x^{۲}-xy^{۲}=۰$$

$$۱+۴y^{۳}y'-y'-۲x-y^{۲}-۲xyy'=۰\xrightarrow{x=۱,\,y=۱}۱+۴y'-y'-۲-۱-۲y'=۰\to y'=۲$$

$$۱۲y^{۲}y'y'+۴y^{۳}y''-y''-۲-۲yy'-۲yy'-۲xy'y'-۲xyy''=۰$$

$$\xrightarrow{x=y=۱,\,y'y=۲}۴۸+۴y''-y''-۲-۴-۴-۸-۲y''=۰\to y''=-۳۰$$

***

۳۸ : (تمرین در کلاس پ ص ۱۶۰) معادله ی خط مماس بر منحنی $x^{۳}+y^{۳}=۶xy$ را در نقطه ی $(\frac{۴}{۳},\frac{۸}{۳})$ بیابید.

حل : نقطه ی $(\frac{۴}{۳},\frac{۸}{۳})$ در معادله ی $x^{۳}+y^{۳}=۶xy$ صدق می کند.

$$(\frac{۴}{۳})^{۳}+(\frac{۸}{۳})^{۳}=۶(\frac{۴}{۳})(\frac{۸}{۳})\to\frac{۶۴}{۲۷}+\frac{۵۱۲}{۲۷}=\frac{۶۴}{۳}\to\frac{۵۷۶}{۲۷}=\frac{۶۴}{۳}\to\frac{۶۴}{۳}=\frac{۶۴}{۳}$$

پس این نقطه روی نمودار تابع قرار دارد.

$$x^{۳}+y^{۳}=۶xy\to۳x^{۲}+۳y^{۲}y'=۶y+۶xy'\xrightarrow{x=\frac{۴}{۳},\,y=\frac{۸}{۳}}\frac{۱۶}{۳}+\frac{۶۴}{۳}y'=\frac{۴۸}{۳}+\frac{۲۴}{۳}y'$$

$\to\frac{۴۰}{۳}y'=\frac{۳۲}{۳}\to y'=\frac{۳۲}{۴۰}=\frac{۴}{۵}$ شیب خط مماس

$y=m(x-a)+b\to y=\frac{۴}{۵}(x-\frac{۴}{۳})+\frac{۸}{۳}$ معادله ی خط مماس

***

۳۹ : (تمرین در کلاس ۲ ص ۱۶۵) مشتق تابع $y=x^{\sqrt{x}}$ را به دست آورید.

حل :

$$y = x^{\sqrt{x}} \to L_n y = L_n x^{\sqrt{x}} \to L_n y = (\sqrt{x})(L_n x) \to \frac{y'}{y} = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}(L_n x) + (\sqrt{x})(\frac{۱}{x})$$

$$\to y' = y(\frac{L_n x}{۲\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x}) = (\sqrt{x})(\frac{L_n x}{۲\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x}) = \frac{۱}{۲}(L_n x) + ۱$$

***

۴۰ : (ص ۱۶۵) بحث در کلاس به نظر شما مشتق تابع با ضابطه ی $f(x) = L_n(L_n \sin x)$ وجود دارد؟

حل : دامنه ی چنین تابعی تهی است (چرا؟). لذا چنین تابعی وجود ندارد. لذا در مورد مشتق آن نمی توان بحث کرد.

***

تمرین برای حل :

۱ : به نظر شما مشتق کدام یک از تابع های زیر وجود دارد؟چرا؟

الف) $f(x) = L_n(\text{sgn}(x^۲ - ۱))$ ب) $f(x) = L_n(L_n(\text{sgn}(x^۲ - ۱)))$

۲ : نشان دهید که تابع $y = \sin x$ جواب معادله ی دیفرانسیل $y''' + y'' + y' + y = ۰$ است.

۲ : نشان دهید که تابع $y = y = e^{۲x}$ جواب معادله ی دیفرانسیل $۶y - y'' - y' = ۰$ است.

***

حل تمارین مهم

در این قسمت تمرین های مهم کتاب در قسمت مشتق را بررسی و حل می کنیم.

۴۱: (مسئله ی ۱ ص ۱۶۶) مشتق توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f(x)=\sqrt[4]{\dfrac{x}{x^2+1}}$

ب) $f(x)=\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}$

پ) $f(x)=\sin(\cos x)$

ت) $f(x)=\sin\sqrt[3]{x}$

ث) $f(x)=\sqrt{\tan x+\cot x}$

حل :

الف) $f'(x)=\dfrac{\dfrac{(1)(x^2+1)-(2x)(x)}{(x^2+1)^2}}{4\sqrt[4]{(\dfrac{x}{x^2+1})^3}}=\dfrac{1-x^2}{4(x^2+1)^2\sqrt[4]{(\dfrac{x}{x^2+1})^3}}$

ب) $f'(x)=\dfrac{2(2x+1)}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)}}$

پ) $f'(x)=(-\sin x)\cos(\cos x)$

ت) $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\cos\sqrt[3]{x}$

ث) $f'(x)=\dfrac{(1+\tan^2 x)-(1+\cot^2 x)}{2\sqrt{\tan x+\cot x}}=\dfrac{\tan^2 x-\cot^2 x}{2\sqrt{\tan x+\cot x}}$

***

۴۲: (مسئله ی ۲ ص ۱۶۶) نقاطی از منحنی $y=\tan 2x$ را تعیین کنید که در آنها مماس بر منحنی با خط $y=4x$ موازی باشد. $(-\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{4})$

حل :

$$y' = ۲(۱ + \tan^{۲} ۲x)$$

$m = ۲(۱ + \tan^{۲} ۲\alpha)$ شیب خط مماس در نقطه ی $x = \alpha$ از روی منحنی

$m = ۴$ شیب خط مماس موازی با خط $y = ۴x$

$$\Rightarrow ۲(۱ + \tan^{۲} ۲\alpha) = ۴ \rightarrow ۱ + \tan^{۲} ۲\alpha = ۲ \rightarrow \tan^{۲} ۲\alpha = ۱$$

$$\rightarrow \tan^{۲} ۲\alpha = ۱ \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} \tan ۲\alpha = ۱ \rightarrow ۲\alpha = \frac{\pi}{۴} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{۸} \\ \tan ۲\alpha = -۱ \rightarrow ۲\alpha = -\frac{\pi}{۴} \rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{۸} \end{array} \right.$$

***

۴۳: (مسئله ی ۳ ص ۱۶۶) ثابت کنید که :

الف : اگر تابع f زوج و مشتق پذیر باشد، آنگاه تابع مشتقش فرد است.

ب : اگر تابع f فرد و مشتق پذیر باشد، آنگاه تابع مشتقش زوج است.

حل : چون دامنه ی تابع f متقارن است. لذا به جهت مشتق پذیر بودن f، دامنه ی تابع f' نیز متقارن می باشد.

از طرفی:

$$\text{زوج } f \rightarrow f(-x) = f(x) \xrightarrow{\text{مشتق}} -f'(-x) = f'(x) \rightarrow f'(-x) = -f'(x) \rightarrow \text{ فرد } f'$$

$$\text{فرد } f \rightarrow f(-x) = -f(x) \xrightarrow{\text{مشتق}} -f'(-x) = -f'(x) \rightarrow f'(-x) = f'(x) \rightarrow \text{ زوج } f'$$

***

۴۴ : (مسئله ی ۴ ص ۱۶۷) با فرض اینکه تابع f زوج و تابع g فرد و $f'(۱) = ۲$ و $g'(۱) = ۳$ ، مقدار $(f + g)'(-۱)$ را حساب کنید.

حل : چون تابع f زوج و تابع g فرد، پس تابع f' فرد و تابع g' زوج می باشند.

$$(f + g)'(-۱) = f'(-۱) + g'(-۱) = -f'(۱) + g'(۱) = -۲ + ۳ = ۱$$

***

۴۵ : (مسئله ی ۵ ص ۱۶۷) با فرض اینکه تابع $f : R \to R$ در R مشتق پذیر از مرتبه ی دوم باشد و به ازای هر عدد حقیقی x ، $g(x) = f(۲ - x^۲)$ و $f'(۲) = ۲$. مقدار $g''(۰)$ را حساب کنید.

حل :

$$g'(x) = -۲x.f'(۲ - x^۲) \to g''(x) = -۲f'(۲ - x^۲) + ۴x^۲ f''(۲ - x^۲)$$

$$g''(۰) = -۲f'(۲ - (۰)^۲) + ۴(۰)^۲ f''(۲ - (۰)^۲) = -۲f'(۲) = -۲ \times ۲ = -۴$$

***

۴۶ : (مسئله ی ۶ ص ۱۶۷) اگر f تابعی چند جمله ای از درجه ی n و تابع fof' از درجه ی ۱۲ باشد، مقدار $n^۲ + ۴n$ را حساب کنید.

حل : اگر f تابعی چند جمله ای از درجه ی n باشد، آنگاه f' از درجه ی $(n-۱)$ است. پس تابع fof' از درجه ی $n(n-۱)$ است. در نتیجه :

$$n(n-۱) = ۱۲ \to n = ۴$$

$$\Rightarrow n^۲ + ۴n = (۴)^۲ + ۴(۴) = ۱۶ + ۱۶ = ۳۲$$

***

۴۷ : (مسئله ی ۷ ص ۱۶۷) اگر $\lim_{h \to ۰} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{۱}{\sqrt{۱ + x^۲}}$ ، آنگاه مشتق تابع با ضابطه‌ی $y = f(\cot x)$ را با شرط $-\frac{\pi}{۲} < x < ۰$ حساب کنید.

حل :

$$\lim_{h \to ۰} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{۱}{\sqrt{۱ + x^۲}} \to f'(x) = \frac{۱}{\sqrt{۱ + x^۲}}$$

$$y = f(\cot x) \to y' = -(۱ + \cot^۲ x) f'(\cot x)$$

$$= -(۱ + \cot^۲ x)\frac{۱}{\sqrt{۱ + (\cot x)^۲}} = -\frac{۱}{\sin^۲ x} \times \sqrt{\sin^۲ x} = -\frac{۱}{\sin^۲ x} \times |\sin x| = \frac{-\sin x}{\sin^۲ x} = \frac{۱}{\sin x}$$

توجه : در بازه ی $-\frac{\pi}{۲}<x<۰$ (ربع چهارم) مقدار $\sin x$ منفی است. پس $|\sin x|=-\sin x$

***

۴۸ : (مسئله ی ۸ ص ۱۶۷) معادله ی خط مماس بر منحنی $y=\sin(x^{\circ})$ در نقطه ای به طول $x=۴۵^{\circ}$ را بـه دسـت آورید.

حل : متغیر x با واحد درجه بیان شده است. آن را به رادیان تبدیل می کنیم.

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\rightarrow x^{\circ}=\frac{\pi}{۱۸۰}x \quad rad$$

$$y=\sin(x^{\circ})=\sin(\frac{\pi}{۱۸۰}x)\rightarrow y'=\frac{\pi}{۱۸۰}\cos(\frac{\pi}{۱۸۰}x)=\frac{\pi}{۱۸۰}\cos(x^{\circ})=\frac{\pi}{۱۸۰}\cos(۴۵^{\circ})=\frac{\pi}{۱۸۰}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$m=\frac{\pi}{۱۸۰}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ شیب خط مماس

$A(\frac{\pi}{۴},\frac{\sqrt{۲}}{۲})\rightarrow y=\frac{\pi}{۱۸۰}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}(x-\frac{\pi}{۴})$ معادله ی خط مماس

***

۴۹ : (مسئله ی ۹ ص۱۶۷) با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید، برای هر عدد صـحیح مثبـت n ، تـساوی هـای زیـر برقرارند.

الف) $\frac{d^n}{dx^n}\sin(ax)=a^n\sin(ax+\frac{n\pi}{۲})$

ب) $\frac{d^n}{dx^n}\cos(ax)=a^n\cos(ax+\frac{n\pi}{۲})$

حل : الف

$\frac{d}{dx}\sin(ax)=a\cos(ax)=a\sin(ax+\frac{\pi}{۲})$ $\quad P(۱)$ درست است.

$\frac{d^k}{dx^k}\sin(ax)=a^k\sin(ax+\frac{k\pi}{۲})$ فرض استقرا

$\frac{d^{k+۱}}{dx^{k+۱}}\sin(ax)=a^{k+۱}\sin(ax+\frac{(k+۱)\pi}{۲})$ حکم استقرا

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\sin(ax)=\frac{d}{dx}(\frac{d^k}{dx^k}\sin(ax))=\frac{d}{dx}(a^k\sin(ax+\frac{k\pi}{2}))$$
$$=a^k.a\cos(ax+\frac{k\pi}{2})=a^{k+1}\sin(\frac{\pi}{2}+ax+\frac{k\pi}{2})=a^{k+1}\sin(ax+\frac{(k+1)\pi}{2})$$

حل : ب

$P(1)$ درست است. $\frac{d}{dx}\cos(ax)=a\sin(ax)=a\cos(ax+\frac{\pi}{2})$

فرض استقرا $\frac{d^k}{dx^k}\cos(ax)=a^k\cos(ax+\frac{k\pi}{2})$

حکم استقرا $\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\cos(ax)=a^{k+1}\cos(ax+\frac{(k+1)\pi}{2})$

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\cos(ax)=\frac{d}{dx}(\frac{d^k}{dx^k}\cos(ax))=\frac{d}{dx}(a^k\cos(ax+\frac{k\pi}{2}))$$
$$=-a^k.a\sin(ax+\frac{k\pi}{2})=a^{k+1}\cos(\frac{\pi}{2}+ax+\frac{k\pi}{2})=a^{k+1}\cos(ax+\frac{(k+1)\pi}{2})$$

***

۵۰ : (مسئله ی ۱۲ ص۱۶۷) معادله ی خط مماس بر نمودار $x^3+y^3=3xy$ در نقطه ی $A(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$ را بیابید و نـشان دهید خط قائم بر منحنی در نقطه ی A از مبدأ مختصات می گذرد.

حل :

$$x^3+y^3=3xy\xrightarrow{x=y=\frac{3}{2}}\frac{27}{8}+\frac{27}{8}=3(\frac{3}{2})(\frac{3}{2})\rightarrow\frac{54}{8}=\frac{27}{4}\rightarrow\frac{27}{4}=\frac{27}{4}$$

نقطه ی $A(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$ روی منحنی قرار دارد.

$$x^3+y^3=3xy\rightarrow x^3+y^3-3xy=0\rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{3x^2-3y}{3y^2-3x}$$

شیب خط مماس $m=\frac{dy}{dx}|_{(\frac{۳}{۲},\frac{۳}{۲})}=-\frac{۳(\frac{۳}{۲})^۲-۳(\frac{۳}{۲})}{۳(\frac{۳}{۲})^۲-۳(\frac{۳}{۲})}=-۱$

معادله ی خط مماس $y=-۱(x-\frac{۳}{۲})+\frac{۳}{۲}$

شیب خط قائم $m'=-\frac{۱}{m}=۱$

معادله ی خط قائم $y=(x-\frac{۳}{۲})+\frac{۳}{۲}\rightarrow y=x$

واضح است که خط قائم از مبدأ مختصات می گذرد.

***

۵۱ : (مسئله ی ۱۳ ص۱۶۷) خط $y=ax+b$ نمودار $x^۲+y^۲-xy-۱=۰$ را در نقاط M و N قطع می کنـد. a و b را چنان حساب کنید که مماس در نقاط M و N خط عمود بر محور x ها باشد.

حل :

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{۲x-y}{۲y-x}$$

چون خط مماس عمود بر محور x ها است. پس شیب نامعین دارد. یعنی $۲y-x=۰$ پس $۲y=x$

حال در معادله ی تابع قرار می دهیم: $۲y=x$

$$(۲y)^۲+y^۲-(۲y)y-۱=۰\rightarrow ۳y^۲=۱\rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\rightarrow M(\frac{۲\sqrt{۳}}{۳},\frac{\sqrt{۳}}{۳}) \qquad , \qquad N(-\frac{۲\sqrt{۳}}{۳},-\frac{\sqrt{۳}}{۳})$$

نقاط نقاط M و N روی خط $d:\ \ y=ax+b$ قرار دارند. پس :

$$M\in d\rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}a+b \qquad و \qquad N\in d\rightarrow-\frac{\sqrt{۳}}{۳}=-\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}a+b$$

در نهایت از حل دستگاه خواهیم داشت. $a=\frac{۱}{۲}$ و $b=۰$

۵۲ : (مسئله ی ۱۵ ص۱۶۸) معادله ی خط مماس بر منحنی $y=\frac{L_n x}{x}$ را در نقطه ی (۱,۰) پیدا کنید.

حل :

$$y=\frac{L_n x}{x}\xrightarrow{(۱,۰)}\frac{L_n ۱}{۱}=۰$$ نقطه ی (۱,۰) روی منحنی قرار دارد.

$$y=\frac{L_n x}{x}\rightarrow y'=\frac{(\frac{۱}{x})(x)-(۱)(L_n x)}{x^۲}=\frac{۱-L_n x}{x^۲}$$

شیب خط مماس $m=\frac{۱-L_n(۱)}{(۱)^۲}=\frac{۱-۰}{۱}=۱$

معادله ی خط مماس $y=m(x-a)+b\rightarrow y=(۱)(x-۱)+۰\rightarrow y=x-۱$

***

۵۳ : (مسئله ی ۱۶ ص۱۶۸) مشتق دوم تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(۱+\frac{x}{n})^n$ ، (به ازای هر عدد حقیقی x)

را حساب کنید.

حل :

$$f(x)=\lim_{x\to+\infty}(۱+\frac{x}{n})^n\xrightarrow{\lim\limits_{x\to+\infty}(۱+\frac{x}{n})^n=e^x}f(x)=e^x$$

$$f'(x)=f''(x)=e^x$$

توجه :

$$f(x)=e^x\rightarrow f^{(n)}(x)=e^x$$

***

۵۴ : (مسئله ی ۱۷ ص۱۶۸) در چه نقاطی نمودار تابع $f(x)=x^۲e^{-x^۲}$ دارای مماس افقی است؟

حل : یعنی شیب خط مماس برابر صفر باشد.

$$f'(x)=۲xe^{-x^۲}-۲x(e^{-x^۲})(x^۲)=۲xe^{-x^۲}(۱-x^۲)\xrightarrow{f'(x)=۰}۲xe^{-x^۲}(۱-x^۲)=۰$$

$$۲xe^{-x^{۲}}(۱-x^{۲})=۰\rightarrow\begin{cases}x=۰\\ ۱-x^{۲}=۰\rightarrow x=\pm۱\end{cases}$$

***

۵۵ : (مسئله ی ۱۹ ص۱۶۸) (مدلسازی یک بیماری همه گیر) تعداد y افرادی که به یک ویروس بسیار مسری مبتلا شده اند به وسیله ی منحنی تدارکاتی $y=\dfrac{L}{۱+Me^{-kt}}$ مدلسازی شده است. (t از لحظه ی بروز بیماری ، بر حسب ماه اندازه گیری می شود.)

در ابتدا تعداد مبتلایان ۲۰۰ نفر بود و یک ماه بعد، این تعداد به ۱۰۰۰ نفر افزایش یافت. سرانجام تعداد مبتلایان در عدد ۱۰۰۰۰ ثابت ماند. پارامتر های L و M و K را تعیین کنید و مشخص کنید تعداد مبتلایان ۳ ماه بعد از بروز بیماری چند نفر هستند و آهنگ رشد در آن لحظه چقدر بوده است؟

حل :

$$y=\frac{L}{۱+Me^{-kt}}\xrightarrow{t=۰\ ,\ \ y=۲۰۰}۲۰۰=\frac{L}{۱+M}$$

$$y=\frac{L}{۱+Me^{-kt}}\xrightarrow{t=۱\ ,\ \ y=۱۰۰۰}۱۰۰۰=\frac{L}{۱+Me^{-k}}$$

$$y=\frac{L}{۱+Me^{-kt}}\xrightarrow{t\rightarrow+\infty\ ,\ \ y=۱۰۰۰۰\rightarrow e^{-kt}\rightarrow۰}۱۰۰۰۰=\frac{L}{۱+M(۰)}\rightarrow L=۱۰۰۰۰$$

از طرفی داشتیم : $۲۰۰=\dfrac{L}{۱+M}$ پس :

$$۲۰۰=\frac{L}{۱+M}\rightarrow ۲۰۰=\frac{۱۰۰۰۰}{۱+M}\rightarrow M=۴۹$$

همچنین $۱۰۰۰=\dfrac{L}{۱+Me^{-k}}$ پس :

$$۱۰۰۰۰=\frac{L}{۱+Me^{-k}}\rightarrow ۱۰۰۰=\frac{۱۰۰۰۰}{۱+(۴۹)e^{-k}}\rightarrow ۱+۴۹e^{-k}=۱۰$$

$$\rightarrow e^{-k}=\frac{۹}{۴۹}\rightarrow e^{k}=\frac{۴۹}{۹}\rightarrow k=L_n(\frac{۴۹}{۹})$$

$$y=\frac{L}{۱+Me^{-kt}}\xrightarrow{t=۳}y=\frac{۱۰۰۰۰}{۱+۴۹(\frac{۹}{۴۹})^{۳}}\approx ۷۶۷۱$$ نفر

$$y=\frac{L}{۱+Me^{-kt}}\rightarrow y'=\frac{(۰)(۱+Me^{-kt})-(-kMe^{-kt})(L)}{(۱+Me^{-kt})^{۲}}=\frac{kLMe^{-kt}}{(۱+Me^{-kt})^{۲}}$$ آهنگ رشد

$$y'=\frac{kLMe^{-kt}}{(۱+Me^{-kt})^{۲}}\Bigg|_{t=۳}=\frac{(L_n(\frac{۴۹}{۹}))(۱۰۰۰۰)(۴۹)(\frac{۹}{۴۹})^{۳}}{(۱+(۴۹)(\frac{۹}{۴۹})^{۳})^{۲}}$$

***

۵۶ : (مثال ص ۱۹۵) بالنی را از هوا پر می کنیم، به طوری که حجم آن ۸۰ سانتی متر مکعب بر ثانیه افـزایش مـی یابـد. وقتی شعاع بالن ۲۰ سانتی متر است، شعاع بالن با چه آهنگی افزایش می یابد؟

حل:

$$v(t)=\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}(t)\rightarrow v'(t)=۴\pi r'(t)r^{۲}(t)\rightarrow ۸۰=۴\pi r'(t)(۲۰)^{۲}$$

$$\rightarrow r'(t)=\frac{۸۰}{(۴\pi)(۴۰۰)}=\frac{۱}{۲۰\pi}\ \frac{cm}{s}$$

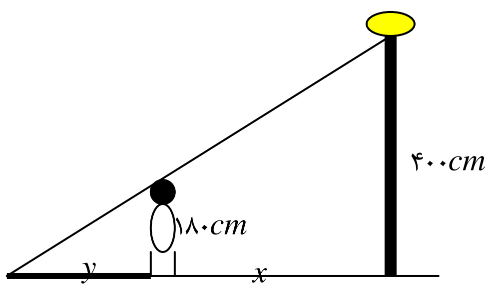
***

۵۷ : (تمرین در کلاس ص ۱۹۶) مردی که قدش۱۸۰ سانتی متر است با سرعت ۰/۴ متر بر ثانیه روی زمین مـسطحی بـه سمت تیر چراغ بالنی برق قدم می زند. اگر لامپ چراغ برق از زمین۴ متر ارتفاع داشته باشد، طول سایه ی مرد وقتی که در فاصله ی ۲/۴ متری تیر چراغ برق قرار دارد با چه سرعتی کاهش می یابد؟ در این زمـان سـایه ی سـر او بـا چـه سـرعتی حرکت می کند؟

حل: (با نزدیک شدن شخص به تیر چراغ برق، کاهش x می یابـد.

در نتیجه $x'(t)$ منفی است. یعنی $x'(t)=-۴۰\frac{cm}{s}$

$y=$ طول سایه ی مرد



$$\frac{y}{y+x}=\frac{۱۸۰}{۴۰۰}\to\frac{y}{y+x}=\frac{۹}{۲۰}\to ۲۰y=۹y+۹x\to ۱۱y=۹x$$

$$۱۱y(t)=۹x(t)\to ۱۱y'(t)=۹x'(t)$$

$$\xrightarrow{x'(t)=-۴۰\frac{cm}{s}} ۱۱y'(t)=۹(-۴۰)\to y'(t)=\frac{-۳۶۰}{۱۱}\approx -۳۲/۷\frac{cm}{s}$$

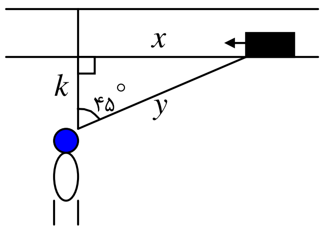
توجه کنید که با نزدیک شدن شخص به تیر چراغ برق، طول سایه ی او کاهش می یابد. به همـین دلیـل علامـت $y'(t)$ منفی است.

***

۵۸ : (مثال ص ۱۹۷) (دوربین راداری) پلیس راهنمایی در نزدیک بزرگراهی ایستاده اسـت و از یـک دوربـین راداری بـرای ثبت سرعت های غیر مجاز استفاده می کند. پلیس دوربین را به سمت اتومبیلی نشانه می رود که در همین لحظه از جلـوی او می گذرد. وقتی راستای دوربین با راستای بزرگراه زاویه ی ۴۵ درجه می سـازد، ملاحظـه مـی کنـد کـه فاصـله ی بـین اتومبیل و دوربین با آهنگ ۹۰ کیلومتر در ساعت افزایش می یابد. حساب کنید که اتومبیل با چه سرعتی در حرکت است؟

حل: فاصله ی دوربین تا کنار بزرگراه ثابت می باشد.

مثلث قائم الزاویه و متساوی الساقین است. پس :



$$\sin ۴۵=\frac{k}{y}\to\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{k}{y}\to y=k\sqrt{۲}$$

$$x=k$$

همچنین طبق رابطه ی فیثاغورس می توان نوشت:

$$x^۲(t)+k^۲(t)=y^۲(t)$$

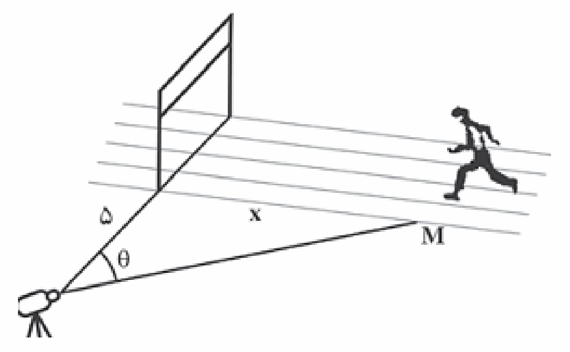
$$\to ۲x(t)x'(t)+۰=۲y(t)y'(t)\to x(t)x'(t)=y(t)y'(t)$$

$$\to k\,x'(t)=k(\sqrt{۲})(۹۰)\to x'(t)=\frac{k(\sqrt{۲})(۹۰)}{k}=۹۰\sqrt{۲}\approx ۱۲۷\frac{km}{h}$$

***

۵۹ : (تمرین در کلاس ص ۱۹۸) مطابق شکل مقابل ، یک دوربین تلویزیون را (که در ۵ متری خط پایان روی یـک مـسیر مستقیم قرار دارد) نشان می دهد که دونده ی المپیک M را تعقیب می کند. وقتی دونده در ۵ متری خط پایـان اسـت بـا سرعت ۱۰ متر بر ثانیه می دود. سرعت چرخش دوربین در این لحظه چقدر است؟

حل :



$$x'(t)=۱۰\frac{m}{s} \text{ و } x=۵\to\theta=۴۵^\circ$$

$$\tan\theta=\frac{x}{۵}\to x=۵\tan\theta$$

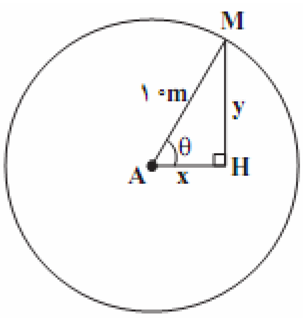
$$\to x(t)=۵\tan\theta(t)$$

$$\to x'(t)=۵\theta'(t)(۱+\tan^۲\theta(t))$$

$$\to ۱۰=۵\theta'(t)(۱+\tan^۲\frac{\pi}{۴})\to\theta'(t)=۱\frac{rad}{s}$$

***

۶۰ : (مثال ص ۱۹۸) (چرخ و فلک) شخصی بر چرخ و فلکی به شعاع ۱۰ متر سوار شده است که در هر دقیقه یک دور مـی زند. وقتی فاصله ی افقی آن شخص از خط قائم گذرنده از مرکز چرخ و فلک برابر ۵ متر است، سـرعت آن شـخص چقـدر خواهد بود؟



حل : فرض کنیم M محل نشستن شخص روی چرخ و فلک باشد و x فاصـله ی افقـی شخص در لحظه ی t ، از خط قائمی که از مرکز می گذرد و y ارتفاع نقطه ی M از خط افقی که از مرکز می گذرد (طبق شکل مقابـل) و θ زاویـه ی نـشان داده شـده در شـکل باشد.

در مثلث قائم الزاویه ی AHM داریم:

$$x=۱۰\cos\theta \quad \text{و} \quad y=۱۰\sin\theta$$

اکنون از دو طرف معادله ی $y(t)=۱۰\sin\theta(t)$ نسبت به زمان یعنی t مشتق می گیریم.

$$y'(t)=۱۰\theta'(t)\cos\theta(t)$$

از طرفی

$\theta'(t) = ۱$ دور در هر دقیقه $= ۲\pi$ رادیان در هر دقیقه

همچنین در لحظه ای که x برابر ۵ متر است، داریم :

$$\cos\theta = \frac{۵}{۱۰} = \frac{۱}{۲}$$

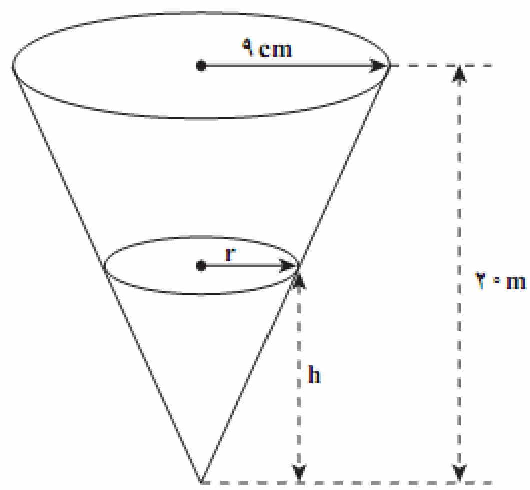
بنابراین :

$$\to y'(t) = ۱۰ \times \frac{۱}{۲} \times ۲\pi = ۱۰\pi \approx ۳۱/۴ \quad \frac{m}{\min}$$

یعنی در لحظه ای که x برابر ۵ متر است، سرعت بالا یا پایین رفتن حدود ۳۱/۴ متر بر دقیقه است.

***

۶۱ : (تمرین در کلاس ص ۱۹۹) ظرف قیفی شکل با ارتفاع ۲۰ سانتی متر و شعاع قاعده ی ۹ سانتی متر چنان قرار گرفته است که رأس آن در پایین است و ظرف به شکل مخروط دوار است. فرض کنید آب با سرعت ۱/۸ سانتی متر مکعب بر ثانیه در این ظرف ریخته شود، آهنگ افزایش ارتفاع آب را وقتی ارتفاع آب ۶ سانتی است را پیدا کنید.



حل :

$$\frac{۹}{r} = \frac{۲۰}{h} \to r = \frac{۹}{۲۰}h$$

$$v'(t) = ۱/۸ = \frac{۹}{۵} \quad \frac{cm^۳}{s}$$

$$v = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h \to v = \frac{۱}{۳}\pi(\frac{۹}{۲۰}h)^۲ h = \frac{۲۷}{۴۰۰}\pi h^۳$$

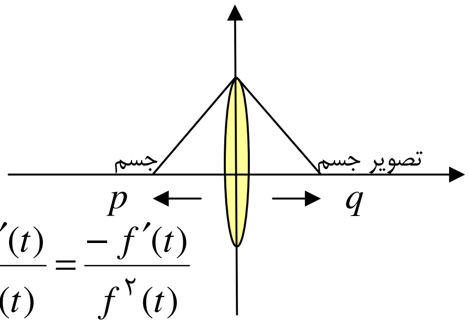
$$\to v(t) = \frac{۲۷}{۴۰۰}\pi h^۳(t) \to v'(t) = ۳ \times \frac{۲۷}{۴۰۰}\pi h^۲(t) h'(t)$$

$$\to \frac{۹}{۵} = \frac{۸۱}{۴۰۰}\pi(۶)^۲ h'(t) \to h'(t) = \frac{۲۰}{۸۱\pi} \approx ۰/۰۸ \quad \frac{cm}{s}$$

۶۲: (مسئله ی ۱ ص ۱۹۹) جسمی با سرعت ۸ سانتی متر بر ثانیه به عدسی نزدیک می گردد، اگر نسبت فاصله های جسم و تصویر آن از عدسی $\frac{۲}{\sqrt{۲}}$ باشد، تصویر جسم با چه سرعتی و در کدام جهت تغییر می کند؟(در عدسی های نازک رابطه ی $\frac{۱}{p}+\frac{۱}{q}=\frac{۱}{f}$ برقرار است، که در آن q فاصله ی جسم از عدسی و q فاصله ی تصویر از عدسی و f فاصله ی کانون عدسی است.)

حل : f ثابت است. پس $f'(t)=۰$ همچنین وقتی جسم به عدسی نزدیک می شود، تصویر از آن عدسی دور می شود. پس اگر $p'(t)$ منفی فرض شود(در حال کاهش) $q'(t)$ مثبت (در حال افزایش) می باشد.

$$p'(t)=-۸\ \frac{cm}{s}$$



$$\frac{p}{q}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}\rightarrow p^۲=۲q^۲$$

$$\frac{۱}{p}+\frac{۱}{q}=\frac{۱}{f}\rightarrow\frac{۱}{p(t)}+\frac{۱}{q(t)}=\frac{۱}{f(t)}\rightarrow\frac{-p'(t)}{p^۲(t)}+\frac{-q'(t)}{q^۲(t)}=\frac{-f'(t)}{f^۲(t)}$$

$$\xrightarrow{f'(t)=۰}\frac{-(-۸)}{p^۲(t)}+\frac{-۴}{q^۲(t)}=\frac{۰}{f^۲(t)}\rightarrow\frac{q'(t)}{q^۲(t)}=\frac{۸}{۲q^۲(t)}\rightarrow q'(t)=۴\ \frac{cm}{s}$$

***

۶۳: (مسئله ی ۲ ص ۱۹۹) مخزنی استوانه ای به شعاع ۳ متر را با آهنگ ۲ متر مکعب بر دقیقه از آب پر می کنند. ارتفاع آب با چه آهنگی بالا می آید؟

حل : شعاع آب در استوانه در هر لحظه مقداری ثابت است.

$$v=\pi r^۲h$$

$$v(t)=\pi r^۲(t)h(t)\rightarrow v'(t)=\pi r^۲(t)h'(t)\rightarrow ۲=\pi(۳)^۲h'(t)\rightarrow h'(t)=\frac{۲}{۹\pi}\ \frac{m}{\min}$$

۶۴: (مسئله ی ۳ ص ۱۹۹) شعاع کره ای با آهنگ ۳ میلی متر بر ثانیه بزرگ می شود. در لحظه ای که قطر کره ۶۰ میلی متر است، حجم کره با چه آهنگی افزایش می یابد.

حل :

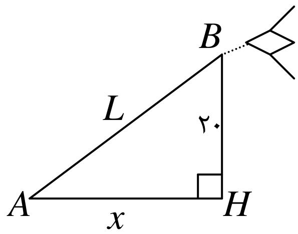
$r=\frac{۶۰}{۲}=۳۰\ mm$ و $v=\frac{۴}{۳}\pi\, r^{۳}$

$$v(t)=\frac{۴}{۳}\pi\, r^{۳}(t)\to v'(t)=۴\pi\, r^{۲}(t)\,r'(t)\to v'(t)=۴\pi\,(۳۰)^{۲}(۳)=۱۰۸۰۰\pi\ \frac{mm^{۳}}{s}$$

***

۶۵ : (مسئله ۴ ص ۲۰۰) اگر ارتفاع بادبادک شما از زمین ۲۰ متر باشد و فاصله ی افقی آن از شما ۳۰ متر و با آهنگ ۸ متر در دقیقه به طور افقی از شما دور شود، طول ریسمان با چه آهنگی افزایش می یابد؟

حل:



$$x=۳۰m\to L=\sqrt{۱۳۰۰}=۱۰\sqrt{۱۳}$$

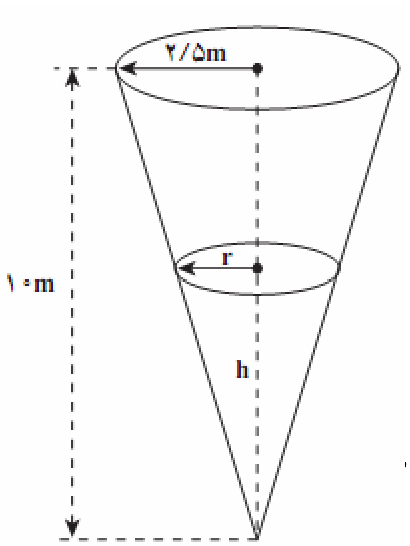
$$L^{۲}(t)=x^{۲}(t)+۴۰۰\to ۲L(t)L'(t)=۲x(t)x'(t)+۰$$

$$۲(۱۰\sqrt{۱۳})L'(t)=۲(۳۰)(۸)\to L'(t)=\frac{۲۴}{\sqrt{۱۳}}\ \frac{m}{s}$$

***

۶۶ : (مسئله ۵ ص ۲۰۰) آب با سرعت ۹ متر مکعب بر ساعت وارد منبعی می شود که نشتی دارد. این منبع به شکل مخروطی است که رأس آن به طرف پایین است و عمق آن ۱۰ متر و قطر قاعده ی آن ۵ متر است. وقتی عمق آب ۵ متر است، سطح آن با آهنگ ۱۸ سانتی متر بر ساعت بالا می رود. در این لحظه آب با چه آهنگی به خارج نشت می کند؟

حل :



$$\frac{r}{۲/۵}=\frac{h}{۱۰}\to r=\frac{۱}{۴}h$$

$$h'(t)=۱۸\ \frac{cm}{h}=\frac{۱۸}{۱۰۰}\ \frac{m}{h}$$

حجم آب موجود $v=\frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h=\frac{۱}{۳}\pi(\frac{۱}{۴}h)^{۲}\times h\to v=\frac{\pi}{۴۸}h^{۳}$

$$(t)=\frac{\pi}{۴۸}h^{۳}(t)\to v'(t)=\frac{\pi}{۴۸}۳h^{۲}(t)=\frac{\pi}{۱۶}\times ۲۵\times\frac{۱۸}{۱۰۰}=\frac{۹\pi}{۳۲}\ \frac{m^{۳}}{h}$$

حجم آب موجود − حجم آب ورودی = حجم آب نشتی

$$v(t) = v_۱(t) - v_۲(t)$$

$$v'(t) = v'_۱(t) - v'_۲(t) = ۹ - \frac{۹\pi}{۳۲} \quad \frac{m^۳}{s}$$

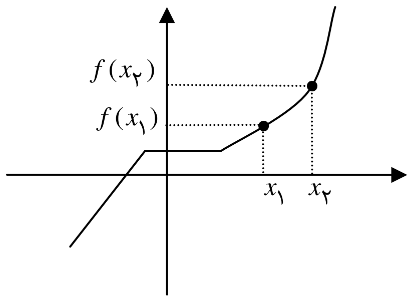
***

تابع صعودی و نزولی

تعریف : فرض کنید تابع f روی بازه ی I تعریف شده باشد. در این صورت :

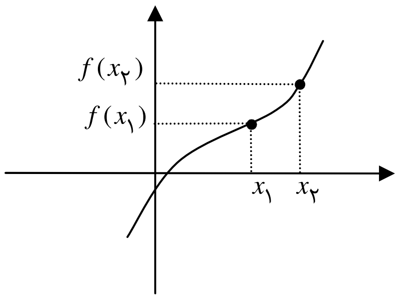
الف : تابع f روی بازه ی I ، صعودی است، هرگاه برای

$$\forall x_1, x_2 \in I ; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$



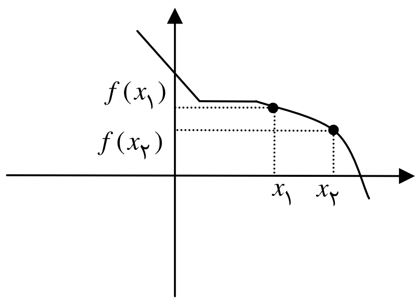
ب : تابع f روی بازه ی I ، اکیداً صعودی است، هرگاه برای

$$\forall x_1, x_2 \in I ; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$



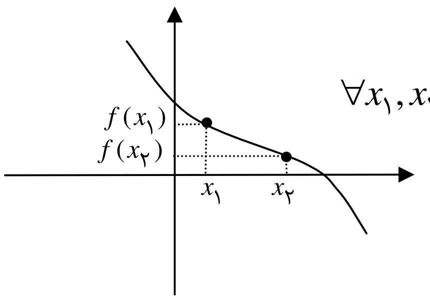
ج : تابع f روی بازه ی I ، نزولی است، هرگاه برای

$$\forall x_1, x_2 \in I ; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$



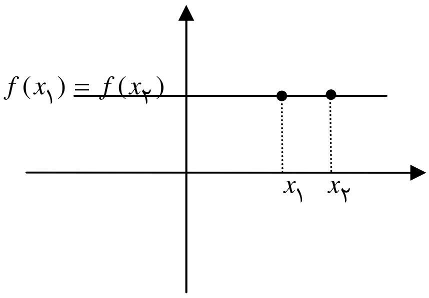
د : تابع f روی بازه ی I ، اکیداً نزولی است، هرگاه برای

$$\forall x_1, x_2 \in I ; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$



هـ : تابع f روی بازه ی I ، ثابت است، هرگاه برای

$$\forall x_{۱},x_{۲}\in I; x_{۱}<x_{۲}\rightarrow f(x_{۱})=f(x_{۲})$$



تعریف : تابع f را روی بازه ی I یکنوا گوییم، هرگاه تابع f روی بازه ی I یا صعودی و یا نزولی باشد.

تعریف : تابع f را روی بازه ی I اکیداً یکنوا گوییم، هرگاه تابع f روی بازه ی I یا اکیداً صعودی و یا اکیداً نزولی باشد.

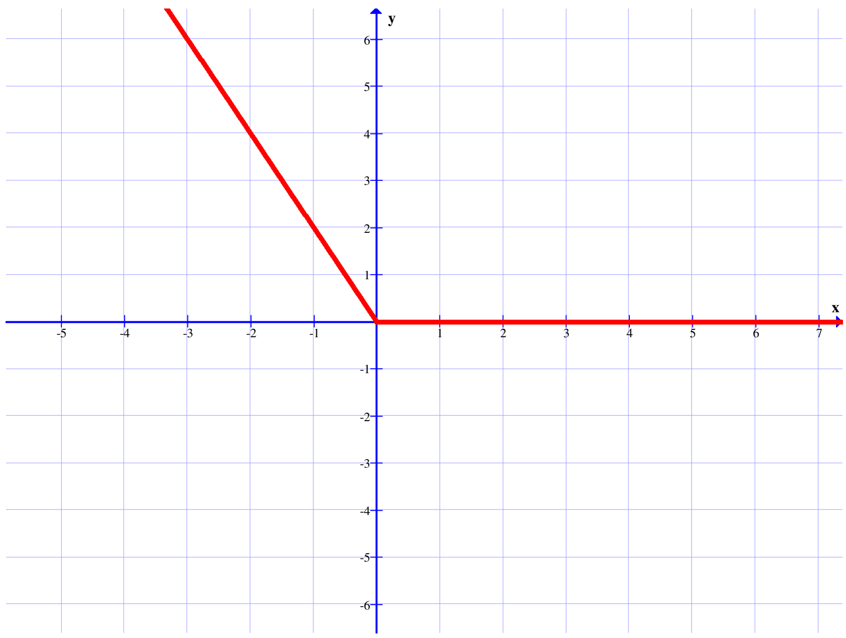
توجه ۱ : طبق تعریف، تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی است.

توجه ۲ : اگر تابع f روی بازه ی I اکیداً صعودی (یا اکیداً نزولی) باشد، آنگاه روی این بازه صعودی (نزولی) است.

تمرین : با رسم نمودار ، یکنوایی تابع $f(x)=|x|-x$ را بررسی کنید.

حل :

$$f(x)=|x|-x=\begin{cases} ۰ & x\geq ۰ \\ -۲x & x<۰ \end{cases}$$



تابع f در بازه ی $(-\infty,۰]$ اکیداً نزوی و در بازه ی $[۰,+\infty)$ ثابت است. به طور کلی تابع f در $(-\infty,+\infty)$ نزولی است.

کاربرد مشتق در تشخیص یکنوایی توابع

قضیه : (قضیه ی یکنوایی) فرض کنیم تابع f بر روی بازه ی $[a,b]$ پیوسته و بر بازه ی (a,b) مشتق پذیر باشد. در این صورت :

الف : اگر به ازای هر $x \in (a,b)$ داشته باشیم $f'(x) > ۰$ ، آنگاه تابع بر $[a,b]$ اکیداً صعودی است.

ب : اگر به ازای هر $x \in (a,b)$ داشته باشیم $f'(x) < ۰$ ، آنگاه تابع بر $[a,b]$ اکیداً نزولی است.

ج : اگر به ازای هر $x \in (a,b)$ داشته باشیم $f'(x) = ۰$ ، آنگاه تابع بر $[a,b]$ اکیداً ثابت است.

توجه۱ : شرط استفاده از قضیه ی فوق آن است که تابع f بر بازه ی $[a,b]$ پیوسته و بر بازه ی (a,b) مشتق پذیر باشد.

توجه۲ : برای تعیین یکنوایی یک تابع، از تابع مشتق گرفته و ریشه های مشتق را در صورت وجود به دست می آوریم. سپس تابع مشتق را در قالب یک جدول[1] تعیین علامت می کنیم. در هر فاصله که علامت مشتق ، مثبت بود، منحنی تابع در آن فاصله اکیداً صعودی و در هر فاصله که علامت مشتق منفی بود، منحنی تابع در آن فاصله اکیداً نزولی است.

مثال : جدول تغییرات تابع $f(x) = x^۳ - ۳x + ۱$ را رسم کنید.

حل :

$$f(x) = x^۳ - ۳x + ۱ \to f'(x) = ۳x^۲ - ۳ \xrightarrow{f'(x)=۰} ۳x^۲ - ۳ = ۰ \to x = \pm ۱$$

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	۳	$\searrow$	-۱	$\nearrow$	$+\infty$

طبق قضیه ی یکنوایی تابع f در بازه ی $[-۱,۱]$ اکیداً نزولی و در بازه های $[۱,+\infty)$ و $(-\infty,-۱]$ اکیداً صعودی است.

***

توجه :

۱ : عکس این قضیه برای توابع یکنوا درست است.

۲ : ممکن است مشتق تابعی صفر شود و آن تابع صعودی یا نزولی(غیر اکید) باشد. مانند تابع $f(x) = [x]$

[1] . این جدول را جدول تغییرات یا جدول رفتار تابع می نامند.

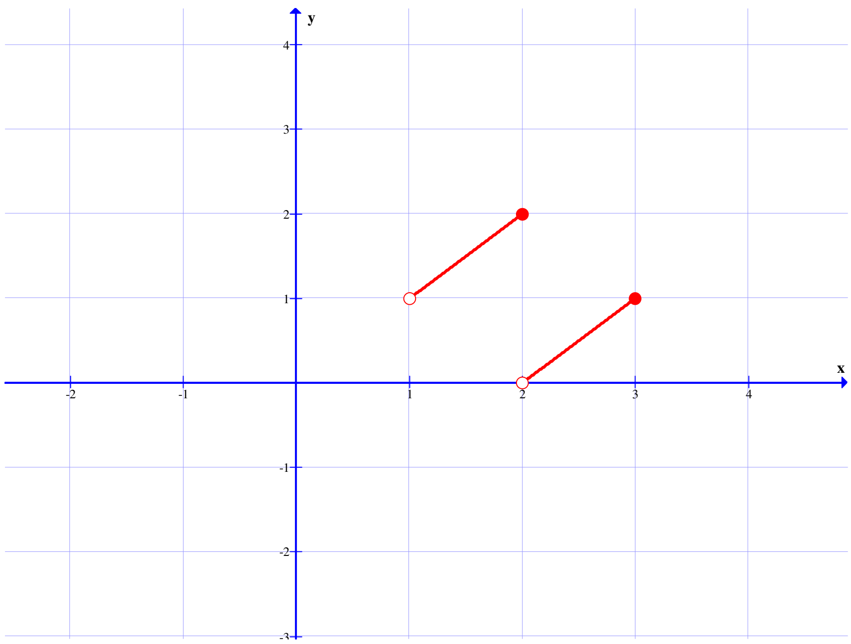
نقاط و مقدار های اکسترمم مطلق (سراسری)

تعریف : نقطه ی $c\in D_f$ را نقطه ی مینیمم مطلق (سراسری) تابع f گویند، هرگاه به ازای هر $x\in D_f$ داشته باشیم $f(c)\leq f(x)$ و مقدار $f(c)$ را مقدار مینیمم مطلق تابع f گویند.(به عبارت دیگر نقطه ی $(c,f(c))$ را نقطه ی مینیمم مطلق تابع f است، هرگاه این نقطه از هیچ یک از نقاط واقع بر نمودار تابع f، بالاتر نباشد.)

تعریف : نقطه ی $c\in D_f$ را نقطه ی ماکزیمم مطلق (سراسری) تابع f گویند، هرگاه به ازای هر $x\in D_f$ داشته باشیم $f(c)\geq f(x)$ و مقدار $f(c)$ را مقدار ماکزیمم مطلق تابع f گویند.(به عبارت دیگر نقطه ی $(c,f(c))$را نقطه ی ماکزیمم مطلق تابع f است، هرگاه این نقطه از هیچ یک از نقاط واقع بر نمودار تابع f، پایین تر نباشد.)

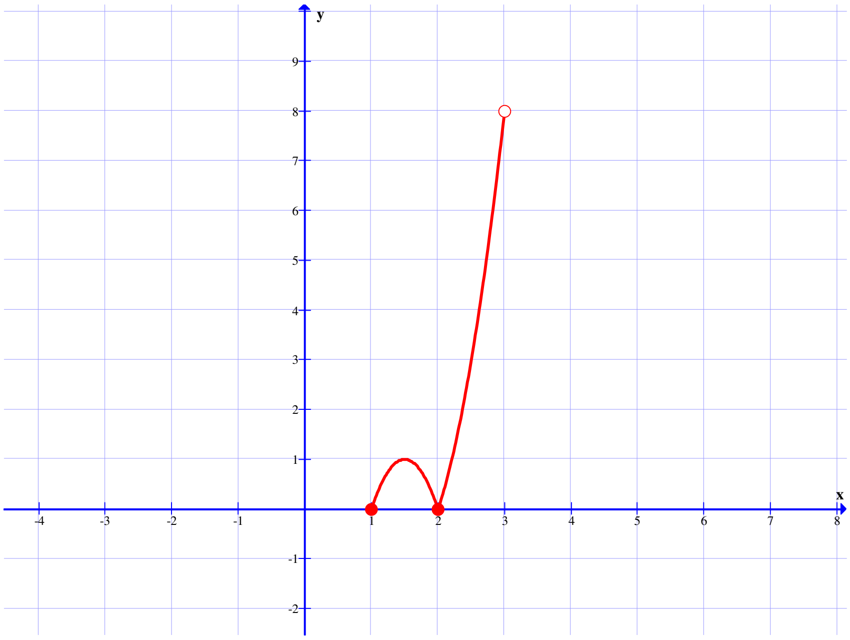
هر نقطه ی مینیمم مطلق یا ماکزیمم مطلق ، نقطه ی اکسترمم مطلق تابع نامیده می شود.

مثال ۱ :



تابع f در بازه ی $[۱,۳]$ پیوسته نیست، اما در $x=۲$ دارای ماکزیمم مطلق است و $\max(f)=f(۲)=۲$ اما تابع در بازه ی $[۱,۳]$ مینیمم مطلق ندارد.

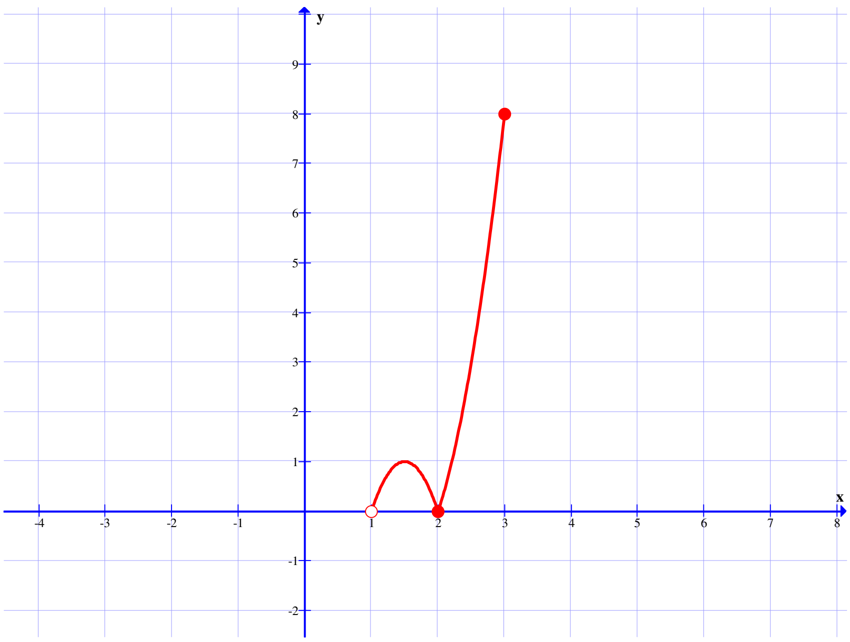
مثال ۲ :



تابع f در بازه‌ی $[۱,۳]$ پیوسته است و در $x=۱$ و $x=۲$ دارای مینیمم مطلق است و $\min(f)=f(۱)=f(۲)=۰$

اما تابع در بازه‌ی $[۱,۳]$ ماکزیمم مطلق ندارد.

مثال ۳ :



تابع f در بازه‌ی $[۱,۳]$ پیوسته نیست و در $x=۲$ دارای مینیمم مطلق است که $\min(f)=f(۲)=۰$ و در $x=۳$ دارای ماکزیمم مطلق است.

***

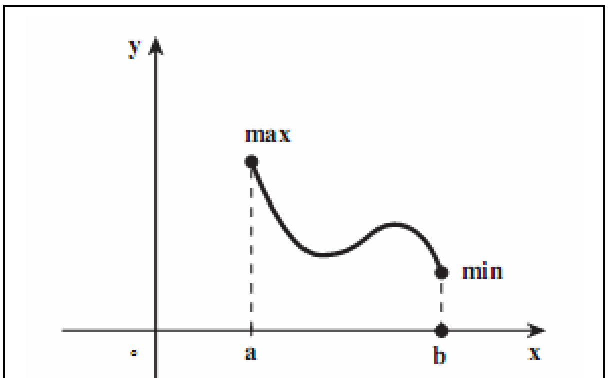
توجه : اگر تابع f در بازه ی بسته ی $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه در این بازه هم مقدار ماکزیمم و هم مقدار مینیمم مطلق دارد.

توجه : فرض کنید که تابع f در بازه‌ی بسته ی $[a,b]$ تعریف شده باشد. در این صورت در سه حالت زیر مقادیر اکسترمم مطلق تابع را بررسی می کنیم.

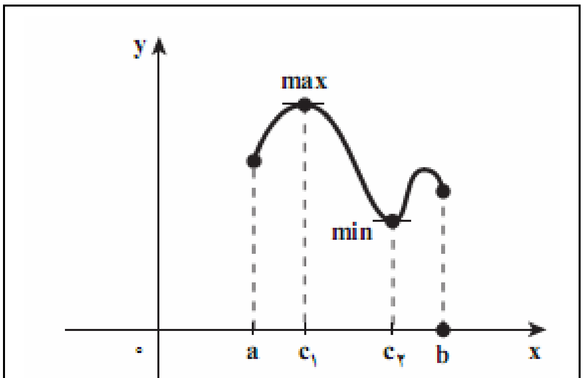
حالت اول : وقتی مقادیر اکسترمم مطلق را در نقاط انتهایی بازه داشته باشیم.

حالت دوم : وقتی مقادیر اکسترمم مطلق را در نقاط درونی بازه داشته باشیم و در آن نقاط مقدار مشتق صفر باشد.

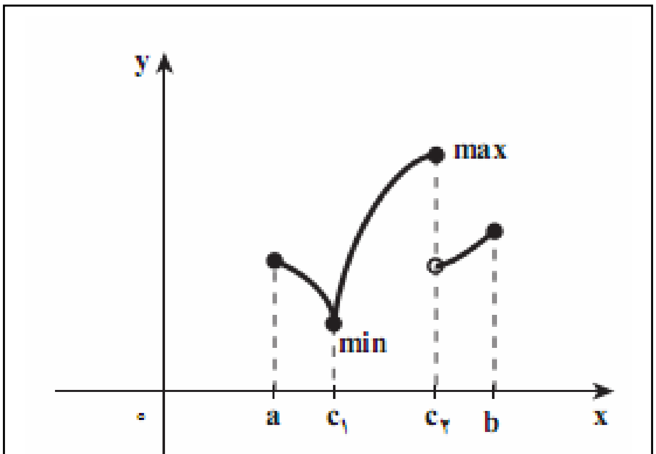
حالت سوم : وقتی مقادیر اکسترمم مطلق را در نقاط درونی بازه داشته باشیم و در آن نقاط تابع مشتق پذیر نباشد.



(حالت اول)



(حالت دوم)



(حالت سوم)

تعریف : نقطه‌ی درونی $c\in D_f$ را **نقطه ی بحرانی** تابع f می نامیم، هرگاه یا $f'(c)$ موجود نباشد یا $f'(c)=0$

برای تعیین نقاط بحرانی یک تابع، مشتق تابع را بدست آورده و ریشه های صورت و مخرج آن را (اگر عضو نقاط درونی دامنه باشند.)به عنوان نقطه ی بحرانی می پذیریم.

توجه : با توجه به این تعریف نتیجه می شود که اگر تابع f بر بازه‌ی بسته ی $[a,b]$ تعریف شده باشد، چون نقاط $x=b$ و $x=a$، نقاط درونی نیستند، پس آنها جزء نقاط بحرانی محسوب نمی شوند.

تمرین : نقاط بحرانی تابع $f(x)=-۲x^{۳}+۳x^{۲}$ را روی بازه ی $[-\frac{۱}{۲},۲]$ بیابید.

حل :

$$f(x)=-۲x^{۳}+۳x^{۲}\rightarrow f'(x)=-۶x^{۲}+۶x\xrightarrow{f'(x)=۰}-۶x^{۲}+۶x=۰\rightarrow x=۰ \quad \text{یا} \quad x=۱$$

این دو نقطه نقاط درونی بازه ی $[-\frac{۱}{۲},۲]$ می باشند. لذا بحرانی هستند.

تمرین : نقاط بحرانی توابع زیر را بدست آورید.

۱) $f(x)=x^{۳}-۳x$

۲) $f(x)=\sqrt{۴x-۷}$

۳) $f(x)=\sqrt{۴x-x^{۲}}$

۴) $f(x)=\sqrt{x^{۳}-۴x}$

۵) $f(x)=|x-۲|$

۶) $f(x)=||x|-۱|$

۷) $f(x)=\frac{x+۱}{x^{۲}-۵x+۴}$

۸) $f(x)=\sin^{۲}۳x$

***

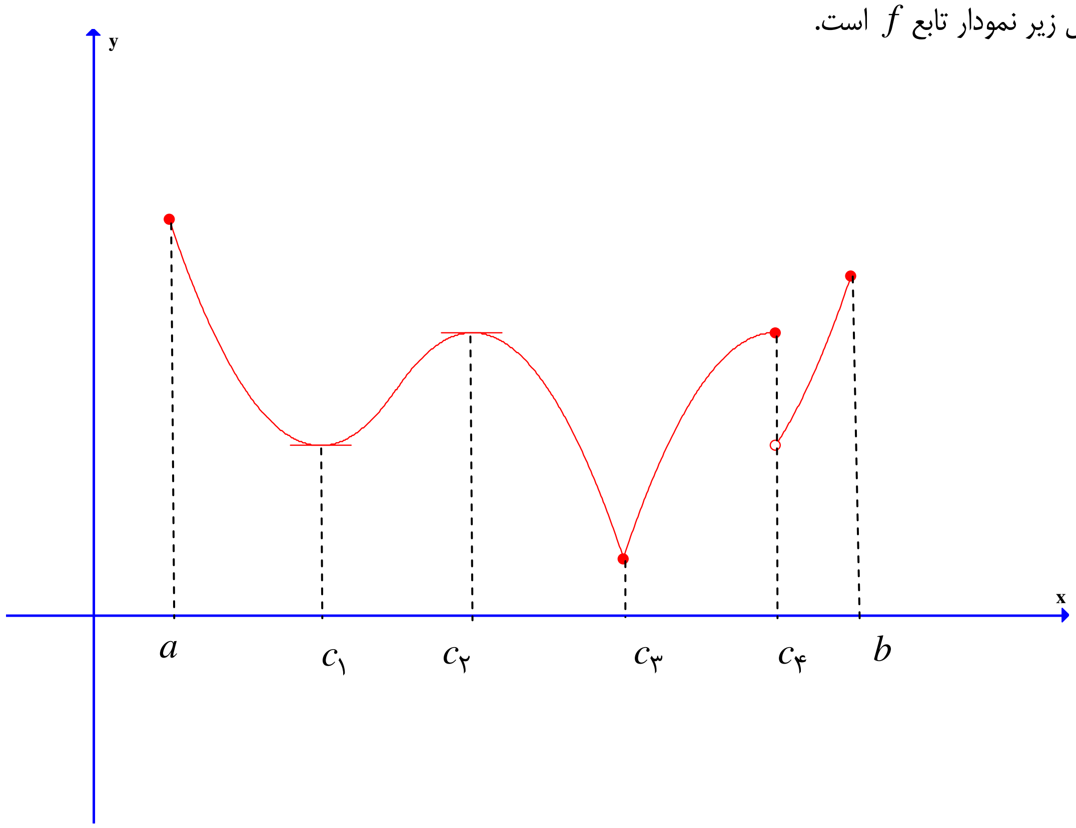
نقاط و مقدار های اکسترمم نسبی (موضعی)

تعریف : اگر تابع f روی بازه ی باز I تعریف شده باشد و نقطه ای مانند $c\in I$ وجود داشته باشد که برای هر $x\in I$ داشته باشیم $f(c)\leq f(x)$. آنگاه گوییم تابع f در نقطه ی c مینیمم نسبی (موضعی) دارد. c را نقطه ی مینیمم نسبی و $f(c)$ را مقدار مینیمم نسبی تابع می نامند.

تعریف : اگر تابع f روی بازه ی باز I تعریف شده باشد و نقطه ای مانند $c\in I$ وجود داشته باشد که برای هر $x\in I$ داشته باشیم $f(c)\geq f(x)$. آنگاه گوییم تابع f در نقطه ی c ماکزیمم نسبی (موضعی) دارد. c را نقطه ی ماکزیمم نسبی و $f(c)$ را مقدار ماکزیمم نسبی تابع می نامند.

توجه : هر نقطه ی مینیمم نسبی یا ماکزیمم نسبی ، نقطه ی اکسترمم نسبی تابع نامیده می شود.

مثال : شکل زیر نمودار تابع f است.



تابع f در نقاط $c_۱$ و $c_۳$ دارای مینیمم نسبی و در نقاط $c_۲$ و $c_۴$ دارای ماکزیمم نسبی است. همچنین با توجه به مثال بالا، نکات زیر قابل توجه می باشند.

۱ : شرط لازم برای آن که c نقطه ی اکسترمم نسبی تابع f باشد، آن است که تابع f در یک همسایگی (دو طرفه ی) نقطه ی c تعریف شده باشد. بنابراین اگر تابع f فقط روی بازه ی $[a,b]$ تعریف شده باشد، آنگاه نقاط a و b نمی توانند اکسترمم نسبی f باشند. (خلاصه اینکه نقاط انتهایی بازه ی $[a,b]$ ، اکسترمم نسبی نیستند.[۲])

۲ : لزومی ندارد که تابع f در نقاط اکسترمم نسبی خود، پیوسته یا مشتق پذیر باشد. مانند نقاط $c_۴$ و $c_۳$

۳ : اگر تابع f در نقطه ی c دارای اکسترمم نسبی باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه $f'(c)=۰$ است. مانند نقاط $c_۲$ و $c_۱$(یعنی در نقاط اکسترمم نسبی مشتق پذیر هر تابع ، مقدار عدد مشتق برابر با صفر و خط مماس در آن نقطه افقی است.)

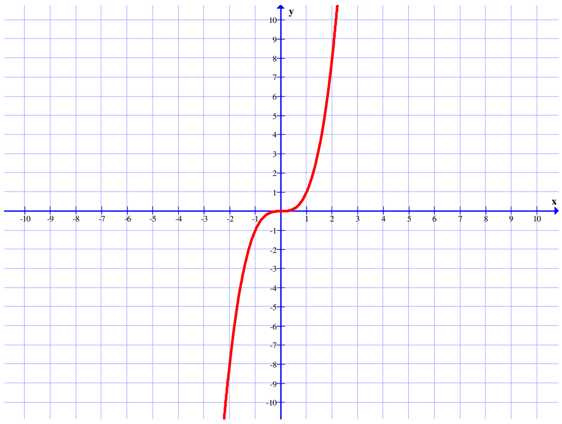
۴ : نقطه ی اکسترمم نسبی می تواند نقطه ی اکسترمم مطلق تابع f نیز باشد. مانند نقطه ی $c_۳$ که مینیمم نسبی و مطلق است.

۵ : اگر c نقطه ی اکسترمم مطلق تابع f روی دامنه ی آن باشد و تابع f در یک همسایگی آن نقطه تعریف شده باشد، آن گاه نقطه ی c نقطه ی اکسترمم نسبی f نیز هست. مانند نقطه ی $c_۳$

[2] .کتاب درسی نقاط ابتدا و انها را جزء نقاط اکسترمم نسبی می داند.

۶ : هر نقطه ی واقع بر یک تابع ثابت یا واقع بر بخشی از یک تابع که ثابت است. هم مینیمم نسبی و هم ماکزیمم نسبی محسوب می شود.(زیرا در هر دو تعریف اکسترمم نسبی صدق می کند.)

۷ : هر نقطه‌ی اکسترمم نسبی یک نقطه‌ی بحرانی f است. اما هر نقطه‌ی بحرانی درونی لزوماً اکسترمم نسبی (یا مطلق) نیست. $x=۰$ نقطه ی بحرانی تابع $f(x)=x^۳$ است. اما اکسترمم f (نسبی یا مطلق) نیست.



***

قضیه : اگر تابع f در نقطه ی c دارای اکسترمم نسبی و $f'(c)$ وجود داشته باشد. آنگاه $f'(c)=۰$ است.

اثبات : فرض کنیم که f دارای ماکزیمم نسبی است. در این صورت برای نقاط x در یک همسایگی c داریم.$f(x)-f(c)\leq ۰$ حال دو حالت زیر را داریم.

اگر $x>c$ آنگاه $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq ۰$ و در نتیجه $\lim\limits_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'_+(c)=f'(c)\leq ۰$

اگر $x<c$ آنگاه $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq ۰$ و در نتیجه $\lim\limits_{x\to c^-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'_-(c)=f'(c)\geq ۰$

و این وقتی ممکن است که $f'(c)=۰$ باشد.

فرض کنیم که f دارای مینیمم نسبی است. در این صورت برای نقاط x در یک همسایگی c داریم.$f(x)-f(c)\geq ۰$

حال دو حالت زیر را داریم.

اگر $x>c$ آنگاه $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq ۰$ و در نتیجه $\lim\limits_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'_+(c)=f'(c)\geq ۰$

اگر $x<c$ آنگاه $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq ۰$ و در نتیجه $\lim\limits_{x\to c^-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'_-(c)=f'(c)\leq ۰$

و این وقتی ممکن است که $f'(c)=۰$ باشد.

آزمون مشتق اول (چگونگی تعیین نقاط اکسترمم نسبی تابع)

فرض کنید c نقطه ی بحرانی تابع f باشد. ($a<c<b$) و تابع f بر بازه ی $I=(a,b)$ پیوسته و بر ایـن بـازه بجـز احتمالاً در c ، مشتق پذیر باشد. در این صورت:

الف : اگر f' روی (a,c) مثبت و روی (c,b) منفی باشد، آنگاه f در c ماکزیمم نسبی دارد.

ب : اگر f' روی (a,c) منفی و روی (c,b) مثبت باشد، آنگاه f در c مینیمم نسبی دارد.

ج : اگر f' روی (a,c) و (c,b) تغییر علامت ندهد، آنگاه f در c اکسترمم نسبی ندارد.

توجه کنید که f می تواند در $x=c$ مشتق پذیر ($f'(c)=۰$) یا مشتق ناپذیر ($f'(c)$ وجود ندارد.) باشد. اما حتماً باید در این نقطه پیوستگی دو طرفه داشته باشد. در واقع با آزمون مشتق اول ، اکسترمم های نسبی پیوسته ی توابع را می توان تعیین نمود.

در این قسمت نیز می توان از جدول تغییرات تابع جهت تعیین علامت مشتق اول و تعیین نقاط اکسترمم نیز کمک گرفت.

تمرین : با رسم جدول تغییرات اکسترمم های نسبی تابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x)=x^۴+\frac{۴}{۳}x^۳-۴x^۲$$

حل :

$$D_f=R$$

$$f'(x)=۴x^۳+۴x^۲-۸x\xrightarrow{f'(x)=۰}۴x^۳+۴x^۲-۸x=۰$$

$$\to ۴x(x^۲+x-۲)=۰\to ۴x(x+۲)(x-۱)=۰\to x=-۲\ ,\ x=۰\ ,\ x=۱$$

x	$-\infty$		-۲		۰		۱		$+\infty$
y'		$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{-۳۲}{۳}$	$\nearrow$	۰	$\searrow$	$-\frac{۵}{۳}$	$\nearrow$	$+\infty$
			min		max		min		

$(-۲,\frac{-۳۲}{۳})$ و $(۱,\frac{-۵}{۳})$ نقاط مینیمم نسبی تابع

$(۰,۰)$ نقطه ی ماکزیمم نسبی تابع

تمرین : با رسم جدول تغییرات اکسترمم های نسبی تابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x) = x^۴ - ۶x^۲ + ۸x$$

حل :

$$D_f = R$$

$$f'(x) = ۴x^۳ - ۱۲x + ۸ \xrightarrow{f'(x)=۰} ۴x^۳ - ۱۲x + ۸ = ۰$$

$$\to (x-۱)(۴x^۲ + ۴x - ۸) = ۰ \to (x-۱)(x-۱)(x+۲) = ۰ \to x = -۲ \,,\ x = ۱$$ مضاعف

x	$-\infty$		-۲		۱		$+\infty$
y'		$-$	۰	$+$	۰	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-۲۴	$\nearrow$	۳	$\nearrow$	$+\infty$
			min				

نقطه ی مینیمم نسبی تابع $(-۲,-۲۴)$ و تابع نقطه ی ماکزیمم نسبی تابع ندارد.

توجه کنید که در این تمرین برای حل معادله ی $f'(x) = ۰$ از قانون مجموع ضرایب (که در اینجا صفر است.) کمک گرفتیم. همچنین در نقطه ی $x = ۱$ مشتق تغییر علامت نداده است، پس این نقطه اکسترمم نسبی نیست.

نکته :

الف : نمودار هر تابع درجه ی دوم به شکل $f(x) = ax^۲ + bx + c$ همواره دارای نقطه ی اکسترممی به طول $x = -\frac{b}{۲a}$ می باشد.

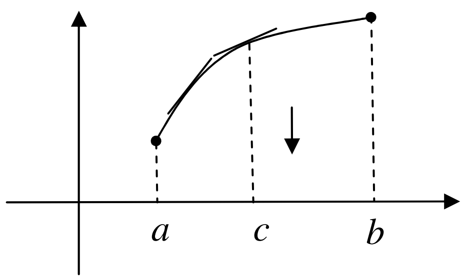
ب : در توابع پیوسته ی مشتق پذیر ریشه های ساده و ریشه های مکرر مرتبه ی فرد معادله ی $f'(x) = ۰$ ، طول نقاط اکسترمم نسبی تابع f هستند. (زیرا در این نقاط مشتق تغییر علامت می دهد.) اما ریشه های مکرر مرتبه ی زوج ، طول نقاط اکسترمم نسبی تابع نیستند.(زیرا در این نقاط مشتق تغییر علامت نمی دهد.)

ج : برای تعیین علامت مشتق، می توان یک نقطه ی دلخواه (غیر از ریشه های آن) را انتخاب و با جایگزین نمودن آن نقطه در مشتق، علامت عدد حاصل را در نظر گرفت.

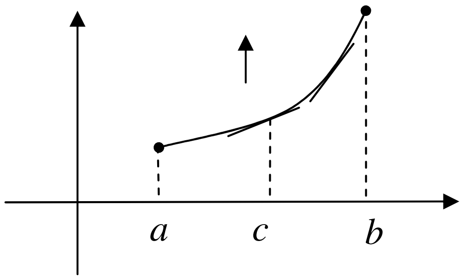
***

جهت تقعر منحنی و نقطه ی عطف

به شکل های زیر توجه کنید. هر دو تابع روی بازه ی (a,b) صعودی اند. ولی در شکل (۱) تقعر (گودی) منحنی رو به بالا و در شکل (۲) تقعر رو به پایین است.



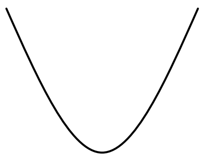
شکل (۲)



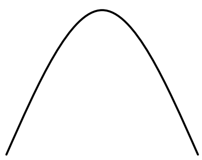
شکل (۱)

گوییم تابع f در نقطه ی $(c, f(c))$ تقعر رو به بالا (رو به پایین) دارد، هرگاه $f'(c)$ موجود باشد و در یک همسایگی نقطه ی c منحنی تابع بالای (پایین) خط مماس بر منحنی در نقطه ی c باشد.

تعریف: اگر نمودار تابع f روی بازه ی I ، بالای همه ی مماس هایش باشد، آنگاه نمودار f را مقعر رو به بالا (یا به اختصار مقعر یا گود) می نامند.



تعریف: اگر نمودار تابع f روی بازه ی I ، پایین همه ی مماس هایش باشد، آنگاه نمودار f را مقعر رو به پایین (یا به اختصار محدب یا تپه) می نامند.



قضیه : (قضیه ی تقعر) : فرض کنیم $f''(x)$ به ازای هر x از بازه ی باز I موجود باشد. در این صورت:

الف: اگر به ازای هر $x \in I$ ، $f''(x) > 0$ باشد، آنگاه نمودار f روی بازه ی I تقعر رو به بالا دارد.

ب : اگر به ازای هر $x \in I$ ، $f''(x) < 0$ باشد، آنگاه نمودار f روی بازه ی I تقعر رو به پایین دارد.

برای تعیین جهت تقعر منحنی تابع f ، مشتق دوم آن را محاسبه کرده، نقاطی که f'' در آنها وجود ندارد یا برابر صفر است را به دست آورده و f'' را تعیین علامت می کنیم. در هر بازه ای که $f''>0$ باشد، جهت تقعر f رو به بالا و در هر بازه ای که $f''<0$ باشد، جهت تقعر f رو به پایین است. جدول تعیین علامت f'' را جدول تقعر تابع نیز می نامند.

تمرین : با تشکیل جدول تعیین علامت f'' تعیین کنید که تابع $f(x)=x^{۴}-۲۴x^{۲}-x$ روی چه بازه ای دارای تقعر رو به بالا و روی چه بازه ای دارای تقعر رو به پایین است؟

حل :

$D_f = R$

$f'(x)=۴x^{۳}-۴۸x-۱ \rightarrow f''(x)=۱۲x^{۲}-۴۸ \xrightarrow{f''(x)=۰} ۱۲x^{۲}-۴۸=۰ \rightarrow x=\pm ۲$

x	$-\infty$	-۲		۲	$+\infty$
y''	+	۰	−	۰	+
y	$+\infty$	-۷۸		-۸۲	$+\infty$
	$\cup$		$\cap$		$\cup$

در بازه ی $(-۲,۲)$ جهت تقعر تابع رو به پایین و در فاصله های $(۲,+\infty)$ و $(-\infty,۲)$ رو به بالا است.

تعریف : نقطه ی $(c,f(c))$ ، نقطه ی عطف نمودار تابع f نامیده می شود (یا تابع f در c نقطه ی عطف دارد.) هرگاه دو شرط زیر هم زمان باشند.

الف : نمودار f در c دارای مماس واحد باشد. (یعنی $f'(c)=L$ یا $f'(c)=+\infty$ یا $f'(c)=-\infty$)

ب : جهت تقعر f در c عوض شود.(یعنی f'' تغییر علامت دهد.)

توجه :

الف : اگر نقطه ی c حداقل یکی از شرط های فوق را نداشته باشد. نقطه ی عطف نمودار تابع نیست.

ب : نقطه ی عطف تنها نقطه ای از نمودار تابع است که منحنی دارای مماس واحد بوده و مماس بر منحنی در این نقطه از منحنی عبور می کند.

ج : با توجه به شرط اول نتیجه می شود که تابع f در نقطه ی عطف پیوستگی دو طرفه دارد.

توجه : برای تعیین نقطه ی عطف منحنی تابع f ، مشتق دوم تابع را محاسبه کرده، ریشه های صورت و مخرج f'' را به دست آورده و آن را تعیین علامت می کنیم. در هر نقطه که f'' تغییر علامت دهد. در صورتی که مماس واحد داشته باشیم، آنگاه نمودار تابع f در آن نقطه دارای عطف است. (در نقطه ی عطف تابع یا $f''(c)=۰$ است و یا $f''(c)$ وجود ندارد.)

تمرین : نقطه یا نقاط عطف توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x)=x^{۳}-۶x^{۲}$ 　　　　 ب) $f(x)=\sqrt[۳]{x}$

حل الف :

$$D_f = R$$

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۱۲x \to f''(x) = ۶x - ۱۲ \xrightarrow{f''(x)=۰} ۶x - ۱۲ = ۰ \to x = ۲$$

x	$-\infty$	۲	$+\infty$
y''	−	۰	+
y	$-\infty$	−۱۶	$+\infty$
	$\cap$	عطف	$\cup$

حل ب :

$$D_f = R$$

$$f'(x) = \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}} \to f''(x) = \frac{-۲}{۹x\sqrt[۳]{x^۲}}$$

$x = ۰$ ریشه ی مخرج

x	$-\infty$	۰	$+\infty$
y''	+	نامعین	−
y	$-\infty$	۰	$+\infty$
	$\cup$	عطف	$\cap$

نقطه ی $(۰,۰)$ نقطه ی عطف قائم تابع نیز نامیده می شود.

توجه : نقطه ی $x = ۰$ نقطه ی بحرانی تابع $f(x) = \sqrt[۳]{x}$ است. ولی $f''(۰)$ موجود نیست.

نکته :

الف : نمودار هر تابع درجه ی سوم به شکل $f(x) = ax^۳ + bx^۲ + cx + d$ همواره دارای نقطه ی عطفی به طول $x = -\dfrac{b}{۳a}$ می باشد.

ب : در توابع چند جمله ای ریشه های ساده یا مکرر از مرتبه ی فرد f''، همواره نقطه ی عطف نمودار تابع f هستند.

تمرین : جدول تغییرات و جدول تقعر تابع $f(x) = x^۳ - ۳x$ و نقاط اکسترمم و نقاط عطف نمودار تابع را در صورت وجود به دست آورید.

حل :

$D_f = R$

$f'(x) = ۳x^۲ - ۳ \xrightarrow{f'(x)=۰} ۳x^۲ - ۳ = ۰ \rightarrow x = \pm ۱$

$f''(x) = ۶x \xrightarrow{f''(x)=۰} ۶x = ۰ \rightarrow x = ۰$

x	$-\infty$	-۲		۰		۲	$+\infty$
y'	+	۰	−		−	۰	+
y''	−		−	۰	+		+
y	$+\infty \nearrow$ $\cap$	-۲ max	$\searrow$ $\cap$	۰ عطف	$\searrow$ $\cup$	۲ min	$\nearrow +\infty$ $\cup$

توجه : اگر تابع درجه ی سوم یا دارای یک نقطه ی ماکزیمم نسبی و یک نقطه ی مینیمم نسبی است، یا هیچکدام را ندارد. ولی در هر حالت نقطه ی عطف دارد. در صورتی تابع درجه ی سوم دارای یک نقطـه ی مـاکزیمم نـسبی و یـک نقطـه ی مینیمم نسبی باشد، نقطه ی عطف وسط آنها است.

***

آزمون مشتق دوم (چگونگی تعیین نقاط اکسترمم نسبی تابع)

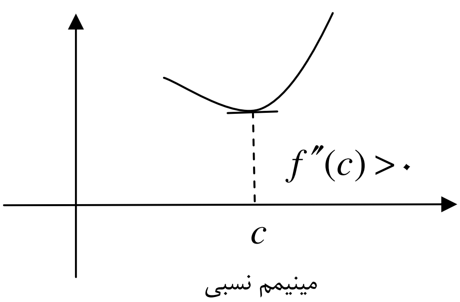
گاهی می توان از مشتق دوم برای تعیین اکسترمم های نسبی (موضعی) نیز استفاده کرد.

فرض کنید $(c, f(c))$ نقطه ی بحرانی تابع f باشد و $f'(c) = ۰$ یا $f''(c)$ موجود باشد. در این صورت :

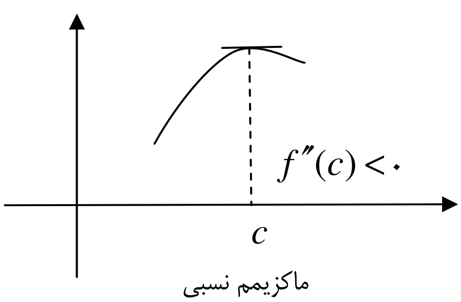
الف : اگر $f''(c) > ۰$ باشد، آنگاه f در c مینیمم نسبی دارد.

ب : اگر $f''(c) < ۰$ باشد، آنگاه f در c ماکزیمم نسبی دارد.

ج : اگر $f''(c) = ۰$ باشد، آنگاه آزمون بی نتیجه است(یعنی با این آزمون نمی توان حکم قطعی داد.)



مینیمم نسبی



ماکزیمم نسبی

توجه : از آنجا که طبق شرایط فوق باید $f''(c)$ موجود باشد، لذا تابع f باید در $x=c$ مشتق پذیر باشد و چون c نقطه ی بحرانی f است. لذا باید $f'(c)=۰$ باشد. بنابر این با آزمون مشتق دوم، اکسترمم های نسبی مشتق پذیر توابع را می توان تعیین نمود.

تمرین : به کمک آزمون مشتق دوم ، نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^۲e^{-x}$ را تعیین کنید.

حل :

$$D_f=R$$

$$f'(x)=۲xe^{-x}-x^۲e^{-x}=x(۲-x)e^{-x}\xrightarrow{f'(x)=۰}x(۲-x)e^{-x}=۰\rightarrow x=۰\ ,\ x=۲$$

نقاط $x=۰$ و $x=۲$ نقاط بحرانی تابع هستند و $f'(۰)=۰$ و $f'(۲)=۰$. همچنین f'' روی $I=(-\infty,+\infty)$ موجود است. لذا

$$f''(x)=(x^۲-۴x+۲)e^{-x}\rightarrow\begin{cases}f''(۰)=۲>۰\\ f''(۲)=-۲e^{-۲}<۰\end{cases}$$

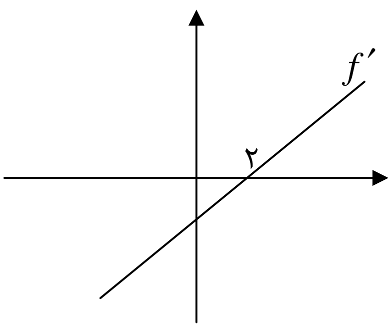
پس طبق آزمون مشتق دوم نقطه ی $x=۰$ مینیمم نسبی و نقطه ی $x=۲$ ماکزیمم نسبی است.

***

روش رسم نمودار تابع با معلوم بودن نمودار مشتق آن

برای رسم نمودار یک تابع به کمک نمودار مشتق آن ، بهترین روش این است که جدول تغییرات را به کمک نمودار مشتق ، تنظیم نموده و سپس با استفاده از این جدول نمودار تابع را رسم نمود.

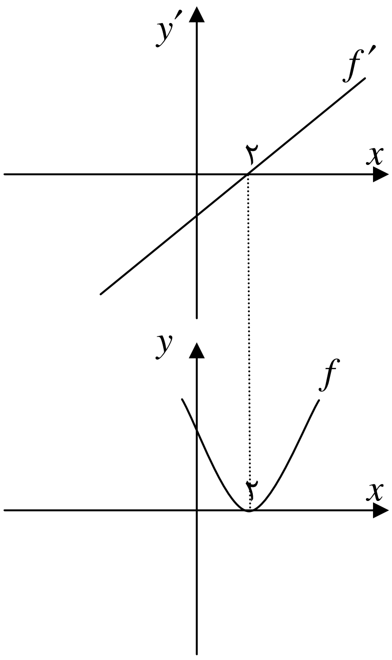
مثال : نمودار مشتق تابعی به شکل زیر است. نمودار تابع را رسم نمایید.



حل : ابتدا جدول تغییرات را رسم می کنیم.

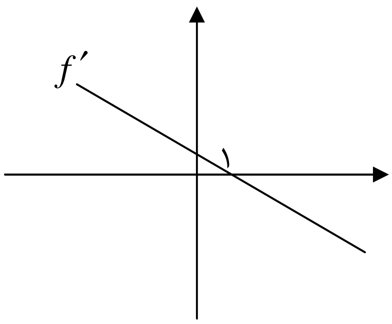
x	$-\infty$		۲		$+\infty$
y'		پایین محور طولها −	۰	بالای محور طول ها +	
y	$+\infty$	$\searrow$	min	$\nearrow$	$+\infty$

پس نمودار تابع به شکل زیر است.



توجه : به کمک این روش نمی توان عرض نقاط (در نمودار f) را تعیین کرد. در این جا عرض نقاط را صفر فرض می کنیم.

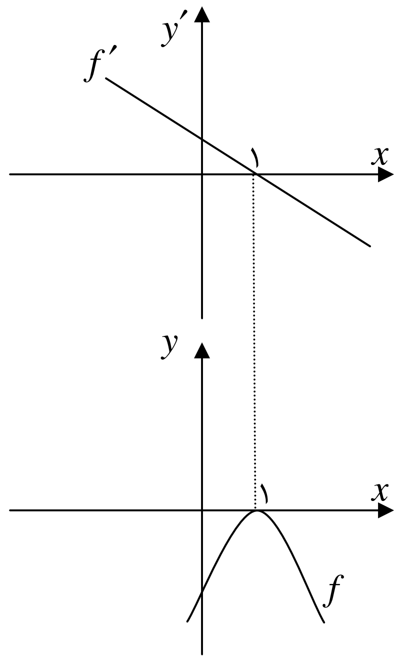
مثال : نمودار مشتق تابعی به شکل زیر است. نمودار تابع را رسم نمایید.



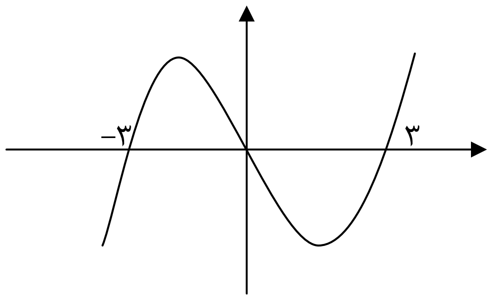
حل : ابتدا جدول تغییرات را رسم می کنیم.

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
y'		+	۰	−	
y	$+\infty$	↗	max	↘	$+\infty$

پس نمودار تابع به شکل زیر است.

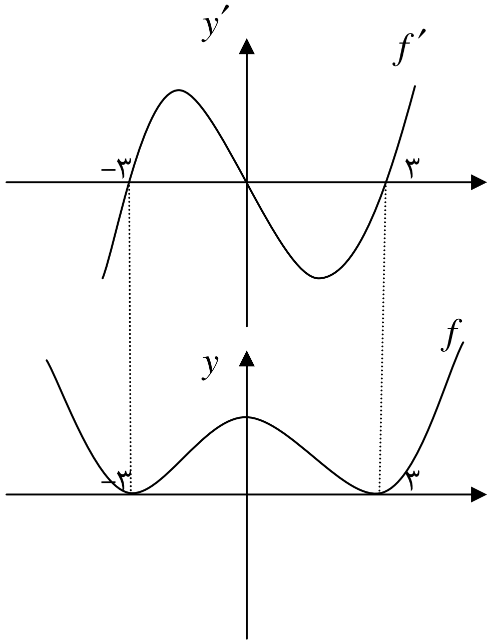


تمرین : نمودار مشتق تابعی به شکل زیر است. نمودار تابع را رسم کنید.



حل :

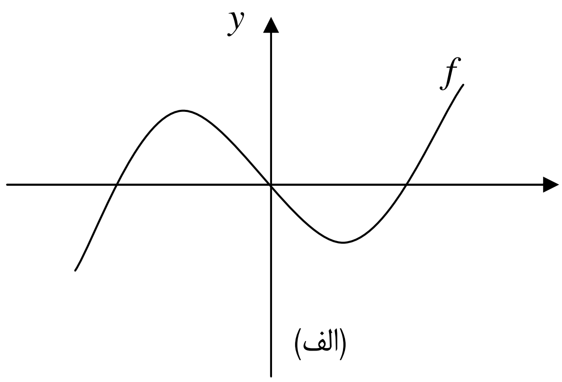
x	$-\infty$		-۳		۰		۳		$+\infty$
y'	$-$		۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	$+\infty$

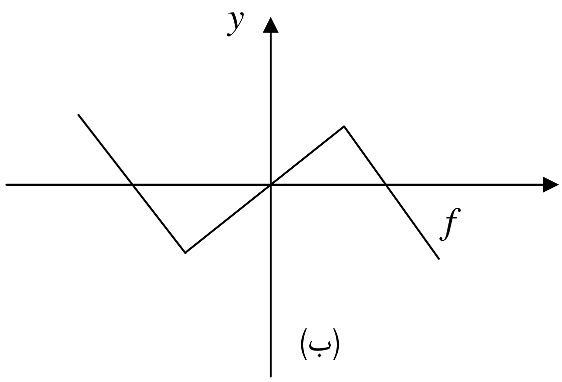


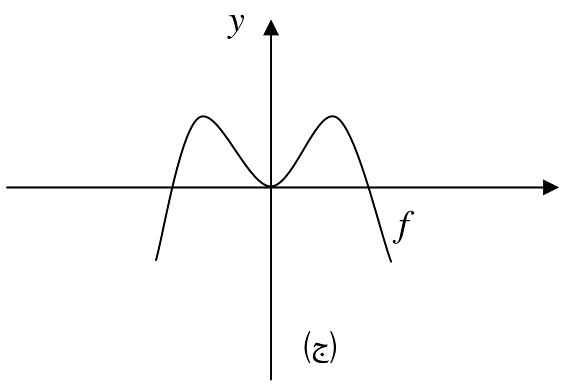
رسم نمودار مشتق به کمک نمودار تابع :

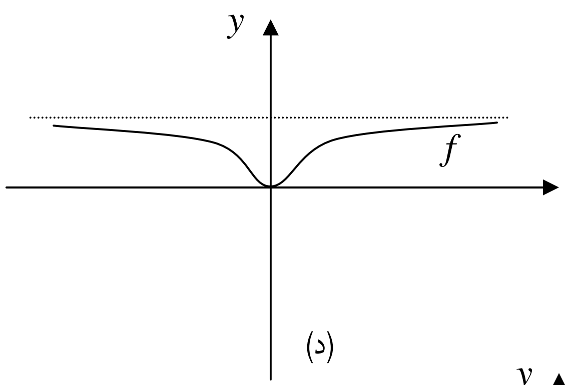
کافی است به نقاط اکسترمم ، نقاط عطف و صعودی و نزولی بودن تابع توجه شود.

تمرین : (تمرین ۵ ص ۱۵۲) : در هر مورد نمودار مشتق تابع را رسم کنید.

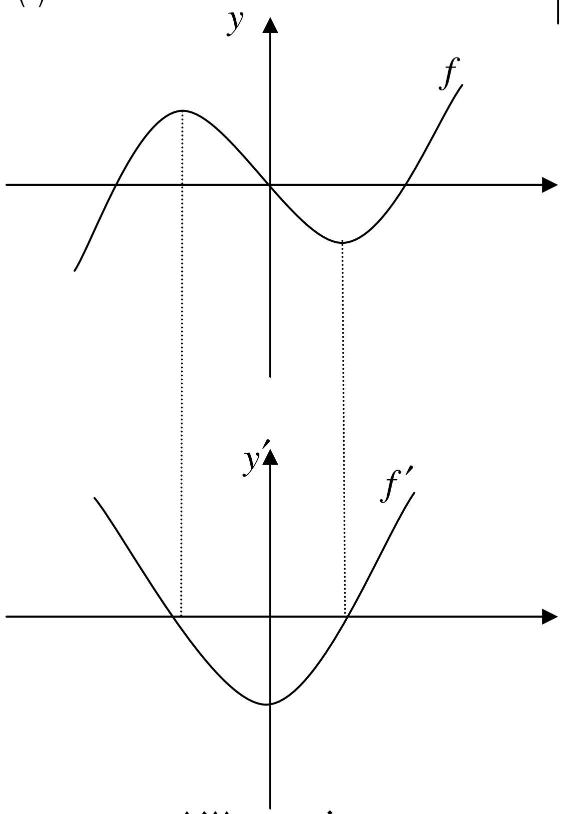




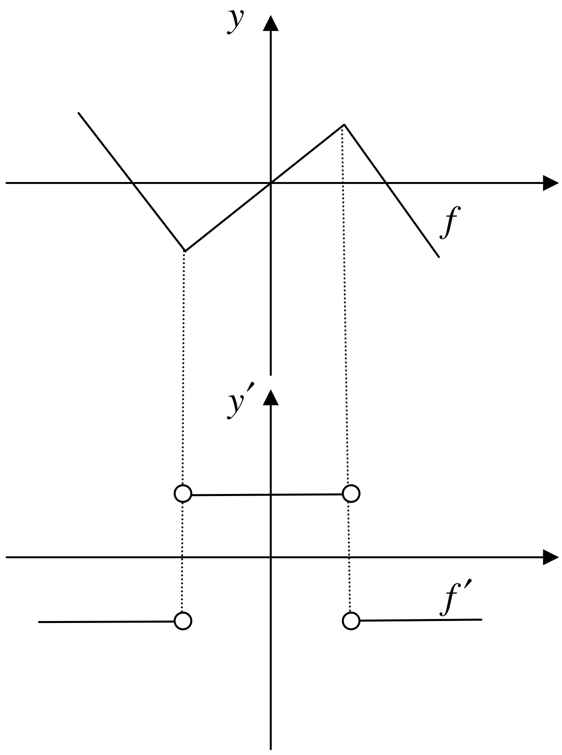




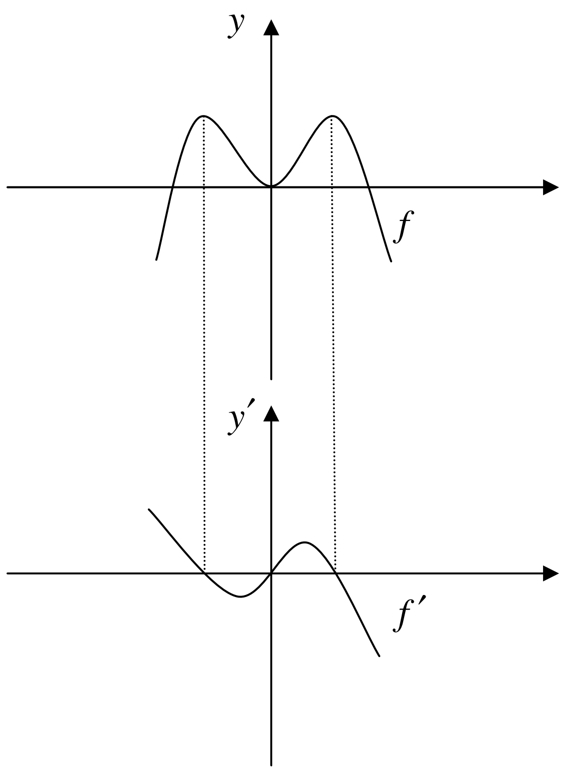
حل الف :



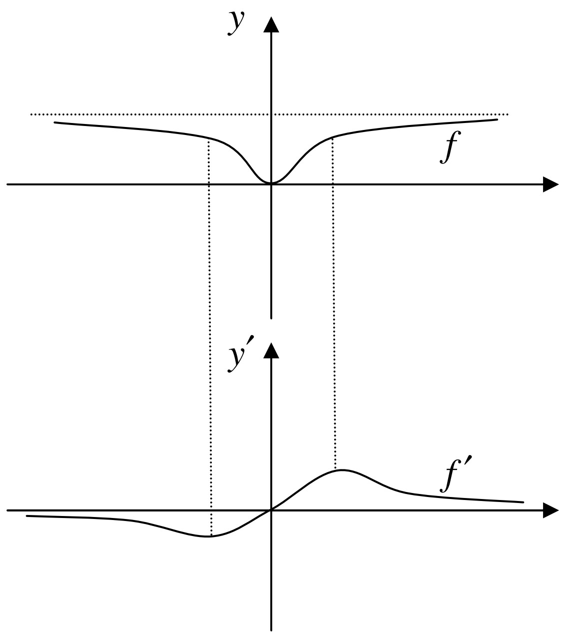
حل ب :



حل ج :



حل د :



***

رسم نمودار تابع به کمک مشتق

برای رسم نمودار یک تابع به ترتیب زیر عمل می کنیم.

۱- دامنه ی تابع را تعیین می کنیم.

۲- مجانب های منحنی را در صورت وجود بدست می آوریم.توجه کنید که توابع چند جمله ای مجانب ندارند.

۳- از تابع مشتق گرفته و نقاط ماگزیمم یا مینیمم آنرا در صورت وجود تعیین می کنیم.

۴- حد تابع را وقتی $x \to \pm\infty$ را بدست می آوریم.

۵- جدول تغییرات تابع را رسم می کنیم.

۶- روی دستگاه مختصات ابتدا نمودار مجانب های منحنی و سپس به کمک جدول تغییرات نمودار تابع را رسم می کنیم.

توجه:

۱- جهت افزایش دقت در رسم نمودار تابع و در صورت لزوم از چند نقطه با انتخاب طول یا عرض مناسب استفاده می کنیم.این نقاط را معمولاً نقاط کمکی می گویند.

۲- اگر لازم باشد، نقطه ی عطف تابع را به کمک مشتق دوم تابع تعیین می کنیم.

تمرین : جدول تغییرات (رفتار) و نمودار تابع های زیر را رسم کنید.

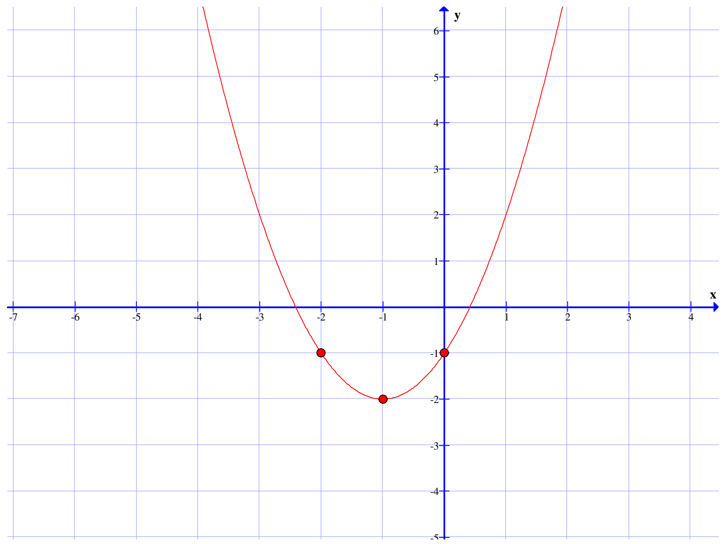
۱) $y = x^۲ + ۲x - ۱$

حل :

$$D_f = R$$

$$y = x^۲ + ۲x - ۱ \to y' = ۲x + ۲ \xrightarrow{y' = ۰} ۲x + ۲ = ۰ \to x = -۱$$

x	$-\infty$		-۲		-۱		۰		$+\infty$
y'		$-$		$-$	۰	$+$		$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-۱	$\searrow$	-۲	$\nearrow$	-۱	$\nearrow$	$+\infty$
					min				



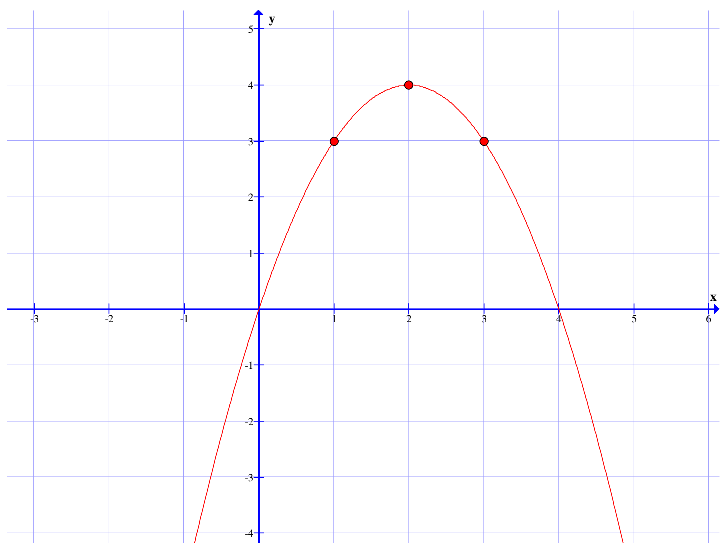
۲) $y=-x^{۲}+۴x$

حل :

$D_f = R$

$y=-x^{۲}+۴x \rightarrow y'=-۲x+۴ \xrightarrow{y'=۰} -۲x+۴=۰ \rightarrow x=۲$

x	$-\infty$		۱		۲		۳		$+\infty$
y'		+		+	۰	-		-	
y	$+\infty$	$\nearrow$	۳	$\nearrow$	۴ max	$\searrow$	۳	$\searrow$	$+\infty$



۳) $y=x^{3}-3x+1$

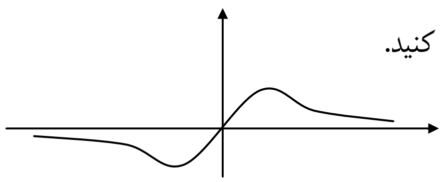
۴) $y=-x^{3}+3x$

۵) $y=x^{3}+3x$

۶) $y=x^{4}-4x^{3}$

۷) $y=\frac{2x+3}{x-1}$

تمرین: جدول تغییرات و نمودار منحنی تابع $f(x)=\frac{2x}{x^{2}+1}$ را رسم کنید.



تمرین: جدول رفتار و نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۱) $y=\frac{x^{2}+1}{x^{2}-1}$

۲) $y=\frac{x^{2}-4x+2}{x^{2}-2x+1}$

۳) $y=x+\sqrt{1-x^{2}}$

۴) $y=x+\frac{2}{\sqrt{x-1}}$

۵) $y=\frac{x^{2}}{\sqrt{x^{2}-1}}$

۶) $y=\frac{1+\sin^{2}x}{\cos x} \qquad x\in[0,2\pi]$

تمرین: جدول رفتار و نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۱) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

۲) $f(x)=\frac{x^{3}}{(x-1)^{2}}$

۳) $f(x)=\tan^{-1}(\frac{1}{x})$

بهینه سازی

در صنعت و اقتصاد فهمیدن بیشترین سود، کمترین هزینه ، کمترین سطح ، کمترین فاصله ، کمترین زمان و... بسیار مورد توجه قرار می گیرد. هرگاه به دنبال کمترین یا بیشترین مقدار توابع باشیم ، می توان از مفهوم مشتق تابع استفاده کنیم. فرایند حل این قبیل مسائل که به **مسائل بهینه سازی** موسومند به ترتیب زیر است.

۱ : متغیر ها و کمیت ها را نامگذاری می کنیم و شرایط و محدودیت های مسئله را می نویسیم.

۲ : برای کمیتی که قرار است بهینه (ماکزیمم یا مینیمم) شود، یک معادله می نویسیم. (معادله ی اولیه)

۳ : این معادله معمولاً دو متغیره است که با استفاده از یک رابطه ی کمکی که در مسئله داده شده (و ما آن را به دست آوردیم) این معادله را یک متغیره می کنیم. (معادله ی ثانویه)

۴ : با مشتق گیری و تعیین نقاط بحرانی ، مقادیر بهینه را به دست می آوریم. (اگر لازم باشد، جدول تغییرات رسم کنید.)

مثال : مجموع دو عدد مثبت برابر ۳۸ است. بیشترین مقدار ممکن برای حاصل ضرب آنها را بیابید.

حل :

$$x+y=۳۸ \rightarrow y=۳۸-x$$

$$P=xy=x(۳۸-x)=۳۸x-x^{۲}$$

$$P(x)=۳۸x-x^{۲} \rightarrow P'(x)=۳۸-۲x \xrightarrow{P'(x)=۰} ۳۸-۲x=۰ \rightarrow x=\frac{۳۸}{۲}=۱۹$$

$$Max(P)=۳۸(۱۹)-(۱۹)^{۲}=۳۶۱$$

تمرین : حاصل ضرب دو عدد مثبت ۶۴ است. کمترین مقدار ممکن برای مجموع آنها را بیابید.

حل :

$$x.y=۶۴ \rightarrow y=\frac{۶۴}{x} \rightarrow S=x+y=x+\frac{۶۴}{x}$$

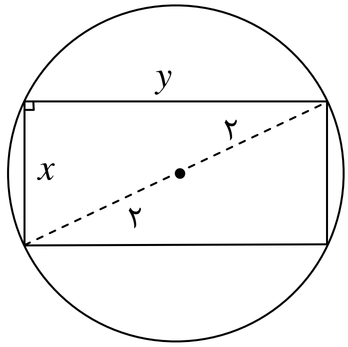
$$S(x)=x+\frac{۶۴}{x} \rightarrow S'(x)=۱+\frac{-۶۴}{x^{۲}} \xrightarrow{S'(x)=۰} ۱-\frac{۶۴}{x^{۲}}=۰ \rightarrow x^{۲}=۶۴ \rightarrow x=\pm ۸$$

با توجه به صورت مسئله فقط مقدار $x=۸$ قابل قبول است. پس $y=\frac{۶۴}{۸}=۸$ لذا :

$$Min(S)=x+y=۸+۸=۱۶$$

تمرین: مساحت بزرگترین مستطیلی که درون دایره ای به شعاع ۲ قرار می گیرد، را بیابید.

حل :



$$x^{۲} + y^{۲} = (۴)^{۲} \to y = \sqrt{۱۶ - x^{۲}}$$

$$S = x.y \to S(x) = x\sqrt{۱۶ - x^{۲}}$$

$$S'(x) = \sqrt{۱۶ - x^{۲}} + \frac{-x^{۲}}{\sqrt{۱۶ - x^{۲}}} = \frac{۱ - ۲x^{۲}}{\sqrt{۱۶ - x^{۲}}}$$

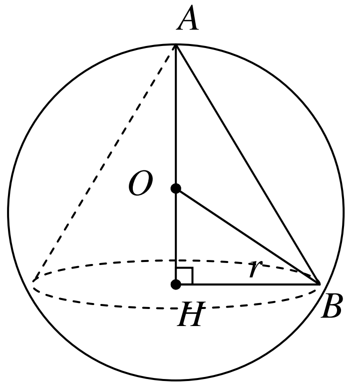
$$\xrightarrow{S'(x)=۰} ۱۶ - ۲x^{۲} = ۰ \to x = \pm\sqrt{۸}$$

با توجه به صورت مسئله واضح است که فقط جواب $x = \sqrt{۸}$ قابل قبول است. لذا $Max(S) = ۸$

***

تمرین : حجم بزرگترین مخروط دواری را بیابید که درون کره ای به شعاع ۵ محاط شده باشد.

حل : قرار می دهیم $AH = r$ پس $OH = AH - OA = h - ۵$ لذا در مثلث OBH می توان نوشت :



$$OH^{۲} + AH^{۲} = OA^{۲} \to (h - ۵)^{۲} + r^{۲} = ۲۵$$

$$\to r^{۲} = ۱۰h - h^{۲}$$

$$v = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲} h \to v(h) = \frac{۱}{۳}\pi(۱۰h - h^{۲})h = \frac{۱}{۳}\pi(۱۰h^{۲} - h^{۳})$$

$$\to v'(h) = \frac{۱}{۳}\pi(۲۰h - ۳h^{۲}) \xrightarrow{v'(h)=۰} \frac{۱}{۳}\pi(۲۰h - ۳h^{۲}) = ۰$$

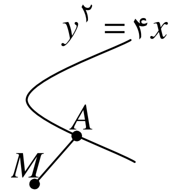
$$\to h = ۰\,, \quad h = \frac{۲۰}{۳}$$

x	$-\infty$	۰		$\frac{۲۰}{۳}$		۱۰	$+\infty$
v'	$-$	۰	$+$	۰	$-$		
v	$+\infty$	۰ min	$\nearrow$	$\frac{۴۰۰۰\pi}{۸۱}$ max	$\searrow$	۰	$-\infty$

$$\to Max(v) = \frac{۴۰۰۰\pi}{۸۱}$$

تمرین : مینیمم فاصله ی نقطه ی $M(۴,۰)$ از منحنی به معادله ی $y^۲ = ۴x$ را حساب کنید.

حل : فرض کنیم که نقطه ی $A = (\frac{\alpha^۲}{۴}, \alpha)$ نزدیکترین نقطه ی منحنی $y^۲ = ۴x$ از نقطه ی $M(۴,۰)$ باشد. پس :



$$d = AM = \sqrt{(\frac{\alpha^۲}{۴} - ۴)^۲ + (\alpha - ۰)^۲}$$

$$\to d(\alpha) = \sqrt{\frac{\alpha^۴}{۱۶} - \alpha^۲ + ۱۶} \to d'(\alpha) = \frac{\frac{\alpha^۳}{۴} - ۲\alpha}{۲\sqrt{\frac{\alpha^۴}{۱۶} - \alpha^۲ + ۱۶}}$$

$$\xrightarrow{d'(\alpha)=۰} \frac{\alpha^۳}{۴} - ۲\alpha = ۰ \to \alpha = ۰ , \quad \alpha = \pm ۲\sqrt{۲}$$

x	$-\infty$		$-۲\sqrt{۲}$		۰		$۲\sqrt{۲}$		$+\infty$
d'		−	۰	+	۰	−	۰	+	
d	$+\infty$	↘	$\sqrt{۱۲}$ min	↗	۴ max	↘	$\sqrt{۱۲}$ min	↗	$+\infty$

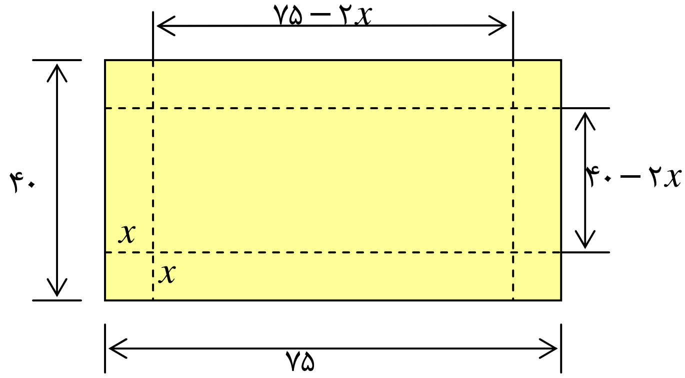
$$\to Min(d) = \sqrt{۱۲}$$

***

حل تمرینات مهم

۱ : (مثال ص ۱۶۹) می خواهیم یک جعبه ی در باز از قطعه ی مستطیل شکلی از مقوا، به طول ۷۵ و به عرض ۴۰ سانتی بسازیم. با این روش مربع هایی با اندازه های مساوی از ۴ گوشه برش می زنیم و جدا می کنیم. حساب کنید که طول ضلع این مربع ها چقدر باشد تا جعبه ی ساخته شده ، بیشترین حجم ممکن را داشته باشد؟

حل : حجم جعبه برابر حاصل ضرب مساحت قاعده در ارتفاع آن است. یعنی :



$$v=(۷۵-۲x)(۴۰-۲x)(x)$$

$$\rightarrow v=۴x^{۳}-۲۳۰x^{۲}+۳۰۰۰x$$

$$D_f=[۰,۲۰]$$

$$\rightarrow v'=۱۲x^{۲}-۴۶۰x+۳۰۰۰$$

$$\xrightarrow{v'=۰} ۱۲x^{۲}-۴۶۰x+۳۰۰۰=۰$$

$$\xrightarrow{\div ۲} ۶x^{۲}-۲۳۰x+۱۵۰۰=۰$$

$$\xrightarrow{\Delta=(-۲۳۰)^{۲}-۴(۶)(۱۵۰۰)=۱۶۹۰۰} x=\frac{۲۳۰+۱۳۰}{۱۲}=۳۰(\text{غ})\ ,\ \ x=\frac{۲۳۰-۱۳۰}{۱۲}=\frac{۵۰}{۳}$$

***

۲ : (تمرین در کلاس ص ۱۷۴) نقاط بحرانی تابع f با ضابطه ی $f(x)=\sqrt{۱-x^{۲}}$ را در دامنه اش بیابید.

حل :

$$D_f=[-۱,۱]$$

$$f'(x)=\frac{-۲x}{۲\sqrt{۱-x^{۲}}}=\frac{-x}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$$

حال ریشه های صورت و مخرج را به دست می آوریم.

ریشه ی صورت $x=۰$ می باشد و چون نقطه ی درونی دامنه است، پس یک نقطه ی بحرانی می باشد.

ریشه های مخرج $x=۱$ و $x=-۱$ می باشند و چون نقاط درونی دامنه نمی باشند، پس بحرانی نیستند.

***

۳ : (مثال ص ۱۷۵) مقادیر ماکزیمم و مینیمم تـابع f بـا ضـابطه ی $f(x)=-۲x^۳+۳x^۲$ را روی بـازه ی $[-\frac{۱}{۲},۲]$ بیابید.

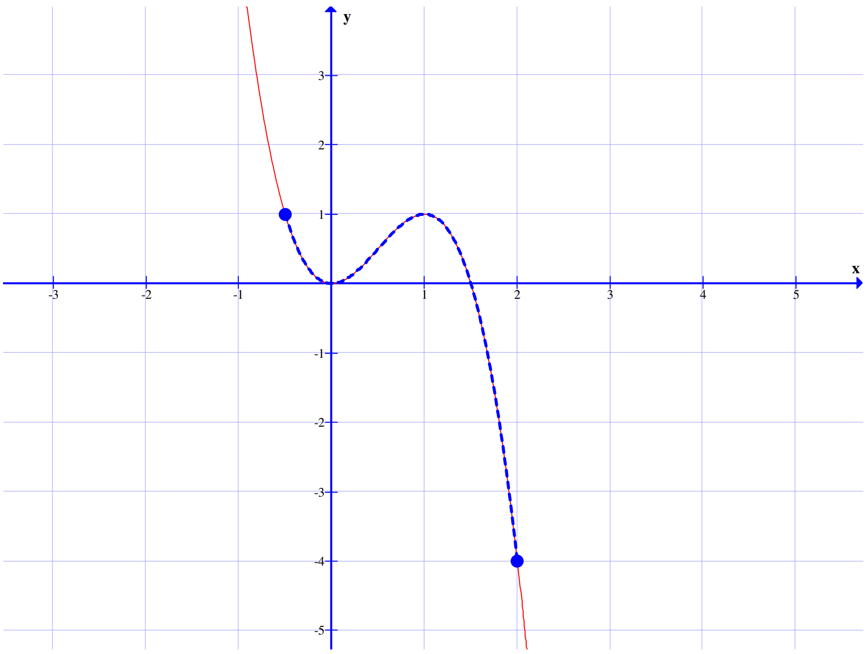
حل :

$D_f = R$

$f'(x)=-۶x^۲+۶x \xrightarrow{f'(x)=۰} -۳x^۲+۶x=۰ \to x=۰ \;,\; x=۱$

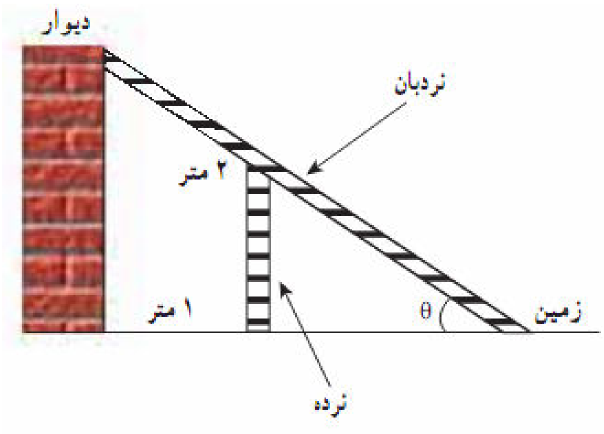
x	$-\infty$		۰		۱		$+\infty$
y'		$-$	۰	$+$	۰	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	۰ min	$\nearrow$	۱ max	$\searrow$	$-\infty$

توجه کنید که مقادیر تابع در نقاط انتهایی عبارتند از $f(۲)=۴$ و $f(-\frac{۱}{۲})=۱$. بنابراین مقدار ماکزیمم تابع برابر ۱ می باشد که در نقاط $x=-\frac{۱}{۲}$ و $x=۱$ رخ می دهد و صفر مقدار مینیمم نسبی تابع است که در نقطه ی $x=۰$ بـه دسـت می آید. همچنین ۴- مقدار مینیمم مطلق تابع است که در نقطه ی۲ اتفاق می افتد. به شکل زیـر توجـه کنیـد. ایـن شـکل نمودار تابع را در دامنه اش ، یعنی را نشان می دهد.

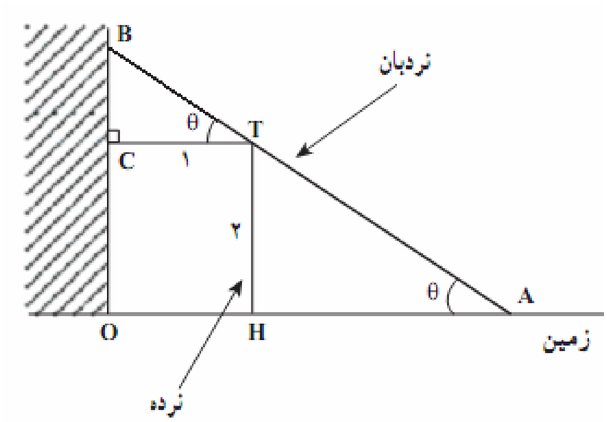


***

۴ : (مثال ص ۱۷۶) در شکل روبرو یک نرده به ارتفاع ۲ متر و به طور قائم بر زمین، به فاصله ی ۱ متر از یک دیوار قائم قرار دارد. طول کوتاه ترین نردبانی را تعیین کنید که از روی نرده ی به ارتفاع ۲ متر گذشته و یک سر آن روی زمین و خارج نرده و سر دیگر آن مماس بر دیوار قائم باشد.



حل : اندازه ی زاویه ی نردبان (AB) با زمین را θ فرض می کنیم و طول نردبان (L) را به صورت تابعی از θ به دست می آوریم. ($\circ < \theta < \frac{\pi}{۲}$).



$$AB = BT + TA$$

در مثلث های قائم الزاویه ی AHT و TCB داریم.

$$\sin\theta = \frac{۲}{AT} \quad \text{و} \quad \cos\theta = \frac{۱}{BT}$$

$$L = AT + BT \rightarrow L(\theta) = \frac{۱}{\cos\theta} + \frac{۲}{\sin\theta}$$

$$L'(\theta) = \frac{\sin\theta}{\cos^۲\theta} - \frac{۲\cos\theta}{\sin^۲\theta} = \frac{\sin^۳\theta - ۲\cos^۳\theta}{\sin^۲\theta\cos^۲\theta} \xrightarrow{L'(\theta)=\circ} \frac{\sin^۳\theta - ۲\cos^۳\theta}{\sin^۲\theta\cos^۲\theta} = \circ$$

$$\sin^۳\theta - ۲\cos^۳\theta = \circ \rightarrow \tan^۳\theta = ۲ \rightarrow \tan\theta = \sqrt[۳]{۲}$$

و یا $\theta = \tan^{-۱}(\sqrt[۳]{۲})$ که یک نقطه ی بحرانی تابع L است.

θ	$\circ$		$\tan^{-۱}(\sqrt[۳]{۲})$		$\frac{\pi}{۲}$
$L'(\theta)$		$-$	$\circ$	$+$	
$L(\theta)$	$+\infty$	$\searrow$	$L(\theta_\circ)$ Min	$\nearrow$	$+\infty$

در نتیجه به ازای $\theta = \tan^{-۱}(\sqrt[۳]{۲})$ مقدار $L(\theta)$ به دست می آید. حال اگر بخواهیم طول کوتاه ترین نردبان را حساب کنیم، به صورت زیر عمل می کنیم.

$$\frac{۱}{\cos^{۲}\theta}=۱+\tan^{۲}\theta=۱+\sqrt[۳]{۴}\rightarrow\cos\theta=\frac{۱}{\sqrt{۱+\sqrt[۳]{۴}}}$$

و

$$\sin\theta=\tan\theta.\cos\theta=\frac{\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt{۱+\sqrt[۳]{۴}}}$$

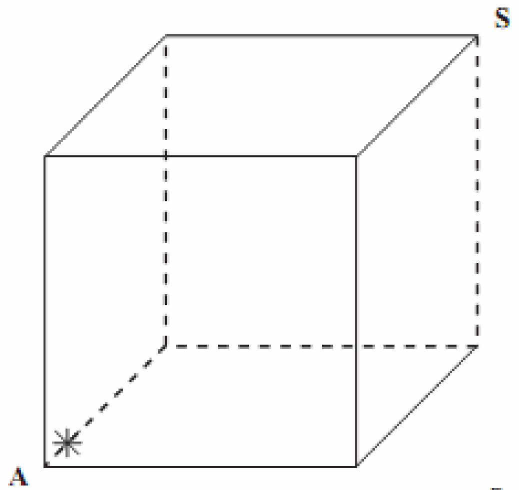
در نتیجه ، مقدار مینیمم مطلق $L(\theta)$ روی بازه ی $(۰,\frac{\pi}{۲})$ عبارت است از :

$$L(\theta)=\frac{۱}{\cos\theta}+\frac{۲}{\sin\theta}=\sqrt{۱+\sqrt[۳]{۴}}+\frac{۲\sqrt{۱+\sqrt[۳]{۴}}}{\sqrt[۳]{۲}}$$

بنابراین طول کوتاه ترینردبانی که بتوان یک سر آن را از بالای نرده به دیوار تکیه دارد و سر دیگرش بر زمین و خارج نرده باشد، تقریباً ۴/۱۶ متر است.

***

۵ : (مثال ص ۱۷۸) (مسئله ی کوتاه ترین مسیر عنکبوت) مطابق شکل روبرو یک عنکبوت در گوشه ی S از سقف اتاق مکعب شکل که هر ضلع آن ۳ متر است قرار دارد و می خواهد یک مگس که در گوشه ی مقابل او (A) روی کف اتاق نشسته را شکار کند. عنکبوت مجبور است روی سقف اتاق حرکت کند (نمی تواند پرواز کند.) و سپس روی دیوار ها یا کف اتاق راه برود، او می خواهد کوتاه ترین مسیر برای شکار مگس را پیدا کند . او را راهنمایی کنید. فراموش نکنید که معمولاً موجودات به طور غریزی کوتاه ترین مسیر را انتخاب می کنند.

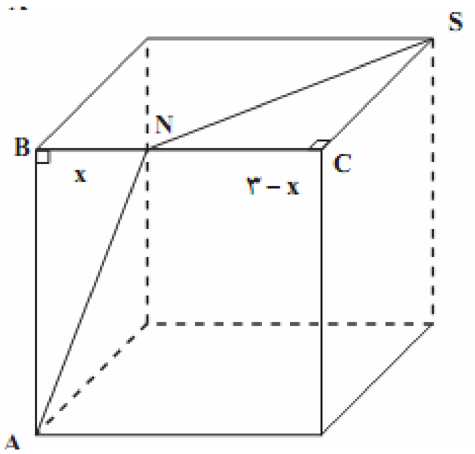


حل : فرض کنیم مسیر عنکبوت از S به N و از N به A باشد.

$d=SN+NA$ طول مسیر

اگر $BN=x$ فرض کنیم، آنگاه $NC=۳-x$. بنابر این:

$d(x)=\sqrt{(۳-x)^{۲}+۹}+\sqrt{x^{۲}+۹}$ تابع طول مسیر



$$d'(x)=\frac{-۲(۳-x)}{۲\sqrt{۹+(۳-x)^۲}}+\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+۹}}=\frac{-(۳-x)\sqrt{۹+x^۲}+x\sqrt{۹+(۳-x)^۲}}{(\sqrt{۹+(۳-x)^۲})(\sqrt{x^۲+۹})}$$

$$\xrightarrow{d'(x)=۰}-(۳-x)\sqrt{۹+x^۲}+x\sqrt{۹+(۳-x)^۲}=۰\rightarrow(۳-x)\sqrt{۹+x^۲}=x\sqrt{۹+(۳-x)^۲}$$

طرفین معادله را به توان ۲ رسانده و پس از ساده کردن و حذف جمله های مساوی از طرفین معادله ، داریم:

$$۲x=۳\rightarrow x=\frac{۳}{۲}$$

پس نقطه ی بحرانی بازه ی $(۰,۳)$ می شود. $x=\frac{۳}{۲}$

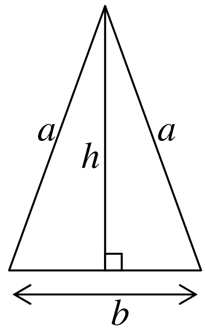
x	۰		$\frac{۳}{۲}$		۳
$d'(x)$		−	۰	+	
$d(x)$	$۳(۱+\sqrt{۲})$	↘	$۳\sqrt{۵}$	↗	$۳(۱+\sqrt{۲})$

بنابراین کوتاه ترین مسیر وقتی است که N وسط ضلع BC باشد. مقدار مینیمم طول مسیر $۳\sqrt{۵}$ است.

***

۶ (تمرین در کلاس ص ۱۷۸) نشان دهید که در بین همه ی مثلث های متساوی الساقینی که محیط یکسانی دارند، مثلث متساوی الاضلاع دارای بیشترین مساحت است.

حل :



$$a^2 = h^2 + (\frac{b}{2})^2 \to h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} \quad (1)$$

$$P = a + a + b \to b = P - 2a \to b^2 = P^2 - 4Pa + 4a^2 \quad (2)$$

$$(1),(2) \to h = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}(P^2 - 4Pa + 4a^2)} \to h = \sqrt{Pa - \frac{1}{4}P^2}$$

$$S = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(P - 2a)\sqrt{Pa - \frac{1}{4}P^2} \to S(a) = \frac{1}{2}(P - 2a)\sqrt{Pa - \frac{1}{4}P^2}$$

$$S'(a) = (-1)\sqrt{Pa - \frac{1}{4}P^2} + \frac{1}{2}(P - 2a) \times \frac{P}{2\sqrt{Pa - \frac{1}{4}P^2}}$$

$$\xrightarrow{S'(a)=0} \frac{-2Pa + \frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}P^2 - Pa}{2\sqrt{Pa - \frac{1}{4}P^2}} = 0$$

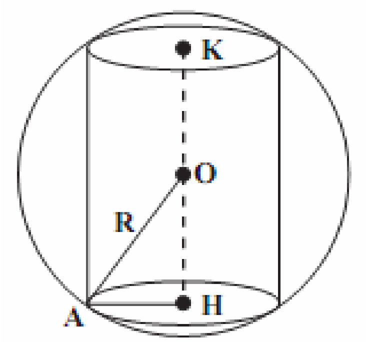
$$-3Pa + P^2 = 0 \to P(-3a + P) = 0 \xrightarrow{P \neq 0} P = 3a \xrightarrow{P = 2a + b} 2a + b = 3a \to b = a$$

یعنی مثلث متساوی الساقین است.

***

۷ : (مثال ص ۱۷۹) می خواهیم در کره ای به شعاع R یک استوانه ی دوار قائم طوری محاط کنیم که بزرگترین حجم را داشته باشد. در این صورت شعاع قاعده و ارتفاع استوانه را بیابید.

حل : فرض کنیم استوانه ی مورد نظر دارای شعاع r و ارتفاع h می باشد و $KH = h$ و $AH = r$ و به علت تقارن مرکز کره نقطه ی O وسط KH است. بنابراین :



$$\Delta OHA : h^2 + r^2 = R^2$$

و حجم استوانه برابر است با :

$$V = \pi r^2 h = \pi h(R^2 - \frac{h^2}{4}) \quad ; \quad 0 \le h \le 2R$$

واضح است که اگر $h = 0$ یا $h = 2R$ باشد، $V = 0$. بنابر این نقاط بحرانی

تابع حجم استوانه را بر حسب متغیر h در بازه ی $(۰,۲R)$ پیدا می کنیم.

$$V'(h)=\pi(R۲-\frac{h^۲}{۴}-\frac{h^۲}{۲})=۰\to h=\frac{۲R}{\sqrt{۳}}$$ نقطه ی بحرانی

h	۰		$\frac{۲R}{\sqrt{۳}}$		۲R
V′(h)		+	۰	−	
V(h)	۰	↗	$\frac{۴\pi R^۳}{۳\sqrt{۳}}$	↘	۰

بنابر این تابع حجم استوانه در بازه ی $[۰,۲R]$ را به ازای $h=\frac{۲R}{\sqrt{۳}}$ و $r=\frac{\sqrt{۲}R}{\sqrt{۳}}$ مقدار ماکسیمم حجم آن $\frac{۴\pi R^۳}{۳\sqrt{۳}}$ است.

***

۸ : (مسئله ی ۱ ص ۱۸۰) مجموع دو عدد مثبت برابر ۹ است. بزرگترین مقدار ممکن برای حاصل ضرب آنها را پیدا کنید.

حل :

$$x+y=۹\to y=۹-x$$

$$P=xy=x(۹-x)=۹x-x^۲$$

$$P(x)=۹x-x^۲\to P'(x)=۹-۲x\xrightarrow{P'(x)=۰}۹-۲x=۰\to x=\frac{۹}{۲}$$

$$Max(P)=۹(\frac{۹}{۲})-(\frac{۹}{۲})^۲=\frac{۸۱}{۴}$$

***

۹ : (مسئله ی۲ ص ۱۸۰) حاصل ضرب دو عدد مثبت برابر ۸ است. کمترین مقدار ممکن برای مجموع آنها را پیدا کنید؟

حل :

$$x.y=۸\to y=\frac{۸}{x}\to S=x+y=x+\frac{۸}{x}$$

$$S(x)=x+\frac{۸}{x}\to S'(x)=۱+\frac{-۸}{x^۲}\xrightarrow{S'(x)=۰}۱-\frac{۸}{x^۲}=۰\to x^۲=۸\to x=\pm ۲\sqrt{۲}$$

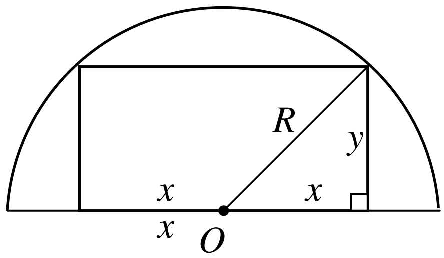
با توجه به صورت مسئله فقط مقدار $x=۲\sqrt{۲}$ قابل قبول است. پس $y=\frac{۸}{۲\sqrt{۲}}$ لذا :

$$Min(S)=x+y=۲\sqrt{۲}+\frac{۸}{۲\sqrt{۲}}=\frac{۸+۸}{۲\sqrt{۲}}=\frac{۸}{\sqrt{۲}}=۴\sqrt{۲}$$

***

۱۰ : (مسئله ی۳ ص ۱۸۰) مساحت بزرگترین مستطیلی را بیابید که در نیم دایره ای به شعاع R محاط شده است و یک ضلع مستطیل روی قطر نیم دایره قرار دارد.

حل :



$$x^۲+y^۲=R^۲\to y^۲=R^۲-x^۲$$

مستطیل $S=۲xy=۲x\sqrt{R^۲-x^۲}\to S(x)=۲x\sqrt{R^۲-x^۲}$

$$S(x)=۲x\sqrt{R^۲-x^۲}$$

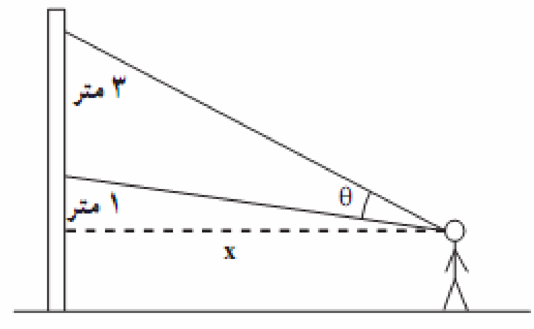
$$\to S'(x)=۲\sqrt{R^۲-x^۲}+(\frac{-۲x}{۲\sqrt{R^۲-x^۲}})(۲x)=\frac{۲(R^۲-x^۲)-۲x^۲}{\sqrt{R^۲-x^۲}}=\frac{۲R^۲-۴x^۲}{\sqrt{R^۲-x^۲}}$$

$$\xrightarrow{S'(x)=۰}۲R^۲-۴x^۲=۰\to x^۲=\frac{R^۲}{۲}\to x=\pm\frac{R}{\sqrt{۲}}$$

با توجه به صورت مسئله، فقط $x=\frac{R}{\sqrt{۲}}$ قابل قبول است. پس :

$$Max(S)=\frac{۲R}{\sqrt{۲}}\sqrt{R^۲-\frac{R^۲}{۲}}=\frac{۲R}{\sqrt{۲}}\times\frac{R}{\sqrt{۲}}=R^۲$$

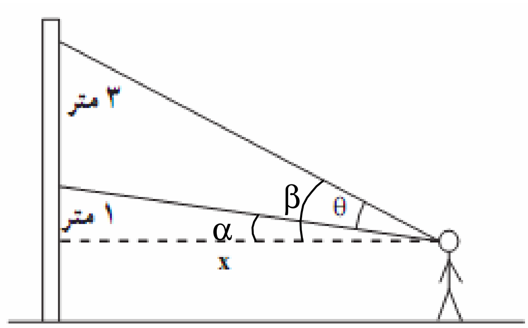
***



۱۱ : (مسئله ی۴ ص ۱۸۰) (بهترین دید از یک دیوار نقاشی)

شخصی باید در چه فاصله ای از یک نقاشی دیواری به ارتفاع ۳ متر بایستد تا بهترین دید را از آن داشته باشد. (شکل روبرو) ، با این فرض که پایین نقاشی ۱ متر بالاتر از خط دید شخص است.

حل :



$$\tan\beta=\frac{۴}{x} \quad , \quad \tan\alpha=\frac{۱}{x}$$

$$\theta=\beta-\alpha\rightarrow\tan\theta=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{۱+\tan\beta\tan\alpha}$$

$$=\frac{\frac{۴}{x}-\frac{۱}{x}}{۱+\frac{۴}{x}\times\frac{۱}{x}}=\frac{۳x}{x^{۲}+۴}\rightarrow\theta=\tan^{-۱}(\frac{۳x}{x^{۲}+۴})$$

$$\theta(x)=\tan^{-۱}(\frac{۳x}{x^{۲}+۴})\rightarrow\theta'(x)=\frac{\frac{۱۲-۳x^{۲}}{(x^{۲}+۴)^{۲}}}{۱+(\frac{۳x}{x^{۲}+۴})^{۲}}$$

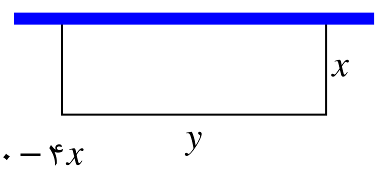
$$\xrightarrow{\theta'(x)=۰}۱۲-۳x^{۲}=۰\rightarrow x^{۲}=۴\rightarrow x=\pm۲$$

با توجه به صورت مسئله فقط $x=۲$ قابل قبول است.

***

۱۲ : (مسئله ی۵ ص ۱۸۰) قرار است محوطه ای مستطیل شکل برای نگهداری گوسفند ها ساخته شود، یک طرف این محوطه دیوار طویلی است که از قبل وجود داشته است و سه طرف دیگر آن را باید نرده گذاری کنیم. اگر ۱۵۰ متر نرده در اختیار داشته باشیم، بیشترین مساحت ممکن برای محوطه ی مورد نظر چقدر است؟

حل :



$$۲x+y=۱۵۰\rightarrow y=۱۵۰-۲x$$

$$S=x.y\rightarrow S(x)=x(۱۵۰-۲x)=۱۵۰x-۲x^{۲}\rightarrow S'(x)=۱۵۰-۴x$$

$$\xrightarrow{S'(x)=0} 150-4x=0 \to x=\frac{150}{4}\ m$$

$$Max(S)=150(\frac{150}{4})-2(\frac{150}{4})^2=2812/5 \quad m^2$$

***

۱۳ : (مثال ص ۱۸۲) مشخص کنید که تابع f با ضابطه ی $f(x)=2x^3-3x^2-12x+7$ در چه فاصله ای صعودی اکید و در چه فاصله ای نزولی اکید است.

حل :

$$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)\xrightarrow{f'(x)=0}(x+1)(x-2)=0 \to x=-1 \quad , \quad x=2$$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$+\infty$	$\nearrow$	0 max	$\searrow$	0 min	$\nearrow$	$+\infty$

***

۱۴ : (تمرین در کلاس ص ۱۸۳) تابع f با ضابطه ی $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ در چه بازه ای صعودی اکید و در چه بازه ای نزولی اکید است؟

حل :

$$y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \quad و \quad D_{f'}=R-\{0\}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		−	ن	+	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

***

۱۵ : (مثال ص ۱۸۴) تابع f با ضابطه ی $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+4$ روی چه بازه ای صعودی اکید یا نزولی اکید و روی چه بازه ای نمودار تابع f تقعر رو به بالا یا تقعر رو به پایین دارد؟

حل :

$$f'(x)=x^{۲}-۲x-۳\xrightarrow{f'(x)=۰}(x+۱)(x-۳)=۰\to x=-۱\quad,\quad x=۳$$

$$f''(x)=۲x-۲\xrightarrow{f''(x)=۰}۲x-۲=۰\to x=۱$$

x	$-\infty$		-۱		۱		۳		$+\infty$
y'		+	۰	−		−	۰	+	
y''		−		−	۰	+		+	
y	$+\infty$	$\cap\ \nearrow$	$\frac{۱۷}{۳}$ max	$\cap\ \searrow$	$\frac{۱}{۳}$ عطف	$\cup\ \searrow$	-۵ min	$\nearrow\ \cup$	$+\infty$

***

۱۶ : (تمرین در کلاس ص ۱۸۵) تابع f با ضابطه ی $f(x)=\frac{x}{۱+x^{۲}}$ روی چه بازه ای صعودی اکید یا نزولی اکید و روی چه بازه ای نمودار تابع f تقعر رو به بالا یا تقعر رو به پایین دارد؟

حل :

$$f'(x)=\frac{۱(۱+x^{۲})-(۲x)(x)}{(۱+x^{۲})^{۲}}=\frac{۱-x^{۲}}{(۱+x^{۲})^{۲}}\xrightarrow{f'(x)=۰}۱-x^{۲}=۰\to x=\pm ۱$$

$$f''(x)=\frac{-۲x(۱+x^{۲})^{۲}-۴x(۱+x^{۲})(۱-x^{۲})}{(۱+x^{۲})^{۴}}$$

$$\xrightarrow{f''(x)=۰}(۱+x^{۲})(-۲x(۱+x^{۲})-۴x(۱-x^{۲}))=۰\to -۲x(۱+x^{۲})-۴x(۱-x^{۲})=۰$$

$$\to ۲x^{۳}-۶x=۰\to x=۰\quad,\quad x=\pm\sqrt{۳}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{۳}$		-۱		۰		۱		$\sqrt{۳}$		$+\infty$
y'		−		−	۰	+		+	۰	−		−	
y''		−	۰	+		+	۰	−	۰	−	۰	+	
y	۰	$\cap\ \searrow$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ عطف	$\cup\ \searrow$	$-\frac{۱}{۲}$ min	$\nearrow\ \cup$	۰ عطف	$\nearrow\ \cap$	$\frac{۱}{۲}$ max	$\cap\ \searrow$	$\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ عطف	$\searrow\ \cup$	۰

توجه : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x}{1+x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$

***

۱۷ : (مثال ص ۱۸۶) جهت تقعر نمودار تابع f با ضابطه ی $f(x)=x^4-4x^3$ را در دامنه اش بررسی نموده و نقاط عطف آن را به دست آورید.

حل :

$$f'(x)=4x^3-12x^2 \to f''(x)=12x^2-24x \xrightarrow{f''(x)=0} 12x(x-2)=0 \to x=0\,,\ x=2$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y''		+	0	−	0	+	
y	$+\infty$ $\cup$		0 عطف	$\cap$	-16 عطف		$+\infty$ $\cup$

***

۱۸ : (تمرین در کلاس ص ۱۸۷) جهت تقعر نمودار تابع f با ضابطه ی $f(x)=2+\sqrt[3]{x}$ را در دامنه اش بررسی نموده و نقطه ی عطف آن را به دست آورید.

حل :

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}>0$$

$$f'(x)=\frac{-2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y''		+	نامعین	+	
y	$+\infty$ $\cup$		2 عطف		$+\infty$ $\cup$

تابع f در $x=0$ پیوسته است ولی مشتق اول و دوم ندارد. تابع f در $x=0$ خط مماس قائم دارد و جهت تقعر در این نقطه عوض می شود. بنابر این نقطه ی $(0,2)$ نقطه ی عطف تابع است.

***

۱۹ : (مثال ص ۱۹۰) مقادیر اکسترمم موضعی تابع f با ضابطه ی $f(x)=\sqrt[3]{\sin^2 x}$ را روی بازه ی $(-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3})$ را پیدا کنید.

حل:

$$f'(x)=\frac{2\cos x}{3\sqrt[3]{\sin x}}\ ,\quad x\neq 0$$

$$\xrightarrow{f'(x)=0}\frac{2\cos x}{3\sqrt[3]{\sin x}}=0\to \cos x=0\to x=\frac{\pi}{2}$$ بحرانی

$$\sin x=0\to x=0$$ بحرانی

x	$-\infty$	$-\frac{\pi}{6}$		0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$	$+\infty$
y'			$-$	نامعین	$+$	0	$-$		
y			$\searrow$	0 min	$\nearrow$	1 max	$\searrow$		

***

۲۰ : (تمرین در کلاس ص ۱۹۱) مقدار ماکسیمم و مینیمم موضعی تابع f با ضابطه ی $f(x)=\sqrt{3}x-2\cos x$ روی بازه ی $(0,2\pi)$ را پیدا کنید.

حل :

$$f'(x)=\sqrt{3}+2\sin x\xrightarrow{f'(x)=0}\sqrt{3}+2\sin x=0\to \sin x=\frac{-\sqrt{3}}{2}\to x=\begin{cases}x=\frac{4\pi}{3}\\ x=\frac{5\pi}{3}\end{cases}$$

x	$-\infty$	0		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π	$+\infty$
y'			$+$	0	$-$	0	$+$		
y		-2	$\nearrow$	$\frac{4\sqrt{3}}{3}+1$ max	$\searrow$	$\frac{5\sqrt{3}}{3}-1$ min	$\nearrow$	-2	

***

۲۱ : (تمرین در کلاس ص ۱۹۲) با فرض اینکه $f(x)=x^{۴}-۲x^{۳}$ با اعمال آزمون مشتق دوم ، مقادیر اکسترمم هـای موضعی f را بیابید و نمودار f را رسم کنید.

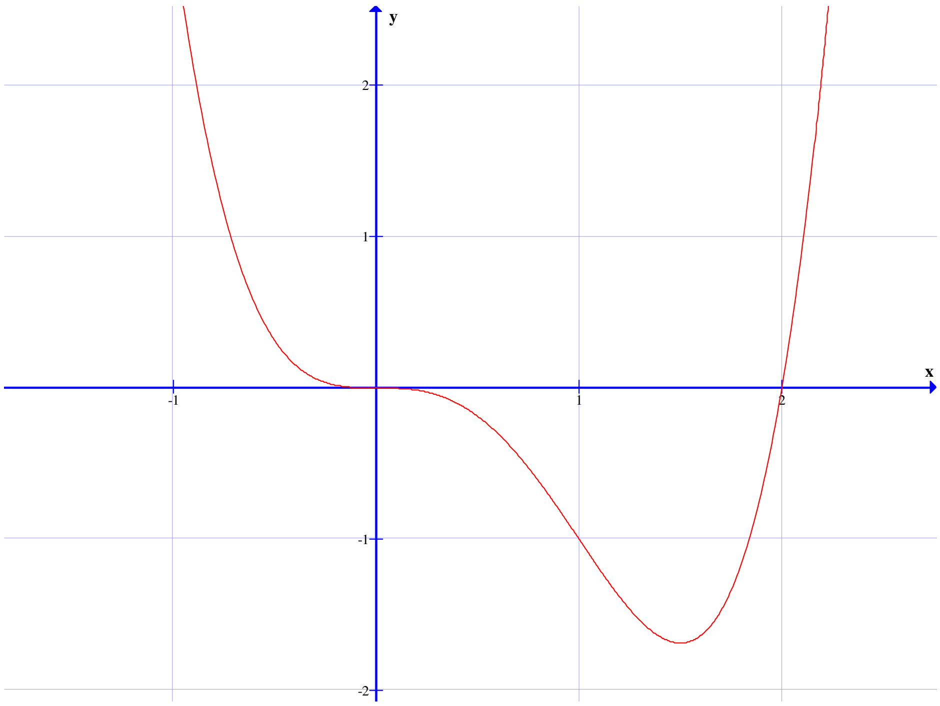
حل :

$$f(x)=x^{۴}-۲x^{۳} \rightarrow f'(x)=۴x^{۳}-۶x^{۲} \xrightarrow{f'(x)=۰} ۴x^{۳}-۶x^{۲}=۰ \rightarrow x=۰\,,\ \ x=\frac{۳}{۲}$$

$$f''(x)=۱۲x^{۲}-۱۲x \rightarrow \begin{cases} f''(۰)=۰ \\ f''(\frac{۳}{۲})=۹>۰ \end{cases}$$

لذا $x=۰$ اکسترمم نیست و $x=\frac{۳}{۲}$ مینیمم نسبی است.

x	$-\infty$		۰		$\frac{۳}{۲}$		$+\infty$
y'		-	۰	−	۰	+	
y	$+\infty$	↘	۰	↘	$-\frac{۲۷}{۱۶}$ min	↗	$+\infty$



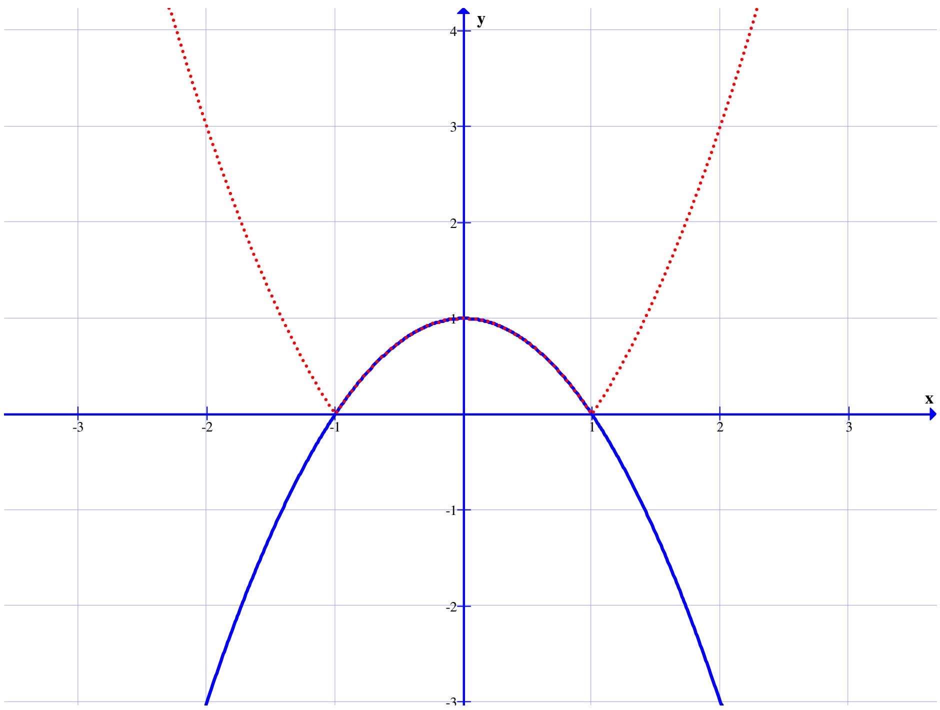
***

حل تمرینات مهم

۲۲ : (مسئله ی ۱ ص ۱۹۳) اگر تابع f دارای ماکزیمم مطلق بوده و $g(x)=|f(x)|$ باشد.آیا g حتماً ماکزیمم مطلق دارد؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

حل :

خیر، تابع $f(x)=-x^{۲}+۱$ در نقطه‌ی $x=۰$ دارای ماکزیمم مطلق بوده ولی تابع $g(x)=|f(x)|=|-x^{۲}+۱|$ دارای ماکزیمم مطلق نیست. به نمودار های این دو تابع توجه کنید.



***

۲۳ : (مسئله ی ۲ ص ۱۹۳) نقاط بحرانی تابع f با ضابطه ی $f(x)=x|x^{۲}-۱|$ را بیابید.

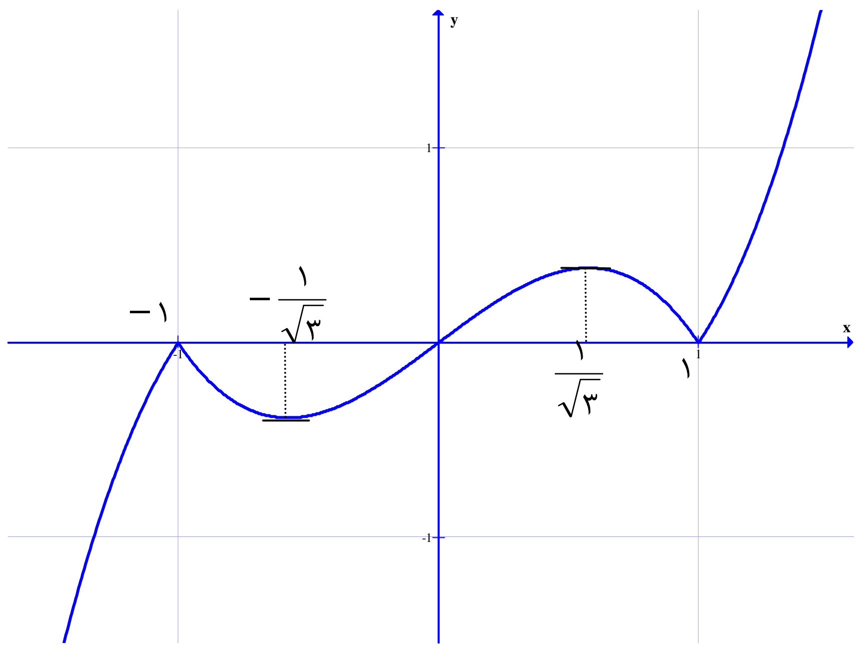
حل : ابتدا معادله ی تابع را به صورت چند ضابطه ای تبدیل می کنیم.

$$f(x)=x|x^{۲}-۱|=\begin{cases} x(x^{۲}-۱) & x\le -۱ \\ -x(x^{۲}-۱) & -۱<x<۱ \\ x(x^{۲}-۱) & x\ge ۱ \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} ۳x^{۲}-۱ & x<-۱ \\ -۳x^{۲}+۱ & -۱<x<۱ \\ ۳x^{۲}-۱ & x<۱ \end{cases}$$

تابع در نقاط $x=\pm۱$ مشتق پذیر نیست. از طرفی نقاط $x=\pm\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ ریشه های مشتق می باشند. این چهار نقطه نقاط درونی دامنه ی تابع یعنی R می باشند. پس همگی نقاط بحرانی نمودار تابع می باشند.

توجه : با رسم نمودار تابع این مطلب نیز قابل تأیید است.



***

۲۴ : (مسئله ی ۳ ص ۱۹۳) نقاط بحرانی تابع f با ضابطه ی $f(x)=|x-۱|\sqrt[۳]{x^{۲}}$ را پیدا کنید.

حل : ابتدا معادله ی تابع را به صورت چند ضابطه ای تبدیل می کنیم.

$$f(x)=|x-۱|\sqrt[۳]{x^{۲}}=\begin{cases} (x-۱)\sqrt[۳]{x^{۲}} & x\geq ۱ \\ -(x-۱)\sqrt[۳]{x^{۲}} & x<۱ \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} \sqrt[۳]{x^{۲}}+\dfrac{۲(x-۱)}{۳\sqrt[۳]{x}} & x<۱ \\ -(\sqrt[۳]{x^{۲}}+\dfrac{۲(x-۱)}{۳\sqrt[۳]{x}}) & x<۱ \end{cases}$$

تابع در نقاط $x=۱$ و $x=۰$ مشتق پذیر نیست.

$$f'(x)=۰\to\sqrt[۳]{x^{۲}}+\frac{۲(x-۱)}{۳\sqrt[۳]{x}}=۰\to\frac{۳x+۲(x-۱)}{۳\sqrt[۳]{x}}=۰\to\frac{۵x-۲}{۳\sqrt[۳]{x}}=۰\to x=\frac{۲}{۵}$$

پس نقطه ی $x=\frac{۲}{۵}$ ریشه ی مشتق است. این سه نقطه، نقاط درونی دامنه ی تابع یعنی R می باشند. لذا نقاط بحرانی نمودار تابع می باشند.

۲۵ : (مسئله ی ۴ ص ۱۹۳) نقاط بحرانی و نقاط اکسترمم مطلق توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f(x)=x^{۳}-۳x+۱\quad;\quad -\frac{۳}{۲}\le x\le ۳$

ب) $f(x)=\sin^{۲}x+۲\cos x\quad;\quad ۰\le x\le ۲\pi$

حل :

الف :

$$f'(x)=۳x^{۲}-۳\xrightarrow{f'(x)=۰}۳x^{۲}-۳=۰\to x=\pm ۱$$

$$x=۱\to f(۱)=(۱)^{۳}-۳(۱)+۱=-۱$$

$$x=-۱\to f(-۱)=(-۱)^{۳}-۳(-۱)+۱=۳$$

$$x=-\frac{۳}{۲}\to f(-\frac{۳}{۲})=(-\frac{۳}{۲})^{۳}-۳(-\frac{۳}{۲})+۱=\frac{۱۷}{۸}$$

$$x=۳\to f(۳)=(۳)^{۳}-۳(۳)+۱=۱۹$$

پس نقطه ی $x=۱$ مینیمم و $x=۳$ ماکزیمم و $x=\pm ۱$ بحرانی هستند.

ب :

$$f(x)=۲\sin x\cos x-۲\sin x\xrightarrow{f(x)=۰}۲\sin x\cos x-۲\sin x=۰\to ۲\sin x(\cos x-۱)=۰$$

$$\sin x=۰\xrightarrow{x=k\pi}x=۰,\pi,۲\pi$$

$$\cos x-۱=۰\to\cos x=۱\xrightarrow{x=۲k\pi}x=۰,۲\pi$$

چون نقاط بحرانی ، نقاط درونی دامنه هستند. لذا تنها $x=\pi$ در فاصله ی داده شده ، بحرانی است.

$$x = ۰ \to f(۰) = \sin^{۲}(۰) + ۲\cos(۰) = ۲$$

$$x = \pi \to f(\pi) = \sin^{۲}(\pi) + ۲\cos(\pi) = -۲$$

$$x = ۲\pi \to f(۲\pi) = \sin^{۲}(۲\pi) + ۲\cos(۲\pi) = ۲$$

لذا نقاط $x = ۰,۲\pi$ می نیمم و نقطه ی $x = \pi$ ماکزیمم است.

***

۲۶ : (مسئله ی ۵ ص ۱۹۳) ارتفاع یک توپ (به متر) در لحظه ی t (به ثانیه) از تابع مکان به معادله ی $S(t) = ۳۰t - ۵t^{۲}$ به دست می آید. بازه ی زمانی بازی را بیابید که بر آن توپ به بالا می رود. بازه ی زمانی بازی را بیابید که بر آن توپ پایین می آید. ارتفاع ماکزیمم توپ چقدر است؟

حل :

$$S(t) = ۳۰t - ۵t^{۲} \to S'(t) = ۳۰ - ۱۰t \xrightarrow{S'(t)=۰} ۳۰ - ۱۰t = ۰ \to t = ۳$$

x	$-\infty$		۳		$+\infty$
y'		+	۰	−	
y	$-\infty$	$\nearrow$	۴۵ max	$\searrow$	$-\infty$

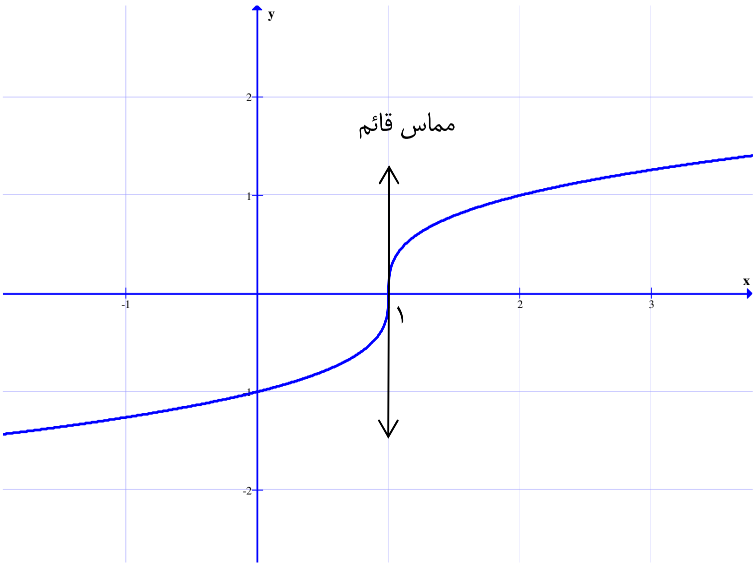
***

۲۷ : (مسئله ی ۶ ص ۱۹۳) جهت تقعر منحنی f با ضابطه ی $f(x) = \sqrt[۳]{x-۱}$ را به کمک قضیه ی تقعر بررسی نموده و نقطه ی عطف تابع را در صورت وجود پیدا کنید.

حل :

$$f(x) = \sqrt[۳]{x-۱} \to f'(x) = \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x-۱)^{۲}}} \to f''(x) = \frac{-۲}{۹(x-۱)\sqrt[۳]{(x-۱)^{۲}}}$$

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
y''		+	نامعین	−	
y	$-\infty$	$\cup$	۰ عطف	$\cap$	$+\infty$



***

۲۸ : (مسئله ی ۷ ص ۱۹۳) به ازای چه مقادیری از a ، تقعر تابع f با ضابطه ی $f(x)=x^{۴}+ax^{۳}+۳x^{۲}$ همواره رو به بالا است؟

حل :

$$f(x)=x^{۴}+ax^{۳}+۳x^{۲}\rightarrow f'(x)=۴x^{۳}+۳ax^{۲}+۶x\rightarrow f''(x)=۱۲x^{۲}+۶ax+۶$$

چون تقعر نمودار تابع روبه بالا است. پس :

$$f''(x)>۰\rightarrow ۱۲x^{۲}+۶ax+۶>۰\xrightarrow{\div ۶}۲x^{۲}+ax+۱>۰\rightarrow \begin{cases} a=۲>۰ \\ \Delta<۰ \end{cases}$$

$$\Delta<۰\rightarrow a^{۲}-۴(۲)(۱)<۰\rightarrow a^{۲}-۸<۰\rightarrow a^{۲}<۸\rightarrow -\sqrt{۸}<a<\sqrt{۸}$$

***

۲۸ : (مسئله ی ۸ ص ۱۹۳) نشان دهید که نقطه ی عطف تابع f با ضابطه ی $f(x)=x(x-۶)^{۲}$ وسط پاره خطی است که نقاط ماکزیمم و می نیمم موضعی تابع را به هم وصل می کند.

حل :

$$f(x)=x(x-۶)^{۲}=x(x^{۲}-۱۲x+۳۶)=x^{۳}-۱۲x^{۲}+۳۶x$$

$$f'(x)=3x^2-24x+36$$

$$\xrightarrow{f'(x)=0} 3x^2-24x+36=0 \xrightarrow{\div 3} x^2-8x+12=0 \to x=2 \quad , \quad x=6$$

$$f''(x)=6x-24 \xrightarrow{f''(x)=0} 6x-24=0 \to x=4$$

نقاط اکسترمم موضعی

$$x=2 \to f(2)=2(2-6)^2=32 \to \max(2,32)$$

$$x=6 \to f(6)=6(6-6)^2=0 \to \min(6,0)$$

نقطه ی عطف

$$x=4 \to f(4)=4(4-6)^2=16 \to \text{عطف}\,(4,16)$$

بدیهی است که نقطه ی (۴,۱۶) وسط نقاط (۲,۳۲) و (۶,۰) است.

***

۲۹ : (مسئله ی ۹ ص ۱۹۳) در مورد یکنوایی و مقادیر اکسترمم تابع f با ضابطه ی $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$ بحث کنید.

چرا در $x=\pm 2$ مماس های عمود بر محور طول ها وجود دارند؟

حل :

$$f(x)=x\sqrt{4-x^2} \quad \text{و} \quad D_f=[-2,2]$$

$$\to f'(x)=\sqrt{4-x^2}+\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}\times x=\frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} \xrightarrow{f'(x)=0} \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}=0 \to x=\pm\sqrt{2}$$

x	$-\infty$	-۲		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		۲	$+\infty$
y'			−	۰	+	۰	−		
y		۰	↘	-۲ min	↗	۲ max	↘	۰	

چون $\lim_{x\to 2} f'(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to -2} f'(x)=-\infty$ در نتیجه نمودار تابع در نقاط $x=\pm 2$ مماس قائم دارد.

***

۳۰ : (مسئله ی ۱۰ ص ۱۹۳) غلظت c یک داروی شیمیایی در جریان خون t ساعت پس از تزریق در ماهیچه، مساوی است با :

$$c=\frac{۳t}{۲۷+t^۳}$$

چه وقت غلظت ماکزیمم است؟

حل :

$$c(t)=\frac{۳t}{۲۷+t^۳}\rightarrow c'(t)=\frac{۳(۲۷+t^۳)-۳t^۲(۳t)}{(۲۷+t^۳)^۲}=\frac{-۶t^۳+۸۱}{(۲۷+t^۳)^۲}$$

$$\xrightarrow{c'(t)=۰}\frac{-۶t^۳+۸۱}{(۲۷+t^۳)^۲}=۰\rightarrow -۶t^۳+۸۱=۰\rightarrow t=\sqrt[۳]{\frac{۲۷}{۲}}$$

***

۳۱ : (مسئله ی ۱۱ ص ۱۹۳) یک تابع چند جمله ای از درجه‌ی ۳ بیابید که در (۲,۴) ماکزیمم نسبی و در (۴,۲)می نیمم نسبی و در (۳,۳) نقطه ی عطف داشته باشد.

حل : در حل مسائل پارامتری معمولاً در پی یافتن یک پارامتر می باشیم. حل این مسائل به کمک ویژگی های نقاط خاص روی منحنی ها صورت می گیرد.تعدادی برای توابع چند جمله ای از این ویژگی ها عبارتند از:

۱) هر نقطه‌ی عادی واقع بر منحنی دارای یک خاصیت است و آن این است که مختصاتش در معادله‌ی منحنی صدق می کند. نقطه ی عادی نقطه ای است که هیچگونه ویژگی در مورد آن ذکر نشده باشد.

۲) نقطه ی ماکزیمم یا مینیمم نسبی دارای دو خاصیت می باشد.

الف) مانند یک نقطه ی عادی در تابع صدق می کند. ب) با فرض وجود مشتق اول در نقطه ی داده شده ، به ازاء طول این نقطه مقدار مشتق اول برابر صفر می شود. ($y'=۰$)

۳) نقطه ی عطف دارای دو خاصیت می باشد.

الف) مانند یک نقطه ی عادی در تابع صدق می کند. ب) با فرض وجود مشتق دوم در نقطه ی داده شده ، به ازاء طول این نقطه مقدار مشتق دوم برابر صفر می شود. ($y''=۰$)

برای حل این مسئله ابتدا قرار می دهیم.

$$f(x)=ax^{۳}+bx^{۲}+cx+d \to f'(x)=۳ax^{۲}+۲bx+c \to f''(x)=۶ax+۲b$$

ماکزیمم نسبی $(۲,۴) \to \begin{cases} f(۲)=۴ \to a(۲)^{۳}+b(۲)^{۲}+c(۲)+d=۴ \to ۸a+۴b+۲c+d=۴ \\ f'(۲)=۰ \to ۳a(۲)^{۲}+۲b(۲)+c=۰ \to ۱۲a+۴b+c=۰ \end{cases}$

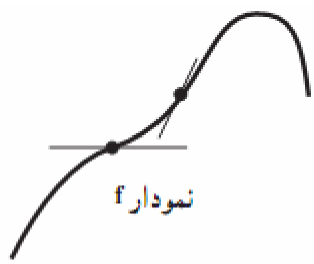
می نیمم نسبی $(۴,۲) \to \begin{cases} f(۴)=۲ \to a(۴)^{۳}+b(۴)^{۲}+c(۴)+d=۲ \to ۶۴a+۱۶b+۴c+d=۲ \\ f'(۴)=۰ \to ۳a(۴)^{۲}+۲b(۴)+c=۰ \to ۴۸a+۸b+c=۰ \end{cases}$

عطف $(۳,۳) \to \begin{cases} f(۳)=۳ \to a(۳)^{۳}+b(۳)^{۲}+c(۳)+d=۳ \to ۲۷a+۹b+۳c+d=۳ \\ f''(۳)=۰ \to ۶a(۳)+۲b=۰ \to ۱۸a+۲b=۰ \end{cases}$

$$\begin{cases} ۸a+۴b+۲c+d=۴ \\ ۶۴a+۱۶b+۴c+d=۲ \end{cases} \to ۲۸a+۶b+c=-۱ \xrightarrow{۱۲a+۴b+c=۰} ۱۶a+۲b=-۱$$

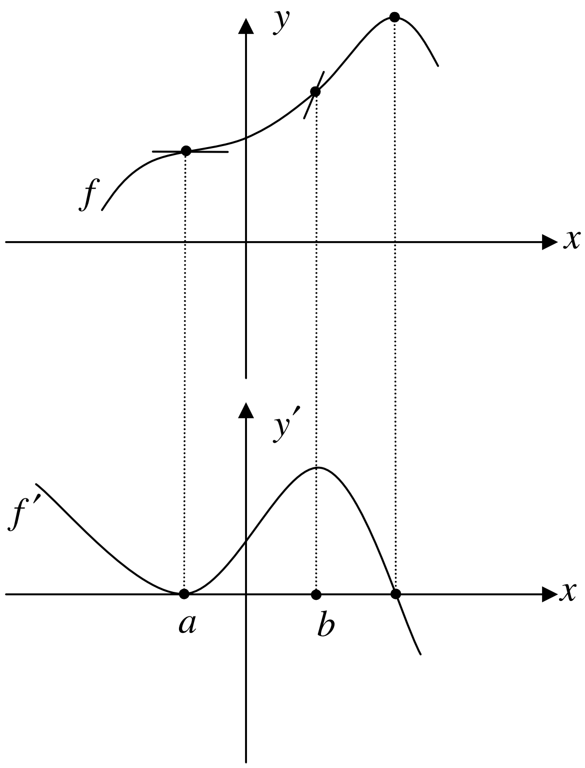
$$\begin{cases} ۱۶a+۲b=-۱ \\ ۱۸a+۲b=۰ \end{cases} \to a=\frac{۱}{۲}\ ,\ b=\frac{-۹}{۲} \xrightarrow{۱۲a+۴b+c=۰} c=۱۲ \xrightarrow{۸a+۴b+۲c+d=۴} d=-۶$$

***

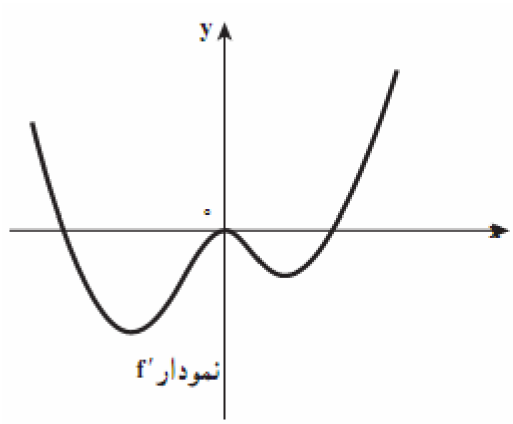


۳۲ : (مسئله ی ۱۲ ص ۱۹۴) شکل مقابل نمودار تابع f است. در مورد مقادیر اکسترمم نسبی f' (تابع مشتق f) بحث کنید.

حل : با توجه به صعودی و نزولی نمودار تابع f و رسم نمودار تابع f' مشاهده می شود که تابع f' دارای یک نقطه ی می نیمم (در نقطه ی $x=a$) و یک نقطه ی ماکزیمم (در نقطه ی $x=b$) است.



***



۳۳ : (مسئله ی ۱۳ ص ۱۹۴) شکل مقابل نمودار تابع مشتق تابع f است. تابع f چند نقطه ی عطف دارد؟ دلیل خود را بیان کنید.

حل : در نقاطی که نمودار f' دارای اکسترمم است، آنگاه $f''=0$ و f'' تغییر علامت داده (از صعودی به نزولی و برعکس). پس این نقاط برای تابع f نقطه ی عطف هستند.لذا نمودار تابع دارای سه نقطه ی عطف است.

***

۳۴ : (مسئله ی ۱۴ ص ۱۹۴) تابع f با ضابطه ی $f(x)=xe^x$ را در نظر بگیرید. با استفاده از هر نوع اطلاعاتی که می توانید از خود تابع و مشتق های اول و دوم آن به دست آورید، نمودار f را رسم کنید.

حل :

$f(x)=xe^x$ و $D_f=R$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} xe^{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} xe^{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}=۰$$

تابع دارای مجانب افقی است. تابع دارای مجانب مایل نمی باشد. زیرا

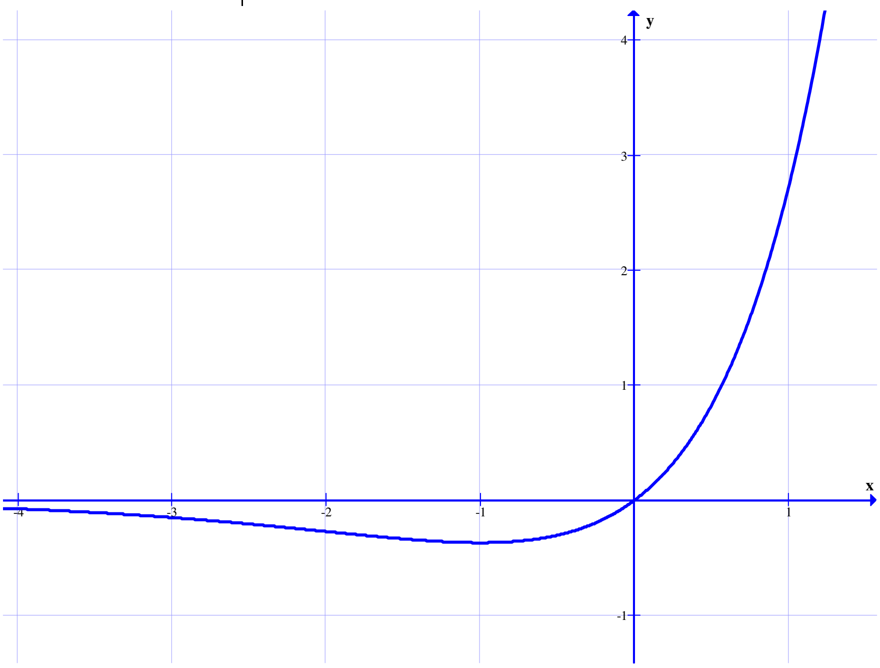
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$$

$$f'(x)=e^{x}+xe^{x}\xrightarrow{f'(x)=۰} e^{x}+xe^{x}=۰\to x=-۱$$

$$f''(x)=e^{x}+e^{x}+xe^{x}\xrightarrow{f''(x)=۰} ۲e^{x}+xe^{x}=۰\to x=-۲$$

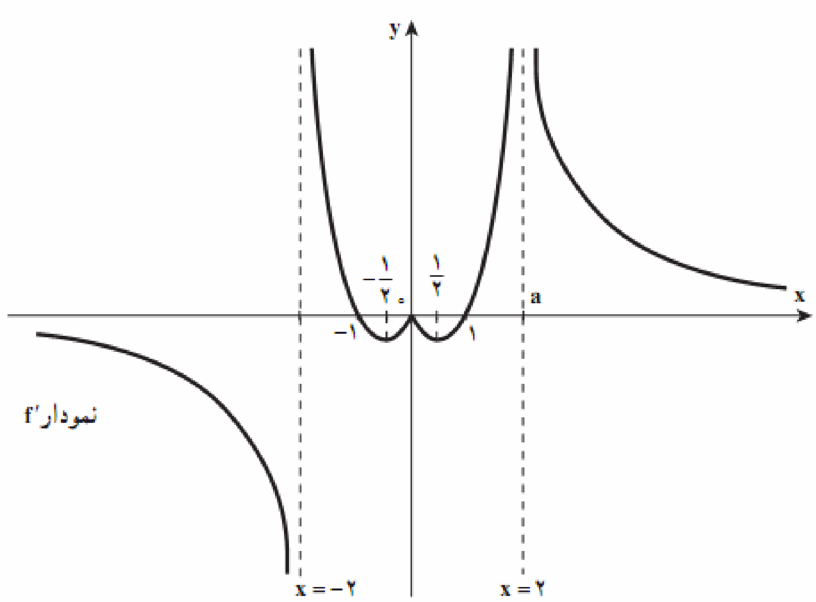
x	$-\infty$		-۱		$+\infty$
y'		-	۰	+	
y	۰	$\searrow$	$-\frac{۱}{e}$ min	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		-۲		$+\infty$
y''		-	۰	+	
y	۰	$\cap$	-۲ عطف	$\cup$	$+\infty$



***

۳۵ : (مسئله ی ۱۵ ص ۱۹۴) نمودار تابع f' (مشتق تابع، تابع f همواره پیوسته است.) به شکل زیر می باشد. تـابع f در چه نقاطی ماکزیمم نسبی و یا می نیمم نسبی دارد؟ نقاط عطف تابع f را در صورت وجود مشخص کنید.



حل : با توجه به صعودی و نزولی بودن تابع ، مشاهده می شود کـه تـابع در $x=۱$ دارای مینـیمم نـسبی و در $x=-۱$ دارای ماکزیمم نسبی است. در $x=-۲$ دارای می نیمم نسبی (نقطه ی بازگشتی)است. با توجه به تقعر و تحـدب نمـودار تابع مشاهده می شود که تابع در $x=۲$ و $x=\frac{۱}{۲}$ و $x=-\frac{۱}{۲}$ دارای نقطه ی عطف است.

***

حل تمرینات مهم

۳۶ : (مثال ص ۲۰۳) جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=۳x^{۳}-۹x$ را رسم کنید.

حل :

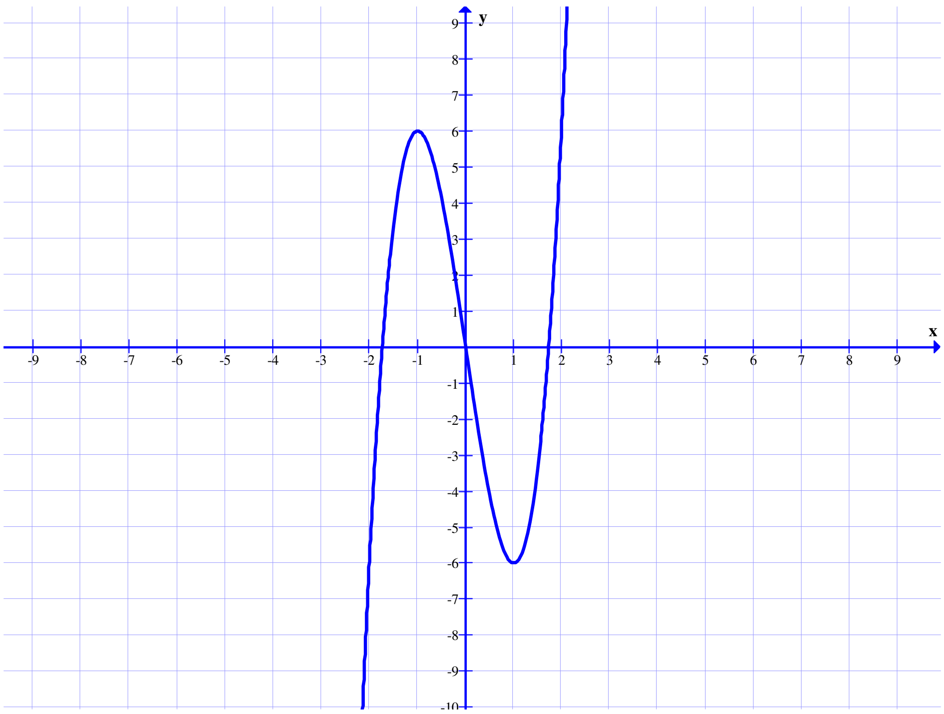
$f(x)=۳x^{۳}-۹x$

$D_f=R$

$f'(x)=۹x^{۲}-۹\xrightarrow{f'(x)=۰}۹x^{۲}-۹=۰\rightarrow x=\pm۱$

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	۶ max	$\searrow$	۰ عطف	$\searrow$	-۶ min	$\nearrow$	$+\infty$

$f(x)=۰\rightarrow ۳x^{۳}-۹x=۰\rightarrow x=۰,x=\sqrt{۳}$



***

۳۷ : (تمرین در کلاس ص ۲۰۴) جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=x^{۴}-۸x^{۲}+۷$ را رسم کنید.

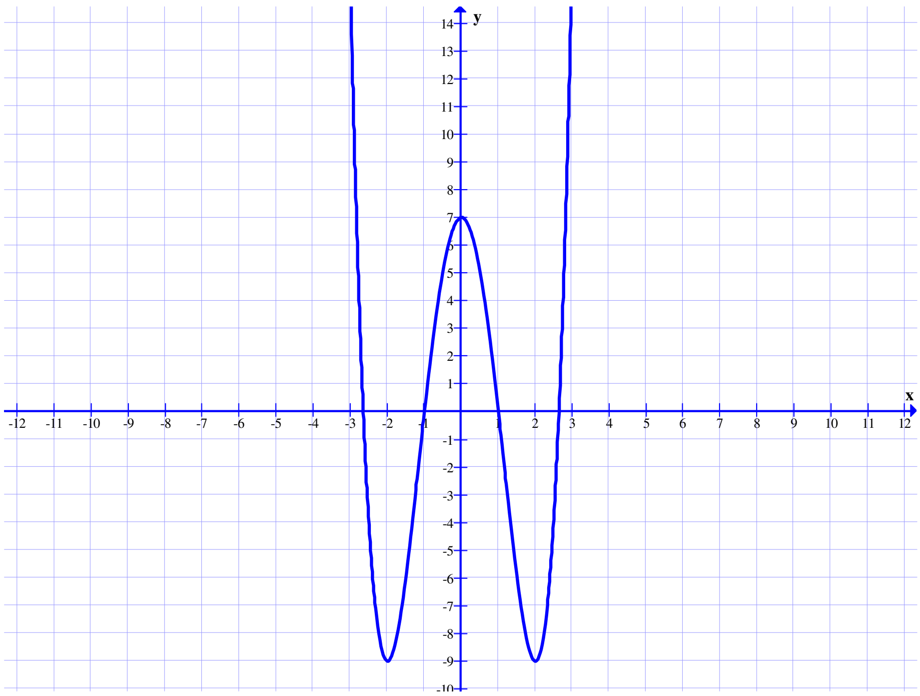
حل :

$f(x)=x^۴-۸x^۲+۷$ و $D_f=R$

$f'(x)=۴x^۳-۱۶x \xrightarrow{f'(x)=۰} ۴x^۳-۱۶x=۰ \to ۴x(x^۲-۴)=۰ \to x=۰, x=\pm۲$

x	$-\infty$		-۲		۰		۲		$+\infty$
y'		$-$	۰	$+$		$-$	۰	$+$	
y	$+\infty$	↘	-۹ max	↗	۷ عطف	↘	-۹ min	↗	$+\infty$

$f(x)=۰ \to x^۴-۸x^۲+۷=۰ \to x=\pm۱\ ,\ \ x=\pm\sqrt{۷}$



***

۳۸ : (مثال ص ۲۰۴) جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x+۱}{x-۲}$ را رسم کنید.

حل :

$f(x)=\dfrac{x+۱}{x-۲}$ و $D_f=R-\{۲\}$

مجانب قائم $x-۲=۰ \to x=۲$

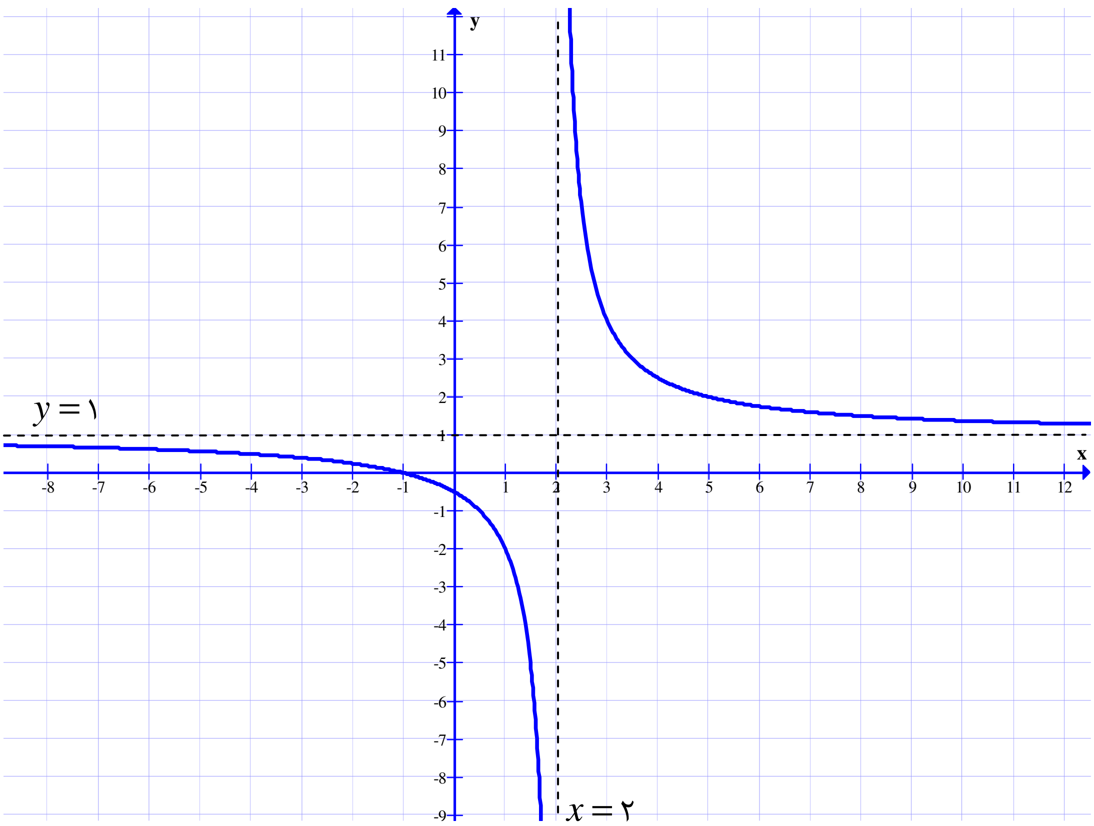
مجانب افقی $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=۱ \to y=۱$

$$f'(x)=\frac{۱(x-۲)-۱(x+۱)}{(x-۲)^۲}=\frac{-۳}{(x-۲)^۲}<۰$$

مشتق اول ریشه ندارد و همواره منفی می باشد. پس تابع همواره نزولی است.

x	$-\infty$		۱		۲		۳		$+\infty$
y'		$-$		$-$		$-$	۰	$-$	
y	۱	↘	-۲	↘	$-\infty \parallel +\infty$	↘	۳	↘	۱

ابتدا مجانب ها و سپس نمودار تابع را رسم می کنیم.



***

۳۹ : (تمرین در کلاس ص ۲۰۶) جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\frac{x-۲}{x}$ را رسم کنید.

حل :

$f(x)=\frac{x-۲}{x}$ و $D_f=R-\{۰\}$

$x=۰$ مجانب قائم

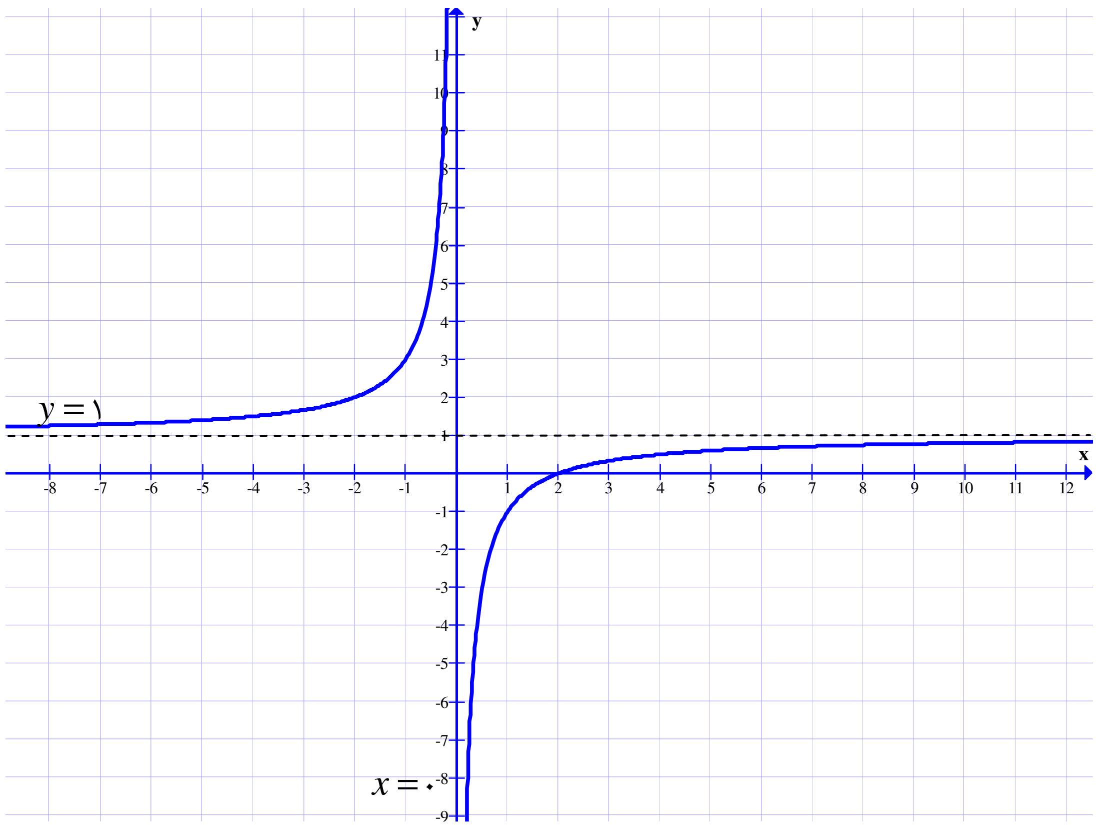
مجانب افقی $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=۱ \to y=۱$

$$f'(x)=\frac{۱(x)-۱(x-۲)}{x^۲}=\frac{-۲}{x^۲}>۰$$

مشتق اول ریشه ندارد و همواره مثبت می باشد. پس تابع همواره صعودی است.

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
y'		+		+		+	۰	+	
y	۱	↗	۳	↗	$+\infty \parallel -\infty$	↗	-۱	↗	۱

ابتدا مجانب ها و سپس نمودار تابع را رسم می کنیم.



***

۴۰ : (مثال ص ۲۰۶) جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x^۲}{x^۲-۱}$ را رسم کنید.

حل :

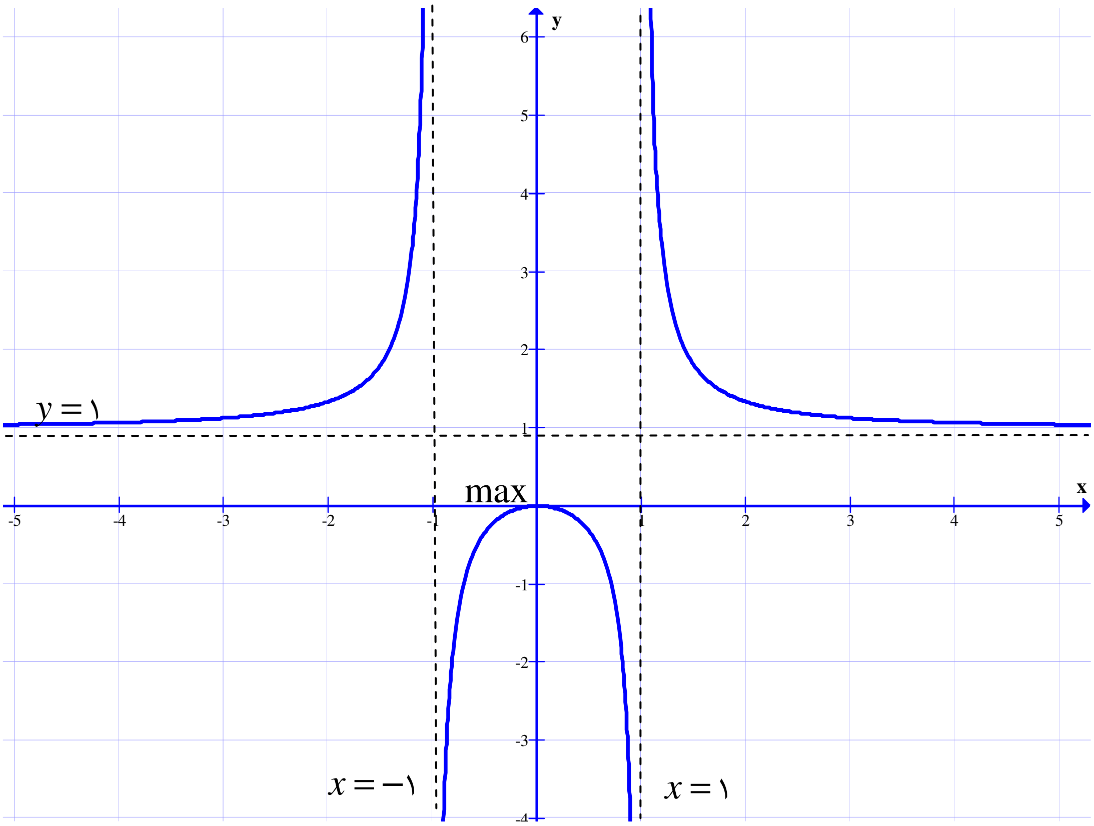
$f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$ و $D_f=R-\{\pm 1\}$

مجانب های قائم $x=\pm 1$ مجانب افقی $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1\to y=1$

$$f'(x)=\frac{(2x)(x^2-1)-x^2(2x)}{(x^2-1)^2}=\frac{-2x}{(x^2-1)^2}\xrightarrow{f'(x)=0}-2x=0\to x=0$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	0	$-$	0	$-$	
y	1	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	0 max	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	1

ابتدا مجانب ها و سپس نمودار تابع را رسم می کنیم.



***

۴۱ : (تمرین در کلاس ص ۲۰۸) جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x-4}$ را رسم کنید.

حل :

$$f(x)=\frac{x^{۲}-۳x}{x-۴} \qquad \text{و} \qquad D_f=R-\{۴\}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{۲}-۳x}{x-۴}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{۲}}{x}=\pm\infty$$ و $x=۴$ مجانب قائم

پس تابع دارای مجانب مایل است. چون درجه ی صورت یک واحد از درجه ی مخرج بیشتر می باشد. پس خارج قسمت تقسیم به شرط اینکه باقی مانده صفر نباشد، مجانب مایل است. با این کار خواهیم داشت.

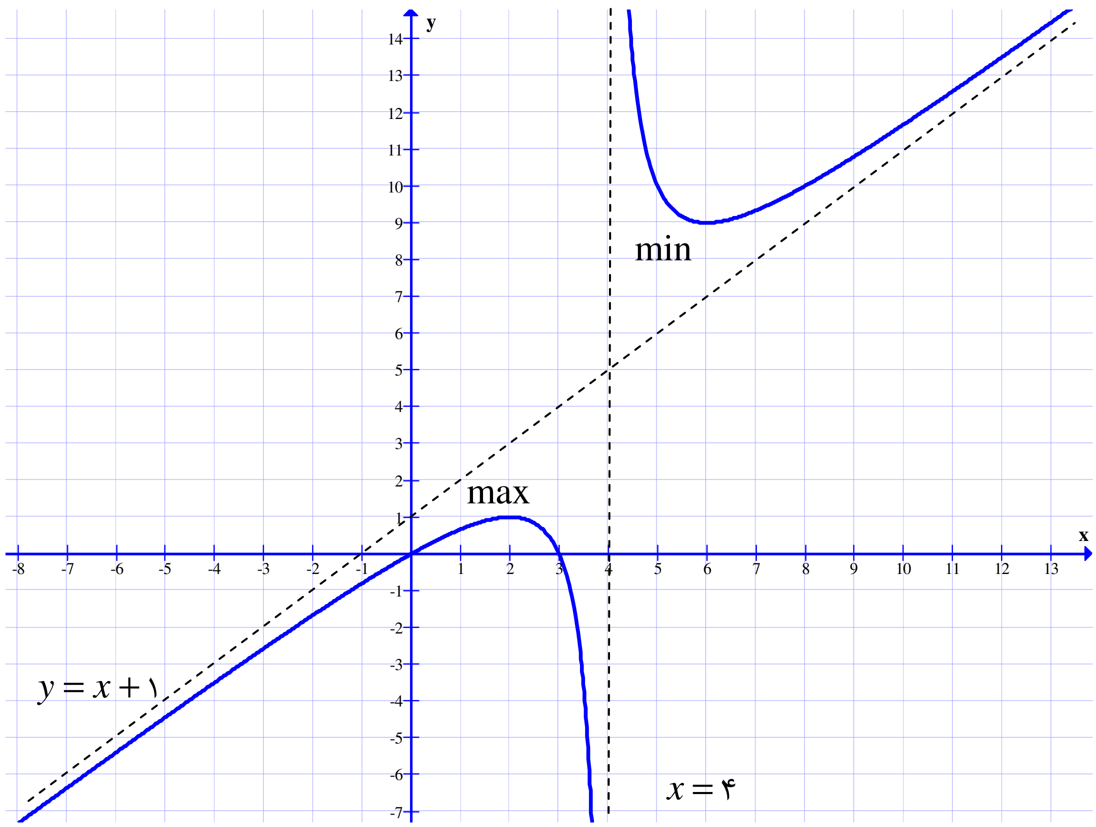
مجانب مایل $\quad y=x+۱$

$$f'(x)=\frac{(۲x-۳)(x-۴)-۱(x^{۲}-۳x)}{(x-۴)^{۲}}=\frac{x^{۲}-۸x+۱۲}{(x-۴)^{۲}}$$

$$\xrightarrow{f'(x)=۰} x^{۲}-۸x+۱۲=۰ \to x=۲\ ,\ x=۶$$

x	$-\infty$		۰		۲		۳		۴		۶		$+\infty$
y'		+			۰		−		‖	−	۰	+	
y	$-\infty$	↗	۰	↗	۱ max	↘	۰	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	۹ min	↗	$+\infty$

ابتدا مجانب ها و سپس نمودار تابع را رسم می کنیم.



۴۲ : (مثال ص ۲۰۸) جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=e^{\frac{۱}{x}}$ را رسم کنید.

حل :

$$f(x)=e^{\frac{۱}{x}} \quad \text{و} \quad D_f=R-\{۰\}$$

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+} e^{\frac{۱}{x}}=\lim_{t\to +\infty} e^t=+\infty$$

یعنی تابع در همسایگی راست صفر دارای مجانب قائمی به معادله ی $x=۰$ است.

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-} e^{\frac{۱}{x}}=\lim_{t\to -\infty} e^t=e^{-\infty}=\frac{۱}{e^{+\infty}}=۰$$

یعنی در همسایگی چپ صفر مقدار تابع به صفر میل می کند.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty} e^{\frac{۱}{x}}=e^{۰}=۱$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty} e^{\frac{۱}{x}}=e^{۰}=۱$$

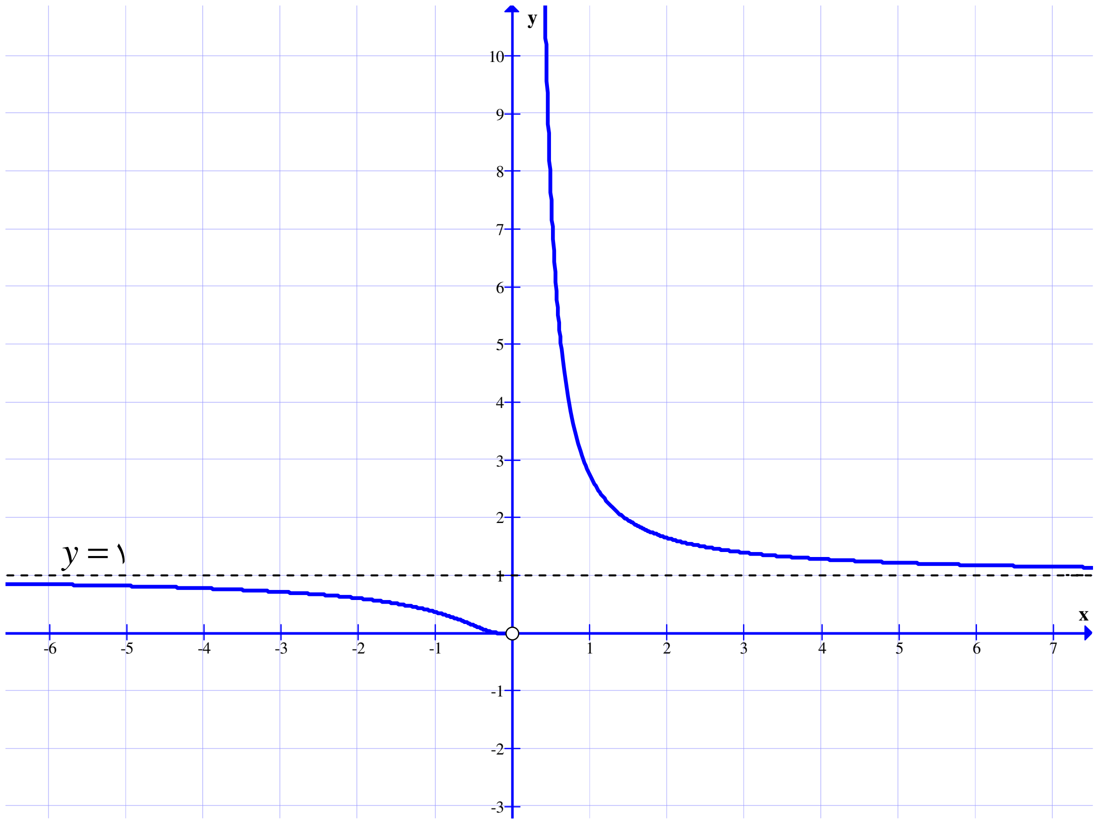
یعنی $y=۱$ مجانب افقی نمودار تابع است.

$$f'(x)=-\frac{۱}{x^۲}e^{\frac{۱}{x}}<۰$$

پس تابع در دامنه اش همواره نزولی است و نقطه ی اکسترمم ندارد.

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
y'		−		−	‖	−	۰	−	
y	۱	↘	$\frac{۱}{e}$	↘ ۰	‖ $+\infty$	↘	e	↘	۱

ابتدا مجانب ها و سپس نمودار تابع را رسم می کنیم.



***

۴۳ : (تمرین در کلاس ص ۲۰۹) جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\dfrac{۱}{۱+e^{-x}}$ را رسم کنید.

حل :

$$f(x)=\frac{۱}{۱+e^{-x}}=\frac{۱}{۱+\dfrac{۱}{e^x}}=\frac{۱}{\dfrac{۱+e^x}{e^x}}=\frac{e^x}{۱+e^x} \quad \text{و} \quad D_f=R$$

مخرج کسر ریشه ندارد. پس تابع مجانب قائم ندارد.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{۱+e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=۱\to y=۱$$ مجانب افقی

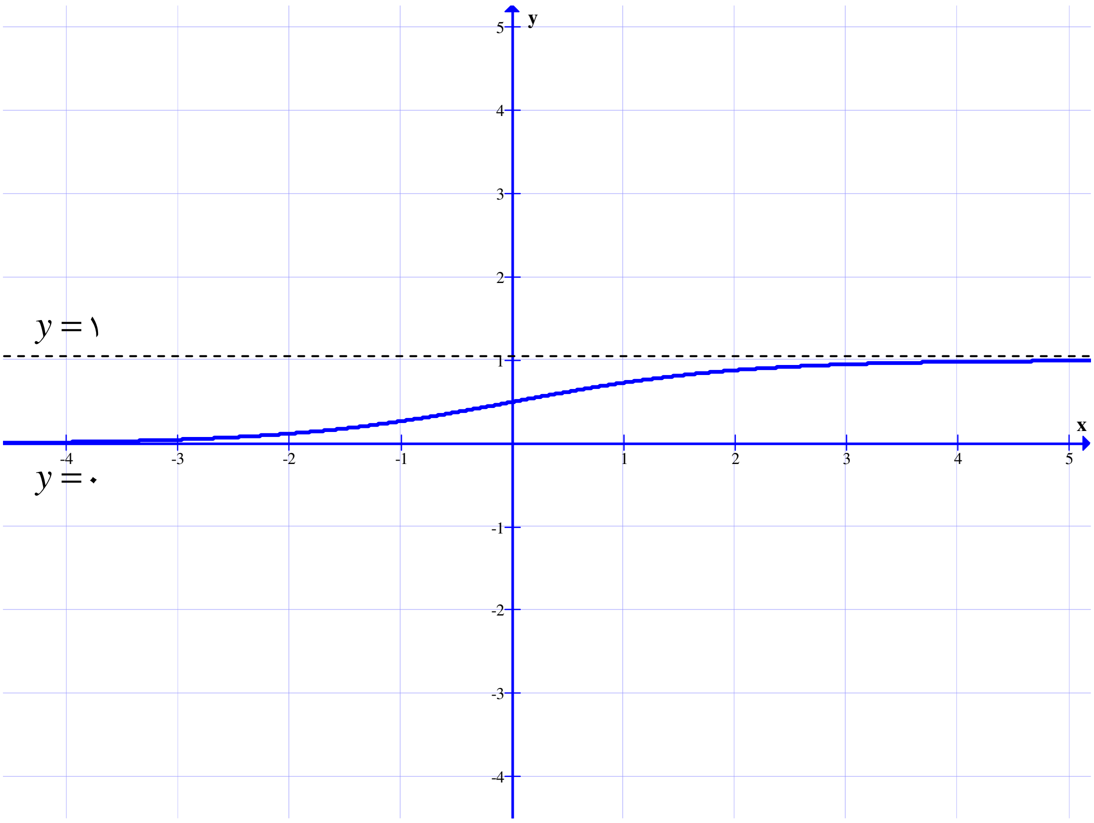
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{۱+e^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۰}{۱+۰}=۰\to y=۰$$ مجانب افقی

$$f(x)=\frac{e^x(1+e^x)-e^x(e^x)}{(1+e^x)^2}=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}>0$$

پس تابع در دامنه اش همواره صعودی است و نقطه ی اکسترمم ندارد.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0

ابتدا مجانب ها و سپس نمودار تابع را رسم می کنیم.



***

۴۴ : (مثال ص ۲۰۹) جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$ را رسم کنید.

حل :

$$f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2} \quad \text{و} \quad D_f=R-\{1\}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{۳}}{(x-۱)^{۲}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{۳}}{x^{۲}}=\pm\infty$$ و $x=۱$ مجانب قائم

پس تابع دارای مجانب مایل است. چون درجه ی صورت یک واحد از درجه ی مخرج بیشتر می باشد. پس خارج قسمت تقسیم به شرط اینکه باقی مانده صفر نباشد، مجانب مایل است. با این کار خواهیم داشت.

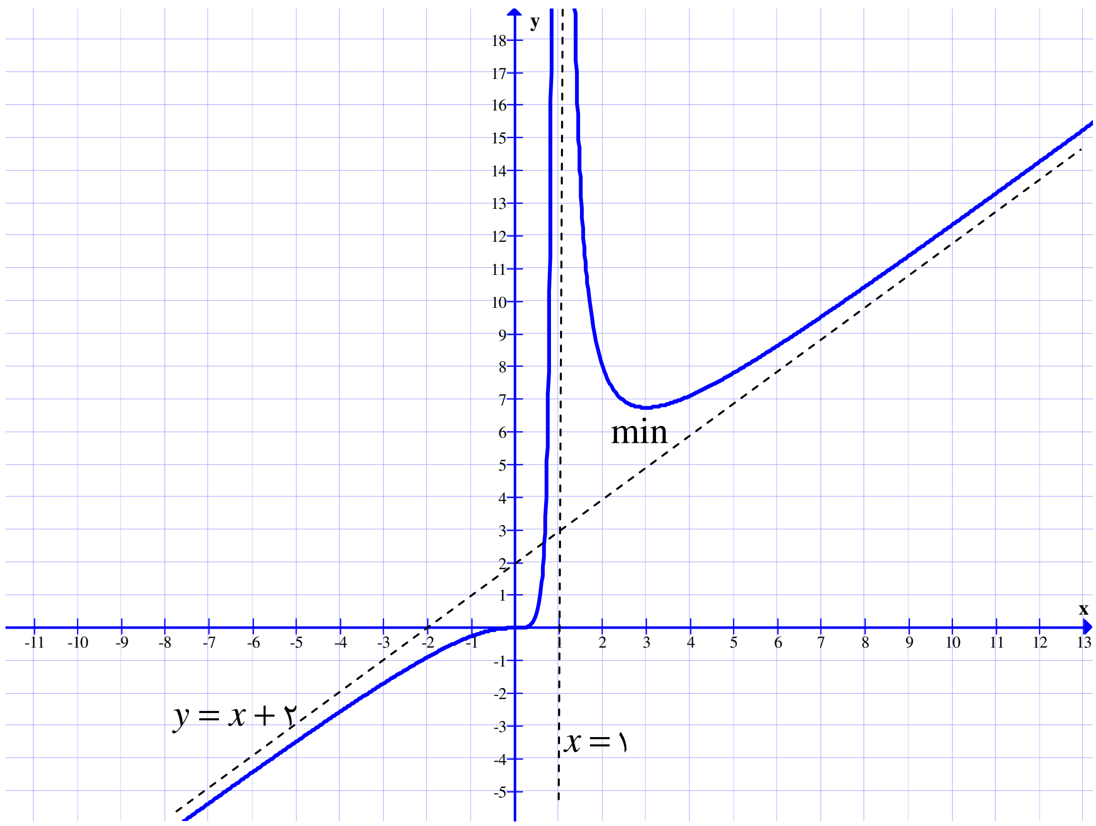
مجانب مایل $y=x+۲$

$$f'(x)=\frac{۳x^{۲}(x-۱)^{۲}-۲(x-۱)x^{۳}}{(x-۱)^{۴}}=\frac{x^{۲}(x^{۲}-۴x+۳)}{(x-۱)^{۴}}=\frac{x^{۲}(x-۱)(x-۳)}{(x-۱)^{۴}}=\frac{x^{۲}(x-۳)}{(x-۱)^{۳}}$$

$$\xrightarrow{f'(x)=۰} x=۰\ ,\ x=۳$$

x	$-\infty$		۰		۱		۳		$+\infty$
y'		+	۰	+	$\Vert$	−	۰	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	۰	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$\frac{۲۷}{۴}$ min	$\nearrow$	$+\infty$

ابتدا مجانب ها و سپس نمودار تابع را رسم می کنیم.



***

۴۵ : (تمرین در کلاس ص ۲۱۱) جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$ را رسم کنید.

حل :

$$f(x)=x+\sqrt{x^2-1} \quad \text{و} \quad D_f=R-(-1,1)$$

تابع مجانب قائم ندارد.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x+\sqrt{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty} x+\sqrt{1}\left(x+\frac{0}{2}\right)=\lim_{x\to+\infty} 2x$$

$y=2x$ مجانب مایل

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2-1}=\lim_{x\to-\infty} x-\sqrt{1}\left(x+\frac{0}{2}\right)=0$$

$y=0$ مجانب افقی

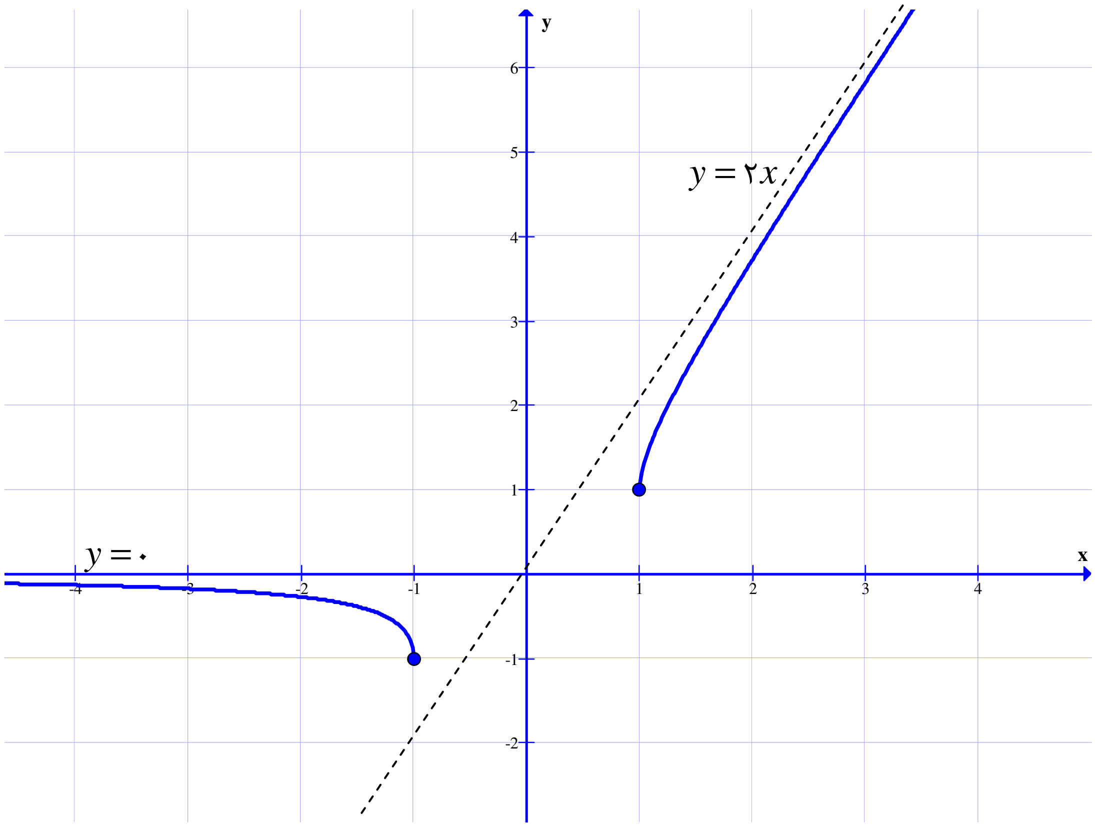
$$f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\xrightarrow{f'(x)=0}\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}=0\to x+\sqrt{x^2-1}=0$$

$$\to x=-\sqrt{x^2-1}\to x^2=x^2-1\to 0=-1$$

مشتق اول ریشه ندارد.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$				$+$	
y	0	$\searrow$	-1		1	$\nearrow$	$+\infty$

ابتدا مجانب ها و سپس نمودار تابع را رسم می کنیم.



***

۴۶ : (مثال ص ۲۱۱) جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\tan^{-۱}(\frac{۱}{x})$ را رسم کنید.

حل :

$$f(x)=\tan^{-۱}(\frac{۱}{x}) \quad \text{و} \quad D_f=R-\{۰\}$$

تابع در $x=۰$ تعریف نشده ولی در همسایگی صفر تعریف شده است. با قرار دادن $u=\frac{۱}{x}$ خواهیم داشت.

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+}\tan^{-۱}(\frac{۱}{x})=\lim_{u\to +\infty}\tan^{-۱}(u)=\frac{\pi}{۲}$$

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}\tan^{-۱}(\frac{۱}{x})=\lim_{u\to -\infty}\tan^{-۱}(u)=-\frac{\pi}{۲}$$

همچنین:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{u\to 0^+}\tan^{-1}(u)=0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{u\to 0^-}\tan^{-1}(u)=0$$

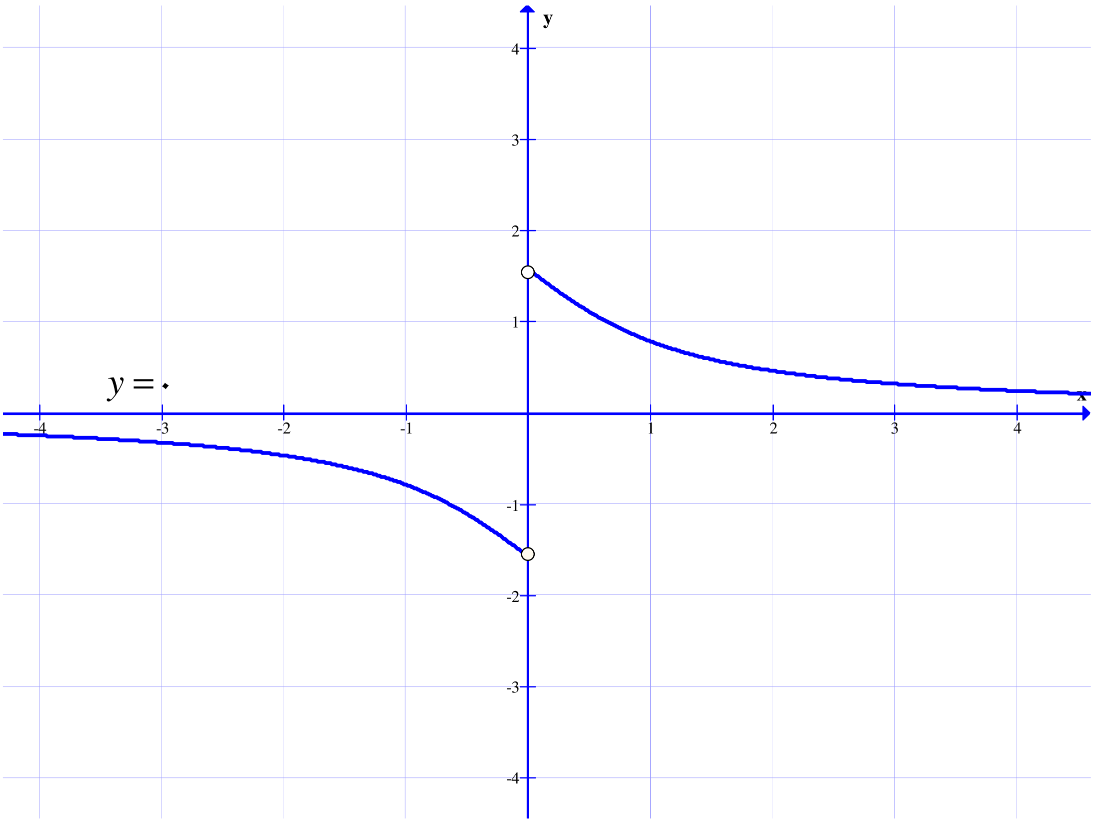
یعنی خط $y=0$ مجانب افقی تابع است و تابع مجانب قائم ندارد.

$$f'(x)=\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{-1}{1+x^2}<0$$

نمودار تابع نقطه ی اکسترمم ندارد و همواره نزولی اکید می باشد.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'			$-$	$-$		$-$	$-$		
y	0	$\searrow$	$-\frac{\pi}{4}$	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}\ \Vert\ \frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$\frac{\pi}{4}$	$\searrow$	0

ابتدا مجانب ها و سپس نمودار تابع را رسم می کنیم.



***

۴۷ : (تمرین در کلاس ص ۲۱۲) جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\sin^{-۱}(\frac{۱}{x})$ را رسم کنید.

حل :

$$f(x)=\sin^{-۱}(\frac{۱}{x}) \quad \text{و} \quad D_f=(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)$$

توجه : $-۱\le\frac{۱}{x}\le ۱$

تابع مجانب قائم ندارد. همچنین :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sin^{-۱}(\frac{۱}{x})=\lim_{u\to ۰^+}\sin^{-۱}(u)=۰$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\sin^{-۱}(\frac{۱}{x})=\lim_{u\to ۰^-}\sin^{-۱}(u)=۰$$

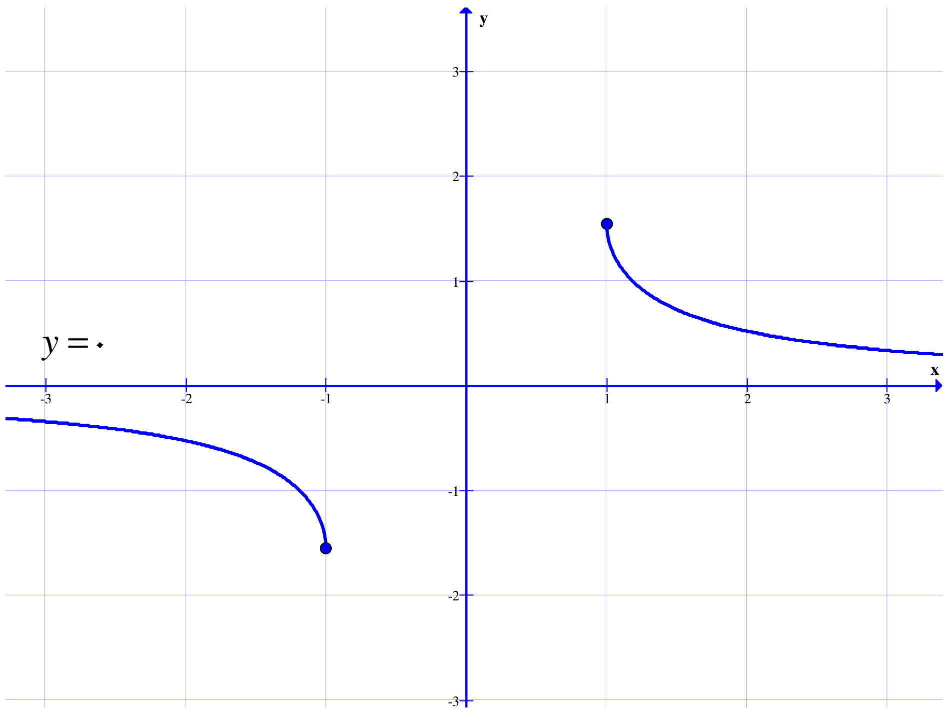
یعنی خط $y=۰$ مجانب افقی تابع است.

$$f'(x)=\frac{-\frac{۱}{x^۲}}{\sqrt{۱-(\frac{۱}{x})^۲}}<۰$$

نمودار تابع نقطه ی اکسترمم ندارد و همواره نزولی اکید می باشد.

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
y'		$-$				$-$	
y	۰	$\searrow$	$-\frac{\pi}{۲}$		$\frac{\pi}{۲}$	$\searrow$	۰

ابتدا مجانب ها و سپس نمودار تابع را رسم می کنیم.



***

۴۸ : (مسئله ی ۱ ص ۲۱۳) جدول رفتار و نمودار توابع با ضابطه های زیر را رسم کنید.

الف) $y=\dfrac{x^{۲}-۴x+۸}{x-۲}$

ب) $y=\dfrac{x^{۲}+۲x}{x^{۲}+۲x-۳}$

پ) $y=x+\sqrt{x^{۲}-۳x+۲}$

ت) $y=\sin x+\sqrt{۳}\cos x \quad ; \quad \cdot\le x\le ۲\pi$

ث) $y=\dfrac{۱-\sin x}{۱+\cos x} \quad ; \quad \cdot\le x\le ۲\pi$

حل :

الف :

$$f(x)=\frac{x^{۲}-۴x+۸}{x-۲} \quad \text{و} \quad D=R-\{۲\}$$

$x=۲$ مجانب قائم و $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{۲}-۴x+۸}{x-۲}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{۲}}{x}=\pm\infty$

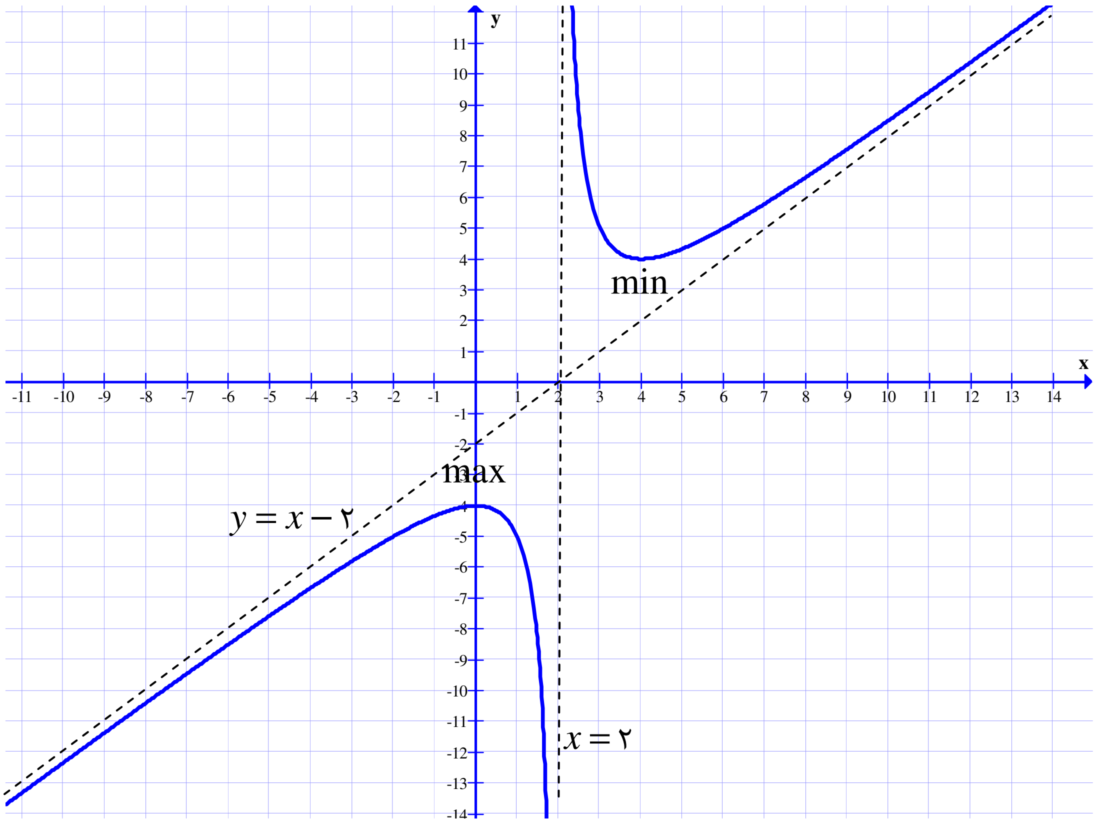
پس تابع دارای مجانب مایل است. چون درجه ی صورت یک واحد از درجه ی مخرج بیشتر می باشد. پس خارج قسمت تقسیم به شرط اینکه باقی مانده صفر نباشد، مجانب مایل است. با این کار خواهیم داشت.

$$y = x - ۲ \qquad \text{مجانب مایل}$$

$$f'(x) = \frac{۲x(x-۲)-(۱)(x^{۲}-۴x+۸)}{(x-۲)^{۲}} = \frac{x^{۲}-۴x}{(x-۲)^{۲}} \xrightarrow{f'(x)=۰} x=۰ \ , \ x=۴$$

x	$-\infty$		۰		۱		۴		$+\infty$
y'		+	۰	−	‖	−	۰	+	
y	$-\infty$	↗	−۴ max	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↗	۴ min	↗	$+\infty$

ابتدا مجانب ها و سپس نمودار تابع را رسم می کنیم.



ب :

$$f(x)=\frac{x^{۲}+۲x}{x^{۲}+۲x-۳} \quad و \quad D=R-\{۲\}$$

مجانب های قائم $x^{۲}+۲x-۳=۰\rightarrow(x-۱)(x+۳)=۰\rightarrow x=۱\ ,\quad x=-۳$

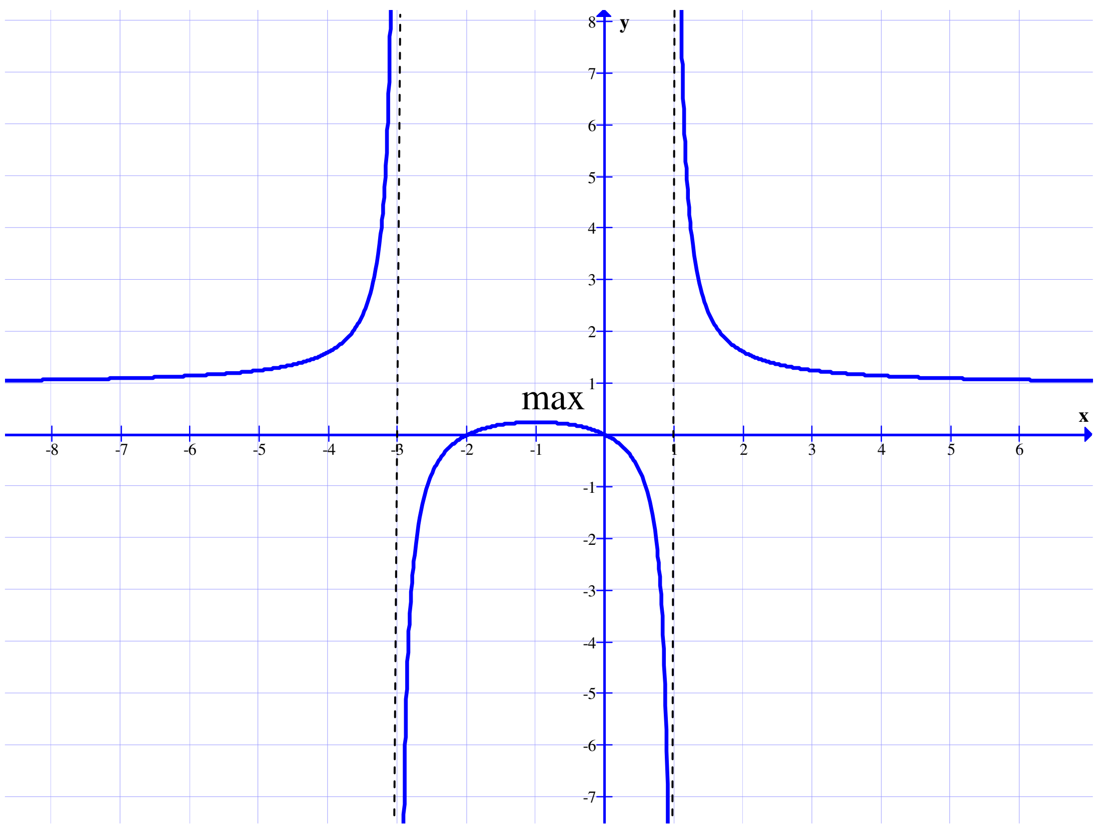
مجانب افقی $\lim\limits_{x\rightarrow\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\rightarrow\pm\infty}\frac{x^{۲}+۲x}{x^{۲}+۲x-۳}=\lim\limits_{x\rightarrow\pm\infty}\frac{x^{۲}}{x^{۲}}=۱\rightarrow y=۱$

$$f'(x)=\frac{(۲x+۲)(x^{۲}+۲x-۳)-(۲x+۲)(x^{۲}+۲x)}{(x^{۲}+۲x-۳)^{۲}}=\frac{-۶x-۶}{(x^{۲}+۲x-۳)^{۲}}\xrightarrow{f'(x)=۰}x=-۱$$

$$f(x)=۰\rightarrow x^{۲}+۲x=۰\rightarrow x=۰\quad ,\quad x=-۲$$

x	$-\infty$		-۳		-۱		۲		$+\infty$
y'		+	‖	+	۰	−	‖	−	
y	۱	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{۱}{۴}$ max	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	۱

ابتدا مجانب ها و سپس نمودار تابع را رسم می کنیم.



پ :

$$f(x)=x+\sqrt{x^{۲}-۳x+۲} \quad \text{و} \quad x^{۲}-۳x+۲\geq ۰\rightarrow D_f=(-\infty,۱]\cup[۲,+\infty)$$

تابع مجانب قائم ندارد.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x+\sqrt{x^{۲}-۳x+۲}=\lim_{x\to+\infty} x+\sqrt{۱}(x+\frac{-۳}{۲})=\lim_{x\to+\infty} ۲x-\frac{۳}{۲}$$

مجانب مایل $y=۲x-\frac{۳}{۲}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^{۲}-۱}=\lim_{x\to-\infty} x-\sqrt{۱}(x+\frac{-۳}{۲})=\frac{۳}{۲}$$

مجانب افقی $y=\frac{۳}{۲}$

$$f'(x)=۱+\frac{۲x-۳}{۲\sqrt{x^{۲}-۳x+۲}}=\frac{۲\sqrt{x^{۲}-۳x+۲}+۲x-۳}{۲\sqrt{x^{۲}-۳x+۲}}$$

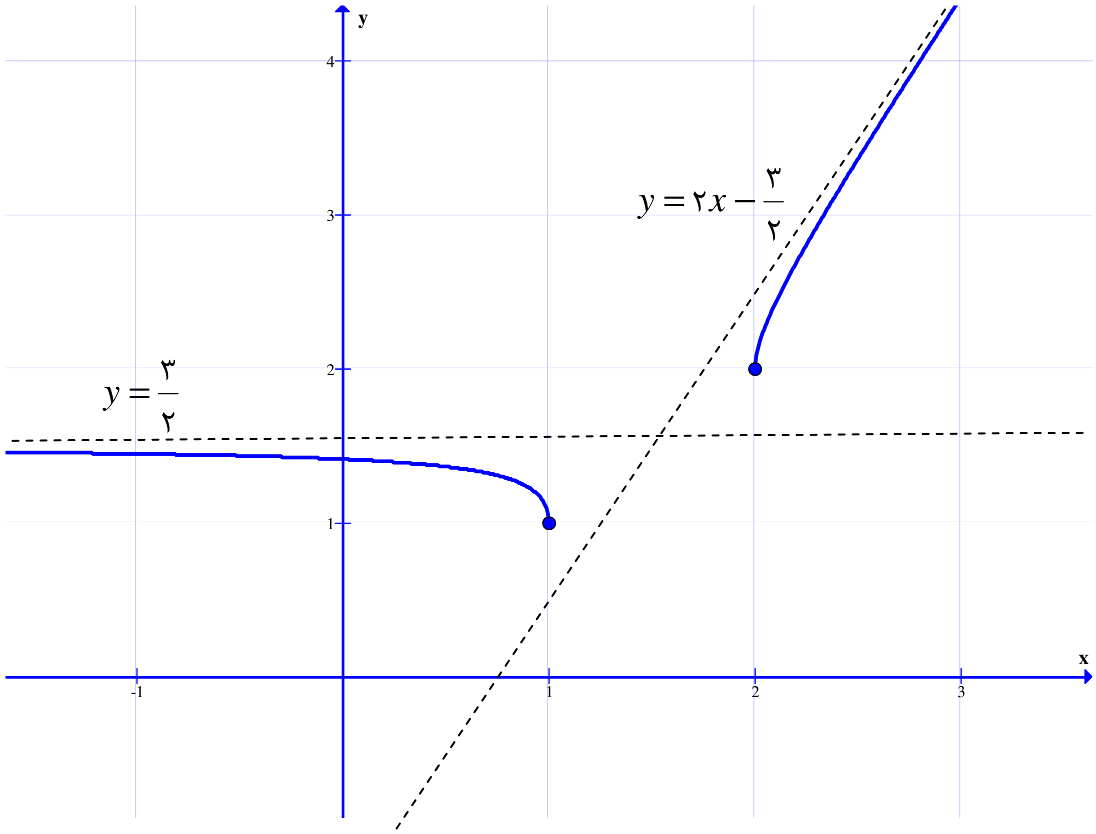
$$\xrightarrow{f'(x)=۰} ۲\sqrt{x^{۲}-۳x+۲}+۲x-۳=۰\rightarrow ۲\sqrt{x^{۲}-۳x+۲}=-۲x+۳$$

$\rightarrow ۴(x^{۲}-۳x+۲)=(-۲x+۳)^{۲}\rightarrow ۸=۹$ مشتق اول ریشه ندارد.

$f(۲)=۲\ ,\quad f(۱)=۱$ نقاط کمکی

x	$-\infty$		۱		۲		$+\infty$
y'		$-$				$+$	
y	$\frac{۳}{۲}$	$\searrow$	۱		۲	$\nearrow$	$+\infty$

ابتدا مجانب ها و سپس نمودار تابع را رسم می کنیم.



ت :

$$f(x) = \sin x + \sqrt{۳}\cos x \quad ; \quad ۰ \le x \le ۲\pi$$

تابع هیچگونه مجانب ندارد.

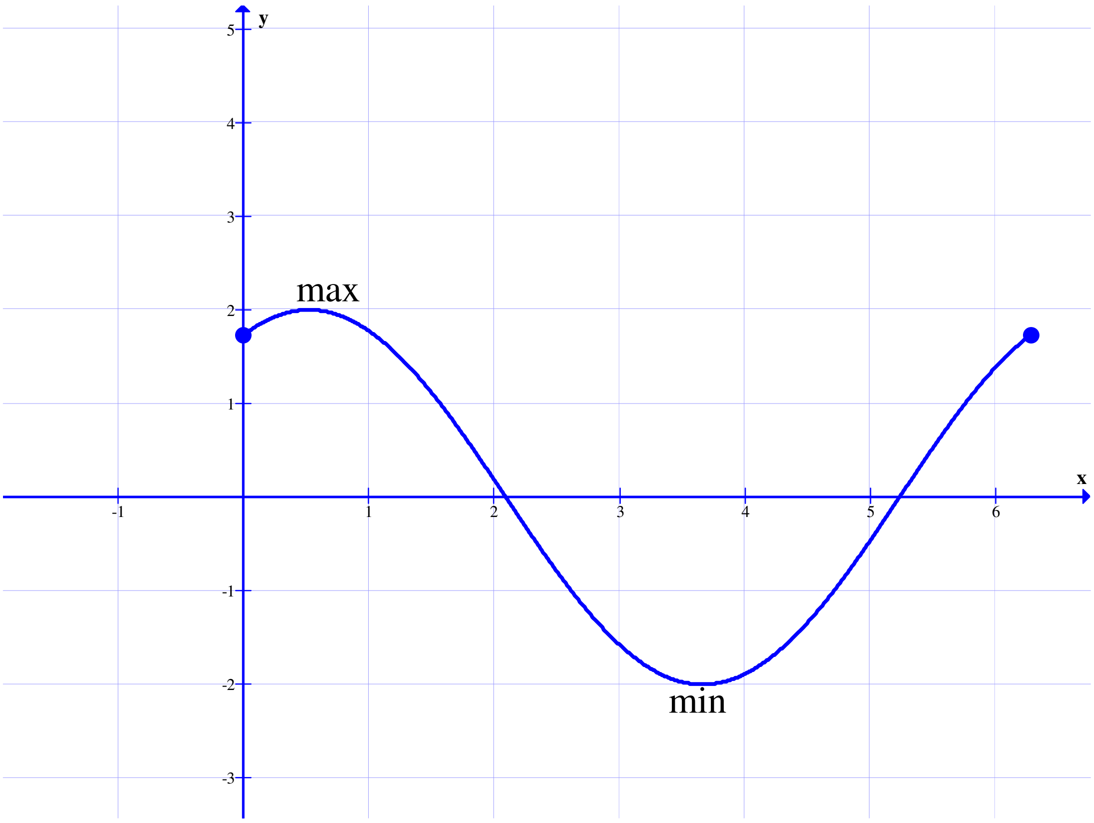
$$f'(x) = \cos x - \sqrt{۳}\sin x \xrightarrow{f'(x)=۰} \cos x - \sqrt{۳}\sin x = ۰$$

$$\xrightarrow{\div \sin x} \cot x = \sqrt{۳} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{۶} \\ x = \frac{۷\pi}{۶} \end{cases}$$

نقاط کمکی $(۰,\sqrt{۳})$ و $(\frac{\pi}{۲},۱)$ و $(\pi,-\sqrt{۳})$ و $(۲\pi,\sqrt{۳})$

x	$-\infty$	۰		$\frac{\pi}{۶}$		$\frac{۷\pi}{۶}$		۲π	$+\infty$
y'			$+$	۰	$-$	۰	$+$		
y		$\sqrt{۳}$	$\nearrow$	۲ max	$\searrow$	-۲ min	$\nearrow$	$\sqrt{۳}$	

به کمک نقطه یابی و با توجه به جدول تغییرات ، نمودار تابع را رسم می کنیم.



ث :

$$f(x)=\frac{۱-\sin x}{۱+\cos x} \quad ; \quad ۰\le x\le ۲\pi$$

$۱+\cos x=۰ \to \cos x=-۱ \to x=\pi$ مجانب قائم

$$f'(x)=\frac{-\cos x(۱+\cos x)-(-\sin x)(۱-\sin x)}{(۱+\cos x)^{۲}}=\frac{\sin x-\cos x-۱}{(۱+\cos x)^{۲}}$$

$$\xrightarrow{f'(x)=۰} \sin x-\cos x-۱=۰ \to \sin x-\cos x=۱ \to \sqrt{۲}\sin(x-\frac{\pi}{۴})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

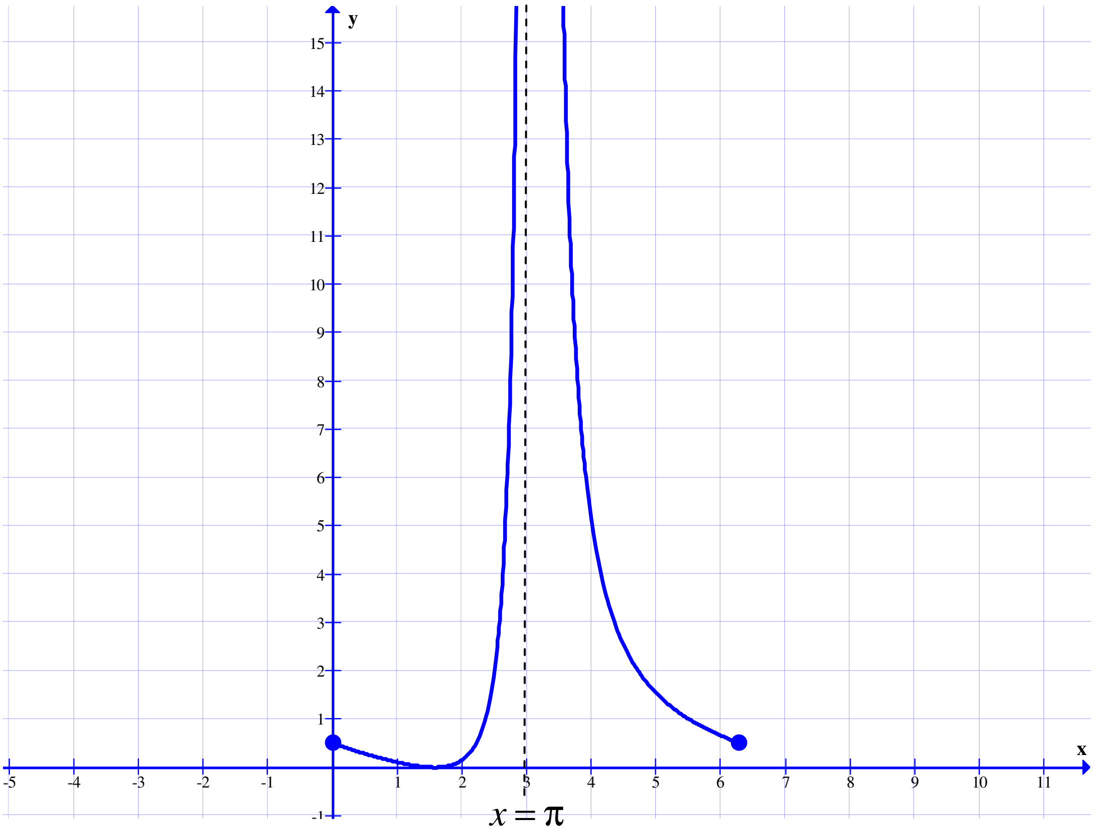
$$\to \begin{cases} x-\frac{\pi}{۴}=\frac{\pi}{۴} \to x=\frac{\pi}{۲} \\ x-\frac{\pi}{۴}=\frac{۳\pi}{۴} \to x=\pi \end{cases}$$

$x=\pi$ مجانب قائم است و عضو دامنه نیست.

نقاط کمکی $(۰,\frac{۱}{۲})$ و $(\frac{۳\pi}{۲},۲)$ و $(۲\pi,\frac{۱}{۲})$

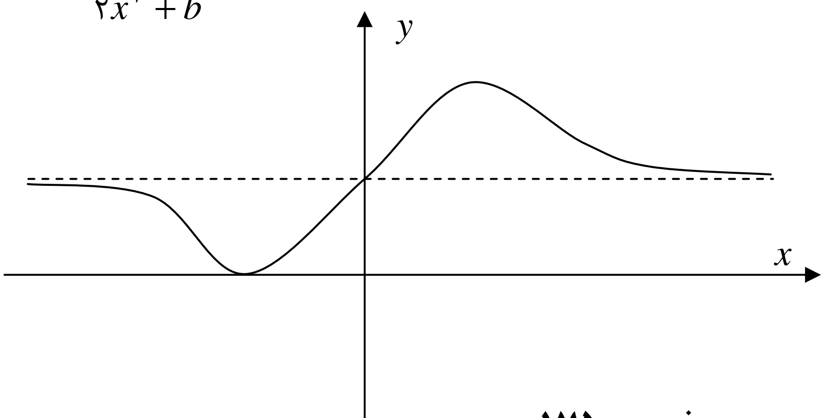
x	$-\infty$	۰		$\frac{\pi}{۲}$		π		$\frac{۳\pi}{۲}$		۲π	$+\infty$
y'			−	۰	+	‖		−			
y		$\frac{۱}{۲}$	↘	۰ max	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	۲	↘	$\frac{۱}{۲}$	

به کمک نقطه یابی و با توجه به جدول تغییرات ، نمودار تابع را رسم می کنیم.



***

۴۹ : (مسئله ی ۲ ص ۲۱۳) مقدار a و b را چنان اعداد انتخاب کنید که نمودار تابع f با ضابطه ی $y=\frac{x^۲+ax+۱}{۲x^۲+b}$ به صورت زیر باشند.



حل : چون نمودار تابع بر محور xها مماس است. پس معادله ی $f(x)=۰$ یعنی $x^۲+ax+۱=۰$ دارای ریشه ی مضاعف (منفی) است.

$$\Delta=۰\to a^۲-۴=۰\to a=\pm۲$$

طول ریشه ی مضاعف منفی است. پس :

$$x=\frac{-a}{۲}<۰\to\frac{a}{۲}>۰\to a>۰$$

یعنی مقدار $a=۲$ قابل قبول است.

از طرفی $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\frac{۱}{۲}$ ، پس $y=\frac{۱}{۲}$ قابل قبول است و چون محل تلاقی منحنی با محور عرض ها دقیقاً محل تلاقی مجانب افقی با محور y ها است. پس $f(۰)=\frac{۱}{۲}$ لذا

$$\frac{۱}{b}=\frac{۱}{۲}\to b=۲$$

***

حساب دیفرانسیل و انتگرال

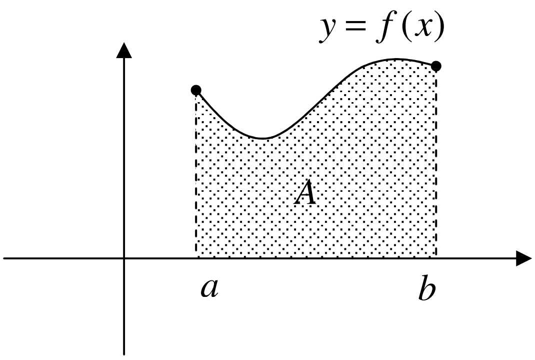
فصل چهارم : انتگرال و کاربرد آن

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی دبیرستان های اهواز و باوی

مسئله ی مساحت

یکی از مشکلات ریاضیدانان اولیه، مسئله ی یافتن مساحت نواحی بوده که مرزهای منحنی الخط (مانند دایره) می باشد.



بطور کلی روش محاسبه ی مساحت ناحیه ی زیر نمودار تابع $y = f(x) \geq ۰$ و بالای محور x در بازه ی $[a,b]$ می تواند، مشکل مطرح شده را حل کند. ما در این فصل به مطالعه و بررسی مسئله ی مساحت می پردازیم و انتگرال را با مسئله ی مساحت مفهوم سازی کرده و از این طریق مفهوم مهم انتگرال معین را فرمول بندی خواهیم کرد.

***

معرفی نماد سیگما

برای نمایش مجموع n عدد $a_۱, a_۲, a_۳, \dots, a_n$ می توان از نماد زیر استفاده کرد.

$$a_۱ + a_۲ + a_۳ + \dots + a_n = \sum_{i=۱}^{n} a_i \qquad \text{(می خوانیم سیگما } a_i \text{ از ۱ تا } n \text{)}$$

تعریف : اگر m و n اعدادی صحیح باشند که $m < n$ و f تابعی باشد که برای اعداد صحیح $m, m+۱, m+۲, \dots, n$ تعریف شده باشد، نماد $\sum_{i=m}^{n} f(i)$ نشانگر حاصل جمع مقادیر تابع f در این اعداد می باشد.

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+۱) + f(m+۲) + \dots + f(n)$$

که عبارت سمت راست این تساوی را بسط مجموع عبارت سیگما در سمت چپ می نامند.

توجه : در نماد $\sum_{i=m}^{n} f(i)$ ، حرف i را اندیس جمع بندی و دو عدد m و n را حدود جمع بندی می نامند. (m را حد پایین و n را حد بالا می نامند.)

مثال۱ :

$$\sum_{i=۱}^{۷} i = ۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷ = ۲۸$$

مثال۲ :

$$\sum_{i=۳}^{۶} i^{۲} = (۳)^{۲} + (۴)^{۲} + (۵)^{۲} + (۶)^{۲} = ۸۶$$

ویژگی نماد سیگما

با توجه به تعریف نماد جمع (سیگما) می توان ویژگی های زیر را برای این نماد بیان کرد.

۱) $\sum_{i=۱}^{n} k\,f(i) = k\sum_{i=۱}^{n} f(i) \qquad k \in R$

مثلاً: $\sum_{i=۱}^{۱۰} ۵i^{۳} = ۵\sum_{i=۱}^{۱۰} i^{۳}$

۲) $\sum_{i=۱}^{n} (f(i) \pm g(i)) = \sum_{i=۱}^{n} f(i) \pm \sum_{i=۱}^{n} g(i)$

مثلاً: $\sum_{i=۱}^{۱۰} (i^{۳} + ۵i) = \sum_{i=۱}^{۱۰} i^{۳} + \sum_{i=۱}^{۱۰} ۵i = \sum_{i=۱}^{۱۰} i^{۳} + ۵\sum_{i=۱}^{۱۰} i$

۳) $\sum_{i=۱}^{n} k = n.k \qquad k \in R$

مثلاً: $\sum_{i=۱}^{۸} ۵ = ۸(۵)$

۴) $\sum_{i=m}^{n} k = (n-m+۱)k \qquad k \in R$

مثلاً: $\sum_{i=۳}^{۹} ۵ = (۹-۳+۱)(۵) = ۷(۵)$

۵) $\sum_{i=m}^{p} f(i) + \sum_{i=p+۱}^{n} f(i) = \sum_{i=m}^{n} f(i)$

مثلاً: $\sum_{i=۱}^{۵} i^{۲} + \sum_{i=۶}^{۱۰} i^{۲} = \sum_{i=۱}^{۱۰} i^{۲}$

$$۶)\ \sum_{i=m}^{n} f(i) = \sum_{i=m+k}^{n+k} f(i-k)$$

مثلاً: $\sum_{i=-۴}^{۱۰} i^{۳} = \sum_{i=۱}^{۱۵} (i-۵)^{۳}$

$$۷)\ \sum_{i=m+k}^{k+n} f(i) = \sum_{i=m}^{n} f(i+k)$$

مثلاً: $\sum_{i=۴}^{۱۳} i^{۲} = \sum_{i=۱}^{۱۰} (i+۳)^{۲}$

توجه : ویژگی های۶ و۷ را قاعده ی لغزاندن اندیس ها (لغزاندن حدود) می نامند.

$$۸)\ \sum_{i=m+۱}^{n} f(i) = \sum_{i=۱}^{n} f(i) - \sum_{i=۱}^{m} f(i)$$

مثلاً : $\sum_{i=۵}^{۱۰} i^{۲} = \sum_{i=۱}^{۱۰} i^{۲} - \sum_{i=۱}^{۴} i^{۲}$

$$۹)\ \sum_{i=m}^{n} (f(i+۱) - f(i)) = f(n+۱) - f(m)$$

توجه : این ویژگی را قاعده ی تلسکوپی (قانون ادغام) می نامند.

مثلاً:

$$\sum_{k=۱}^{۹} \log \frac{k+۱}{k} = \sum_{k=۱}^{۹} (\log(k+۱) - \log k) = \log(۹+۱) - \log(۱) = \log(۱۰) - \log(۱) = ۱ - ۰ = ۱$$

توجه : محاسبه ی حاصل جمع به کمک نماد سیگما، مقدار حاصل به اندیس بستگی ندارد. یعنی :

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = \sum_{j=m}^{n} f(j)$$

مثلاً :

$$\sum_{i=۱}^{۹} \log \frac{i+۱}{i} = \sum_{j=۱}^{۹} \log \frac{j+۱}{j}$$

***

تمرین: حاصل $A=\sum_{i=۲}^{۱۵}\sum_{j=۵}^{۱۰}k$ را بیابید.

حل:

$$A=\sum_{i=۲}^{۱۵}\sum_{j=۵}^{۱۰}k=\sum_{i=۲}^{۱۵}(۱۰-۵+۱)k=۶\sum_{i=۲}^{۱۵}k=۶(۱۵-۲+۱)k=۸۴k$$

تمرین: اگر $\sum_{i=۱}^{n}(۳-۶i)=-۲۷$ باشد.حاصل $\sum_{i=۱}^{n}(۳+۴i)$ را بیابید.

حل:

$$\sum_{i=۱}^{n}(۳-۶i)=-۲۷\rightarrow\sum_{i=۱}^{n}۳-۶\sum_{i=۱}^{n}i=-۲۷\rightarrow ۳n-۶\times\frac{n(n+۱)}{۲}=-۲۷$$
$$\rightarrow ۳n-۳n(n+۱)=-۲۷\rightarrow n=۳$$
$$\therefore\sum_{i=۱}^{n}(۳+۴i)=\sum_{i=۱}^{n}۳+۴\sum_{i=۱}^{n}i=۳n+۴\times\frac{n(n+۱)}{۲}=۹+۲\times۳\times۴=۳۳$$

توجه:

$$۱+۲+۳+...+n=\frac{n(n+۱)}{۲}\rightarrow\sum_{i=۱}^{n}i=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

تمرین: قاعده ی تلسکوپی را ثابت کنید.

حل:

$$\sum_{i=m}^{n}(f(i+۱)-f(i))$$
$$=(f(m+۱)+f(m+۲)+...+f(n+۱))-(f(m)+f(m+۱)+f(m+۲)+...+f(n))$$
$$=f(m+۱)+f(m+۲)+...+f(n+۱)-f(m)-f(m+۱)-f(m+۲)-...-f(n)$$
$$=f(n+۱)-f(m)$$

تمرین: به کمک قاعده ی تلسکوپی ثابت کنید که

$$\sum_{i=۱}^{n}(۳i^۲+۳i+۱)=n^۳+۳n^۲+۳n$$

حل :

$$\sum_{i=۱}^{n}(۳i^{۲}+۳i+۱)=\sum_{i=۱}^{n}((i+۱)^{۳}-i^{۳})=(n+۱)^{۳}-(۱)^{۳}=(n+۱)^{۳}-۱=n^{۳}+۳n^{۲}+۳n$$

تمرین : حاصل $\sum_{i=۱۰}^{۹۹}\frac{۱}{i^{۲}+i}$ را به دست آورید.

حل :

$$\sum_{i=۱۰}^{۹۹}\frac{۱}{i^{۲}+i}=\sum_{i=۱۰}^{۹۹}(\frac{۱}{i}-\frac{۱}{i+۱})=(\frac{۱}{۱۰}-\frac{۱}{۱۱})+(\frac{۱}{۱۱}-\frac{۱}{۱۲})+(\frac{۱}{۱۲}-\frac{۱}{۱۳})+\ldots+(\frac{۱}{۹۹}-\frac{۱}{۱۰۰})=\frac{۱}{۱۰}-\frac{۱}{۱۰۰}=\frac{۹}{۱۰۰}$$

تمرین : $A=\frac{۲}{۲\times۴}+\frac{۲}{۳\times۵}+\frac{۲}{۴\times۶}+\ldots+\frac{۲}{۹\times۱۰}$ را بیابید.

حل:

$$A=\frac{۲}{۲\times۴}+\frac{۲}{۳\times۵}+\frac{۲}{۴\times۶}+\ldots+\frac{۲}{۹\times۱۱}=\sum_{k=۲}^{۹}\frac{۲}{k(k+۲)}$$

$$\frac{۲}{k(k+۲)}=\frac{۱}{k}-\frac{۱}{k+۲}\rightarrow A=\sum_{k=۲}^{۹}\frac{۲}{k(k+۲)}=\sum_{k=۲}^{۹}(\frac{۱}{k}-\frac{۱}{k+۲})$$

$$=\sum_{k=۲}^{۹}(\frac{۱}{k}-\frac{۱}{k+۱}+\frac{۱}{k+۱}-\frac{۱}{k+۲})=\sum_{k=۲}^{۹}(\frac{۱}{k}-\frac{۱}{k+۱})+\sum_{k=۲}^{۹}(\frac{۱}{k+۱}-\frac{۱}{k+۲})$$

$$=-\sum_{k=۲}^{۹}(\frac{۱}{k+۱}-\frac{۱}{k})-\sum_{k=۲}^{۹}(\frac{۱}{k+۲}-\frac{۱}{k+۱})=-\sum_{k=۲}^{۹}(\frac{۱}{k+۱}-\frac{۱}{k})-\sum_{k=۲}^{۹}(\frac{۱}{(k+۱)+۱}-\frac{۱}{k+۱})$$

$$=-(\frac{۱}{۹+۱}-\frac{۱}{۲})-(\frac{۱}{(۹+۱)+۱}-\frac{۱}{۲+۱})=\frac{۲}{۵}+\frac{۸}{۳۳}=\frac{۱۰۶}{۱۶۵}$$

***

فرمول های جمع بندی

در این قسمت تعدادی از فرمول های جمع بندی را بیان می کنیم. تمامی این فرمول ها به کمک اصل استقرای ریاضی و ویژگی های نماد سیگما قابل اثبات هستند.

۱) $\sum_{i=۱}^{n} ۱ = ۱+۱+...+۱ = n$

۲) $\sum_{i=۱}^{n} k = k+k+...+k = nk$

۳) $\sum_{i=۱}^{n} i = ۱+۲+۳+...+n = \frac{n(n+۱)}{۲}$

۴) $\sum_{i=۱}^{n} i^۲ = ۱^۲+۲^۲+۳^۲+...+n^۲ = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$

۵) $\sum_{i=۱}^{n} i^۳ = ۱^۳+۲^۳+۳^۳+...+n^۳ = (\frac{n(n+۱)}{۲})^۲$

۶) $\sum_{i=۱}^{n} i^۴ = ۱^۴+۲^۴+۳^۴+...+n^۴ = \frac{n(n+۱)(۶n^۳+۹n^۲+n-۱)}{۳۰}$

۷) $\sum_{i=۱}^{n} r^{i-۱} = ۱+r^۲+r^۳+...+r^{n-۱} = \frac{r^n-۱}{r-۱} \qquad ; \qquad r \neq ۱$

تمرین : حاصل $\sum_{i=۴}^{۹} i^۳$ را به دست آورید.

حل :

$$\sum_{i=۴}^{۹} i^۳ = \sum_{i=۱}^{۹} i^۳ - \sum_{i=۱}^{۴} i^۳ = (\frac{۹(۹+۱)}{۲})^۲ - (\frac{۴(۴+۱)}{۲})^۲ = (۴۵)^۲ - (۱۰)^۲ = ۲۰۲۵ - ۱۰۰ = ۱۹۲۵$$

***

حل تمرین های مهم

۱ : (مثال ص ۲۱۸) به کمک قانون لغزاندن اندیس ها عبارت $\sum_{i=۳}^{۱۷}\sqrt{۱+i^{۲}}$ را طوری بنویسید که اندیس پـایین آن یـک باشد.

حل :

$$\sum_{i=۳}^{۱۷}\sqrt{۱+i^{۲}} = \sum_{i=۳-۲}^{۱۷-۲}\sqrt{۱+(i+۳)^{۲}} = \sum_{i=۱}^{۱۵}\sqrt{۱+(i+۳)^{۲}}$$

۲ : (تمرین در کلاس ص ۲۱۸) عبارت $\sum_{i=a+۱}^{۱۲} f(b+i)^{۳}$ را به صورت $\sum_{i=۱}^{n} f(i)$ بنویسید. ($a\in N$)

حل :

$$\sum_{i=a+۱}^{۱۲} f(b+i)^{۳} = \sum_{i=a+۱-a}^{۱۲-a} f(a+b+i)^{۳} = \sum_{i=۱}^{۱۲-a} f(a+b+i)^{۳}$$

***

۳ : (مثال ص ۲۲۱) اگر $۱\le m\le n$، محاسبه کنید. $\sum_{k=m+۱}^{n}(۶k^{۲}-۴k+۳)$

حل :

$$\sum_{k=۱}^{n}(۶k^{۲}-۴k+۳)=۶\sum_{k=۱}^{n}k^{۲}-۴\sum_{k=۱}^{n}k+۳\sum_{k=۱}^{n}۱$$
$$=۶(\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶})-۴(\frac{n(n+۱)}{۲})+۳n=۲n^{۳}+n^{۲}+۲n$$

$$\sum_{k=m+۱}^{n}(۶k^{۲}-۴k+۳)=\sum_{k=۱}^{n}(۶k^{۲}-۴k+۳)+\sum_{k=۱}^{m}(۶k^{۲}-۴k+۳)$$
$$=(۲n^{۳}+n^{۲}+۲n)-(۲m^{۳}+m^{۲}+۲m)$$

***

۴ : (مسئله ی ۱ص ۲۱) در هر مورد جمع را بسط دهید.

$$۱)\ \sum_{i=۱}^{۴} i^{۳} \qquad ۴)\ \sum_{i=۱}^{n-۱} \frac{(-۱)^{i}}{i+۱} \qquad ۷)\ \sum_{n=۱}^{k} \sin\frac{n\pi}{۳k}$$

$$۲)\ \sum_{j=۱}^{۱۰۰} \frac{j^{۳}}{j+۱} \qquad ۵)\ \sum_{i=۳}^{n} \frac{(-۲)^{i}}{(i+۲)^{۲}} \qquad ۸)\ \sum_{k=۲}^{n} \frac{e^{-k}}{nk}$$

$$۳)\ \sum_{i=۱}^{n} ۳i \qquad ۶)\ \sum_{j=۱}^{n} \frac{j^{۲}}{n^{۳}}$$

حل :

$$۱)\ \sum_{i=۱}^{۴} i^{۳} = ۱^{۳} + ۲^{۳} + ۳^{۳} + ۴^{۳} = ۱ + ۸ + ۲۷ + ۸۱ = ۱۰۰$$

$$۲)\ \sum_{j=۱}^{۱۰۰} \frac{j^{۳}}{j+۱} = \frac{۱^{۳}}{۱+۱} + \frac{۲^{۳}}{۲+۱} + \frac{۳^{۳}}{۳+۱} + \ldots + \frac{۱۰۰^{۳}}{۱۰۰+۱} = \frac{۱}{۲} + \frac{۸}{۳} + \frac{۲۷}{۴} + \ldots + \frac{۱۰۰^{۳}}{۱۰۱}$$

$$۳)\ \sum_{i=۱}^{n} ۳i = ۳(۱) + ۳(۲) + ۳(۳) + \ldots + ۳(n) = ۳ + ۶ + ۹ + \ldots + ۳n$$

$$= ۳(۱ + ۲ + ۳ + \ldots + n) = \frac{۳n(n+۱)}{۲}$$

$$۴)\ \sum_{i=۱}^{n-۱} \frac{(-۱)^{i}}{i+۱} = \frac{(-۱)^{۱}}{۱+۱} + \frac{(-۱)^{۲}}{۲+۱} + \frac{(-۱)^{۳}}{۳+۱} + \ldots + \frac{(-۱)^{n-۱}}{(n-۱)+۱} = -\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \ldots + \frac{(-۱)^{n-۱}}{n}$$

$$۵)\ \sum_{i=۳}^{n} \frac{(-۲)^{i}}{(i+۲)^{۲}} = \frac{(-۲)^{۳}}{(۳+۲)^{۲}} + \frac{(-۲)^{۴}}{(۴+۲)^{۲}} + \frac{(-۲)^{۵}}{(۵+۲)^{۲}} + \ldots + \frac{(-۲)^{n}}{(n+۲)^{۲}}$$

$$= \frac{-۸}{۲۵} + \frac{۱۶}{۳۶} + \frac{-۳۲}{۴۶} + \ldots + \frac{(-۲)^{n}}{(n+۲)^{۲}}$$

$$۶)\ \sum_{j=۱}^{n} \frac{j^{۲}}{n^{۳}} = \frac{۱^{۲}}{n^{۳}} + \frac{۲^{۲}}{n^{۳}} + \frac{۳^{۲}}{n^{۳}} + \ldots + \frac{n^{۲}}{n^{۳}}$$

$$=\frac{۱}{n^۳}(۱^۲+۲^۲+۳^۲+...+n^۲)=\frac{۱}{n^۳}(\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶})=\frac{(n+۱)(۲n+۱)}{۶n^۲}$$

$$۷)\ \sum_{n=۱}^{k}\sin\frac{n\pi}{۳k}=\sin\frac{\pi}{۳k}+\sin\frac{۲\pi}{۳k}+\sin\frac{۳\pi}{۳k}+...+\sin\frac{k\pi}{۳k}$$

$$۸)\ \sum_{k=۲}^{n}\frac{e^{-k}}{nk}=\frac{e^{-۲}}{n(۱)}+\frac{e^{-۳}}{n(۲)}+\frac{e^{-۴}}{n(۳)}+...\frac{e^{-n}}{n(n)}=\frac{۱}{n}(\frac{۱}{e^۲}+\frac{۱}{۲e^۳}+\frac{۱}{۳e^۳}+...\frac{۱}{ne^n})$$

***

۵ : (مسئله ی ۲ص ۲۱) جمع های زیر را با استفاده از نماد سیگما بنویسید. (جواب منحصر بفرد نمی باشد.)

$۱)۵+۶+۷+۸+۹$

$۲)۲+۲+۲+...+۲$ (۲۰۰ بار)

$۳)\ ۲^۲-۳^۲+۴^۲-۵^۲+...-۹۹^۲$

$۴)\ ۱+۲x+۳x^۲+۴x^۳+...+۱۰۰x^{۹۹}$

$۵)\ ۱+x+x^۲+x^۳+...+x^n$

$۶)\ ۱-x+x^۲-x^۳+...+x^{۲n}$

$۷)\ ۱-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۹}-\frac{۱}{۱۶}+...+\frac{(-۱)^{n-۱}}{n^۲}$

$۸)\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۴}+\frac{۳}{۸}+\frac{۴}{۱۶}+...+\frac{n}{۲^n}$

حل :

$$۱)۵+۶+۷+۸+۹=\sum_{i=۵}^{۹}i$$

$$۲)۲+۲+۲+...+۲=\sum_{i=۱}^{۲۰۰}۲ \quad (\text{۲۰۰بار})$$

$$۳)\ ۲^۲-۳^۲+۴^۲-۵^۲+...-۹۹^۲=\sum_{i=۲}^{۹۹}(-۱)^i\,۲^i$$

$$۴)\ ۱+۲x+۳x^۲+۴x^۳+...+۱۰۰x^{۹۹}=\sum_{i=۱}^{۱۰۰}nx^{n-۱}$$

$$۵)\ ۱+x+x^۲+x^۳+...+x^n=\sum_{i=۱}^{n+۱}x^{i-۱}=\sum_{i=۰}^{n}x^i$$

$$۶)\ ۱-x+x^{۲}-x^{۳}+\ldots+x^{۲n}=\sum_{i=۰}^{۲n}(-۱)^{i}x^{i}$$

$$۷)\ ۱-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۹}-\frac{۱}{۱۶}+\ldots+\frac{(-۱)^{n-۱}}{n^{۲}}=\sum_{i=۱}^{n}\frac{(-۱)^{i-۱}}{i^{۲}}$$

$$۸)\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۴}+\frac{۳}{۸}+\frac{۴}{۱۶}+\ldots+\frac{n}{۲^{n}}=\sum_{i=۱}^{n}\frac{i}{۲^{i}}$$

***

انتگرال نامعین

هرگاه مشتق تابع $F(x)$ برابر $f(x)$ باشد. $F(x)$ را انتگرال نامعین یا به اختصار انتگرال[۱] تابع $f(x)$ می نامند و می نویسند.

$$F(x)=\int f(x)dx$$

بر این اساس می توان گفت که عمل انتگرال گیری، عکس عمل مشتق گیری می باشد.

$$\boxed{F(x)} \underset{\int f(x)dx=F(x)}{\overset{F'(x)=f(x)}{\rightleftarrows}} \boxed{f(x)}$$

مثال: اگر $f(x)=۲x$ مشتق تابع $F(x)$ باشد.به آسانی می توان گفت که $F(x)$ می تواند یکی از توابع زیر باشد.

$$F(x)=x^{۲}$$

$$F(x)=x^{۲}+\frac{۵}{۲}$$

$$F(x)=x^{۲}+\sqrt{۳}$$

....

....

$$F(x)=x^{۲}+c \qquad c\in R$$

زیرا اگر از تمام این توابع مشتق بگیریم، تابع $f(x)=۲x$ بدست می آید.

$$f(x)=۲x$$
$$\rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int ۲xdx=x^{۲}+c$$

مثال: اگر $g(x)=-\sin x$ مشتق تابع $G(x)$ باشد. به آسانی می توان گفت که $G(x)$ می تواند به شکل زیر باشد.

$$G(x)=\cos x+c \qquad c\in R$$

لذا:

$$g(x)=-\sin x$$
$$\rightarrow G(x)=\int g(x)dx=\int -\sin xdx=\cos x+c$$

[۱] – انتگرال نامعین را تابع اولیه یا پاد مشتق نیز می نامند.

توجه۱: عدد حقیقی c را ثابت انتگرال گیری می نامند.

توجه۲: واضح است که اگر از انتگرال تابع $f(x)$ مشتق بگیریم مجدداً به خود $f(x)$ می رسیم.یعنی:

$$\frac{d}{dx}(\int f(x)dx) = f(x) \rightarrow \frac{d}{dx}(F(x)+c) = f(x)$$

***

ویژگی های خطی انتگرال

۱: در عمل انتگرال گیری ضریب ثابت تابع شرکت نمی کند. به عبارت دیگر

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

یعنی ضریب ثابت را می توان به داخل علامت انتگرال انتقال داد یا از آن خارج کرد.

اثبات:

$$\frac{d}{dx}(k\int f(x)dx) = k\frac{d}{dx}(\int f(x)dx) = kf(x)$$

۲: انتگرال جمع جبری چند تابع با جمع جبری انتگرال های هر یک از آنها برابر است. به عبارت دیگر

$$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

اثبات:

$$\frac{d}{dx}(\int [f(x)+g(x)]dx) = \frac{d}{dx}(\int f(x)dx) + \frac{d}{dx}(\int g(x)dx) = f(x)+g(x)$$

***

فرمول های انتگرال گیری

۱) انتگرال تابع ثابت(عدد ثابت)

$$\int a dx = ax + c$$

تمرین: انتگرال های زیر را حساب کنید.

الف) $\int ۲dx =$

ب) $\int e dx =$

ج) $\int dx =$

۲) انتگرال تابع یک جمله ای

اگر $n \neq -۱$

$$\int x^n dx = \frac{۱}{n+۱} x^{n+۱} + c$$

اگر $n = -۱$

$$\int x^{-۱} dx = \int \frac{۱}{x} dx = L_n |x| + c$$

تمرین: انتگرال های زیر را حساب کنید.

الف) $\int ۲x^۳ dx =$

ب) $\int (۲x^۳ + ۳x + ۱)dx =$

ج) $\int (۳x^۲ + x)dx =$

د) $\int (\frac{۳}{x^۲})dx =$

هـ) $\int (\sqrt[۳]{x^۲})dx =$

و) $\int (۲x^۳ + ۳\sqrt{x} + \frac{۱}{x^۵} - ۴)dx =$

ز) $\int (۲\sqrt[۵]{x^۳} - \sqrt{x} + x - ۱)dx =$

ح) $\int \frac{۳}{x} dx =$

توجه:

۱) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

۲) $\frac{۱}{a^n} = a^{-n}$

تذکر: اگر مقدار تابع اولیه در یک نقطه معین باشد، می توان مقدار ثابت انتگرال یعنی c را نیز تعیین کرد.

تمرین: انتگرالی از تابع $f(x) = ۳x^۲ + ۲x + ۱$ را بیابید که به ازاء $x = ۱$ برابر۵ شود.

انتگرال گیری به روش تغییر متغیر

اگر u تابعی مشتق پذیر بر حسب x و du دیفرانسیل تابع u باشد، در این صورت می توان نوشت:

اگر $n \neq -1$
$$\int u^n du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + c$$

اگر $n = -1$
$$\int u^{-1} du = \int \frac{1}{u} du = L_n |u| + c$$

تمرین: انتگرال های زیر را حساب کنید.

الف) $\int 3(2x^3 + 5x + 1)^8 (6x^2 + 5)dx =$

ب) $\int 100(x^3 + 5)^{99} (3x^2)dx =$

ج) $\int 6(x^2 + 2x + 5)^7 (x+1)dx =$

د) $\int (3x-1)^5 dx =$

هـ) $\int k(ax+b)^m dx =$ $\qquad m \neq -1$

و) $\int x(x+1)^{10} dx =$

ز) $\int \frac{6x^2 + 5}{2x^3 + 5x + 1} dx =$

ح) $\int \frac{10xdx}{x^2+3} =$

ادامه ی فرمول های انتگرال گیری

۳) انتگرال توابع مثلثاتی

در انتگرال گیری از توابع مثلثاتی از روابط زیر استفاده می کنیم.

۱) $\int \sin xdx = -\cos x + c$

۲) $\int \sin axdx = -\frac{1}{a}\cos ax + c$

۳) $\int \cos xdx = \sin x + c$

۴) $\int \cos axdx = \frac{1}{a}\sin ax + c$

۵) $\int \tan xdx = -L_n |\cos x| + c$

۶) $\int \tan axdx = -\frac{1}{a} L_n |\cos ax| + c$

۷) $\int \cot xdx = L_n |\sin x| + c$

۸) $\int \cot axdx = \frac{1}{a} L_n |\sin ax| + c$

۹) $\int (1+\tan^2 x)dx = \tan x + c$

۱۰) $\int (1+\tan^2 ax)dx = \frac{1}{a}\tan ax + c$

۱۱) $\int (1+\cot^2 x)dx = -\cot x + c$

۱۲) $\int (1+\cot^2 ax)dx = -\frac{1}{a}\cot ax + c$

تمرین: انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int ۵(\sin x+\cos x)dx=$

۲) $\int ۵(\sin ۲x)dx=$

۳) $\int -۳(۵+\sin ۴x+\cos ۸x)dx=$

۴) $\int ۲(\cot ۵x)dx$

۵) $\int (\sin^{۲} x)dx=$

۶) $\int (\cos^{۲} x)dx=$

۷) $\int (\sin^{۳} x)dx=$

۸) $\int (\cos^{۳} x)dx=$

۹) $\int (\tan^{۲} x)dx=$

۱۰) $\int (\tan^{۴} x)dx=$

توجه: گاهی اوقات در انتگرال گیری از توابع مثلثاتی از روش تغییر متغیر نیز می توان استفاده کرد. همچنین می توان روابط مثلثاتی را برای تغییر تابع به تابعی مساوی آن بکار برد.

تمرین: انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int (\sin ۲x+\cos ۳x)dx=$

۲) $\int (\tan x+\cot x)dx=$

۳) $\int (۲+\tan^{۲}\frac{x}{۲}+\cot^{۲}\frac{x}{۳})dx=$

۴) $\int (۱+\cot ۴x)dx=$

۵) $\int (\sin^{۵} x.\cos x)dx=$

۶) $\int (\sin x+\cos x)^{۱۵}(\cos x-\sin x)dx=$

۷) $\int (\cos^{۸} x.\sin x)dx=$

۸) $\int (\cos^{۵} x)dx=$

۹) $\int (\sin^{۵} x)dx=$

۱۰) $\int (\sin ۴x.\cos ۲x)dx=$

۱۱) $\int (\cos ۵x.\cos ۲x)dx=$

تمرین: انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{\cos ۲x}{۱+\cos ۲x}dx$$

حل:

$$\int \frac{\cos ۲x}{۱+\cos ۲x}dx=\int \frac{۲\cos^{۲} x-۱}{۱+۲\cos^{۲} x-۱}dx=\int (\frac{۲\cos^{۲} x}{۲\cos^{۲} x}+\frac{-۱}{۲\cos^{۲} x})dx$$

$$=\int[1-\frac{1}{2}(1+\tan^2 x)]dx = x-\frac{1}{2}\tan x + c$$

تمرین: انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$$

حل:

$$\int\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx = 2\int\cos u du = 2\sin u + c = 2\sin\sqrt{x}+c$$

$$u=\sqrt{x}\rightarrow du=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

تمرین : انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int\frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}dx =$$

حل :

$$\int\frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}dx = \int\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x.\cos^2 x}dx = \int(\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x})(\frac{1}{\cos^2 x})dx = \int(\tan^3 x)(1+\tan^2 x)dx$$

$$=\int u^3 du = \frac{1}{4}u^4 + c = \frac{1}{4}\tan^4 x + c$$

$$y=\tan x\rightarrow du=(1+\tan^2 x)dx$$

تمرین: انتگرال زیر را محاسبه کنید.

ب) $\int\frac{1+\tan^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

الف) $\int\sin x\sqrt{\cos x}\,dx$

۴) انتگرال توابع نمایی

در انتگرال گیری از توابع نمایی از روابط زیر استفاده می کنیم.

۱) $\int a^{nx}dx = \frac{a^{nx}}{nL_n a}+c$

۲) $\int a^{nu}du = \frac{a^{nu}}{nL_n a}+c$

تمرین: انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int ۵a^{۲x}dx=$

۲) $\int e^{\sqrt{۲}x}dx=$

۳) $\int ۳^{(x^۲+x)}(۲x+۱)dx=$

۴) $\int e^{\sin x}\cos x dx=$

۵) انتگرال توابع معکوس مثلثاتی

در انتگرال گیری از توابع معکوس مثلثاتی از روابط زیر استفاده می کنیم.

۱) $\int \frac{dx}{\sqrt{۱-x^۲}}=\sin^{-۱}x+c$

۲) $\int \frac{du}{\sqrt{۱-u^۲}}=\sin^{-۱}u+c$

۳) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^۲-x^۲}}=\sin^{-۱}\frac{x}{a}+c \quad a>۰$

۴) $\int \frac{du}{\sqrt{a^۲-u^۲}}=\sin^{-۱}\frac{u}{a}+c \quad a>۰$

۵) $\int \frac{-dx}{\sqrt{۱-x^۲}}=\cos^{-۱}x+c$

۶) $\int \frac{-du}{\sqrt{۱-u^۲}}=\cos^{-۱}u+c$

۷) $\int \frac{-dx}{\sqrt{a^۲-x^۲}}=\cos^{-۱}\frac{x}{a}+c \quad a>۰$

۸) $\int \frac{-du}{\sqrt{a^۲-u^۲}}=\cos^{-۱}\frac{u}{a}+c \quad a>۰$

۹) $\int \frac{dx}{۱+x^۲}=\tan^{-۱}x+c$

۱۰) $\int \frac{du}{۱+u^۲}=\tan^{-۱}u+c$

۱۱) $\int \frac{dx}{a^۲+x^۲}=\frac{۱}{a}\tan^{-۱}\frac{x}{a}+c \quad a>۰$

۱۲) $\int \frac{du}{a^۲+u^۲}=\frac{۱}{a}\tan^{-۱}\frac{u}{a}+c \quad a>۰$

۱۳) $\int \frac{-dx}{۱+x^۲}=\cot^{-۱}x+c$

۱۴) $\int \frac{-du}{۱+u^۲}=\cot^{-۱}u+c$

۱۵) $\int \frac{-dx}{a^۲+x^۲}=\frac{۱}{a}\cot^{-۱}\frac{x}{a}+c \quad a>۰$

۱۶) $\int \frac{-du}{a^۲+u^۲}=\frac{۱}{a}\cot^{-۱}\frac{u}{a}+c \quad a>۰$

تمرین: انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int \frac{۲dx}{۱+x^۲}=$

۲) $\int \frac{dx}{\sqrt{۴-x^۲}}=$

۳) $\int \frac{dx}{۸+x^۲}=$

۴) $\int \frac{dx}{\sqrt{۱-۹x^۲}}=$

تمرین: انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\int \frac{۲}{۱+۴t^{۲}}dt$$

حل:

$$\int \frac{۲}{۱+۴t^{۲}}dt = \int \frac{۲}{۱+(۲t)^{۲}}dt = \int \frac{۱}{۱+(u)^{۲}}du = Arc\tan u + c = Arc\tan(۲t) + c$$

$$u = ۲t \rightarrow du = ۲dt$$

***

چند فرمول دیگر انتگرال گیری

۱) $\int e^{x}dx = e^{x} + c$

۲) $\int e^{u}du = e^{u} + c$

۳) $\int \frac{۱}{x}dx = L_n|x| + c$

۴) $\int \frac{۱}{u}du = L_n|u| + c$

۵) $\int \sqrt{x}dx = \frac{۲}{۳}\sqrt{x^{۳}} + c$

۶) $\int \sqrt{u}du = \frac{۲}{۳}\sqrt{u^{۳}} + c$

۷) $\int \frac{۱}{x}\log_a^x dx = \log_a^x + c$

۸) $\int \frac{۱}{u}\log_a^u du = \log_a^u + c$

۹) $\int L_n dx = xL_x - x + c$

۱۰) $\int u'f'(u)dx = f(u) + c$

***

توجه : نماد dx در انتگرال نشان دهنده ی متغیری است که باید نسبت به آن عمل انتگرال گیری صورت گیرد. لذا در محاسبه ی انتگرال توجه به این نماد ضروری است. به نمونه های زیر توجه کنید.

الف) $\int ۶x^{۲}y\,dx = \frac{۶}{۳}x^{۳}y + c = ۲x^{۳}y + c$

ب) $\int ۶x^{۲}y\,dy = \frac{۶}{۲}x^{۲}y^{۲} + c = ۳x^{۲}y^{۲} + c$

تمرین برای حل : انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int (ax^{۲} + by^{۲} + ۳x^{۲}y^{۲} - ۱)dx =$

۲) $\int (ax^{۲} + by^{۲} + ۳x^{۲}y^{۲} - ۱)dy =$

***

ویژگی های مساحت یک ناحیه

مفهوم مساحت یک ناحیه دارای ویژگی زیر می باشد.

۱ : مساحت یک ناحیه در صفحه ، عددی حقیقی و نامنفی و بر حسب واحد های سطح (مربع واحد) است.

۲ : دو ناحیه ی همنهشت، مساحت مساوی دارند.

۳ : هرگاه ناحیه ی R_1 درون ناحیه ی R_2 باشد. آنگاه :

$$\text{مساحت } R_1 \le \text{مساحت } R_2$$

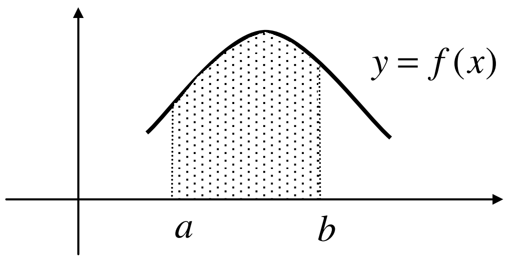
۴ : هرگاه ناحیه ی R اجتماعی متناهی (n تا) از ناحیه های مجزا باشد. آنگاه :

$$\text{مساحت } R = \text{مساحت } R_1 + \text{مساحت } R_2 + \text{مساحت } R_3 + \dots + \text{مساحت } R_n$$

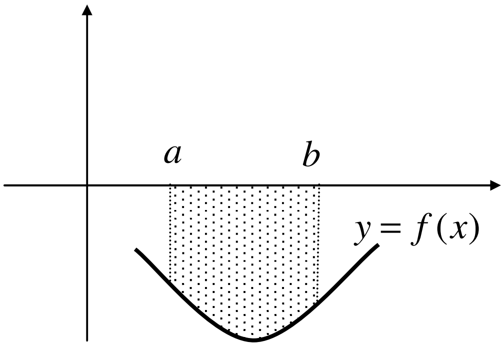
***

انتگرال معین

تعریف : فرض کنید که تابع f در بازه ی $[a,b]$ تعریف شده و پیوسته باشد. انتگرال معین تابع f از a تا b که آن را به صورت $\int_a^b f(x)dx$ نمایش می دهند. به صورت زیر تعریف می کنند.



الف : اگر تابع f در بازه ی $[a,b]$ پیوسته و نامنفی باشد (نمودار تابع بالای محور x ها باشد) ، در این صورت مساحت محدود به منحنی $y=f(x)$ و محور x ها و خطوط $x=a$ و $x=b$ را انتگرال معین تابع f از a تا b می نامند.



ب : اگر تابع f در بازه ی $[a,b]$ پیوسته و منفی باشد (نمودار تابع پایین محور x ها باشد)،در این صورت قرینه ی مساحت محدود به منحنی $y=f(x)$ و محور x ها و خطوط $x=a$ و $x=b$ را انتگرال معین تابع f از a تا b می نامند.

نتیجه : انتگرال معین یک تابع پیوسته در فاصله ی $[a,b]$ همواره یک عدد حقیقی است. اگر نمودار تابع بالای محور x ها باشد، مقدار انتگرال معین را مثبت و اگر پایین محور x ها باشد، مقدار انتگرال را منفی خواهد شد.

توجه : عدد a را حد پایین و عدد b را حد بالای انتگرال معین می نامند.

تذکر:

۱) اگر نمودار تابع بالای محور x ها باشد، مقدار انتگرال را مثبت و اگر پایین محور x ها باشد، مقدار انتگرال را منفی قرار می دهیم ، ولی ابعاد شکل را همیشه مثبت فرض کنید.

۲) اگر ناحیه ی بدست آمده از چند قسمت تشکیل شده باشد،برای تعیین انتگرال آن ، مساحت هر یک از این قسمت ها را بدست می آوریم و با توجه به اینکه هر قسمت بالای محور x ها یا پایین آن باشد،علامت مورد مربوطه را در نظر گرفته و جمع جبری اعداد حاصل را تعیین می کنیم.

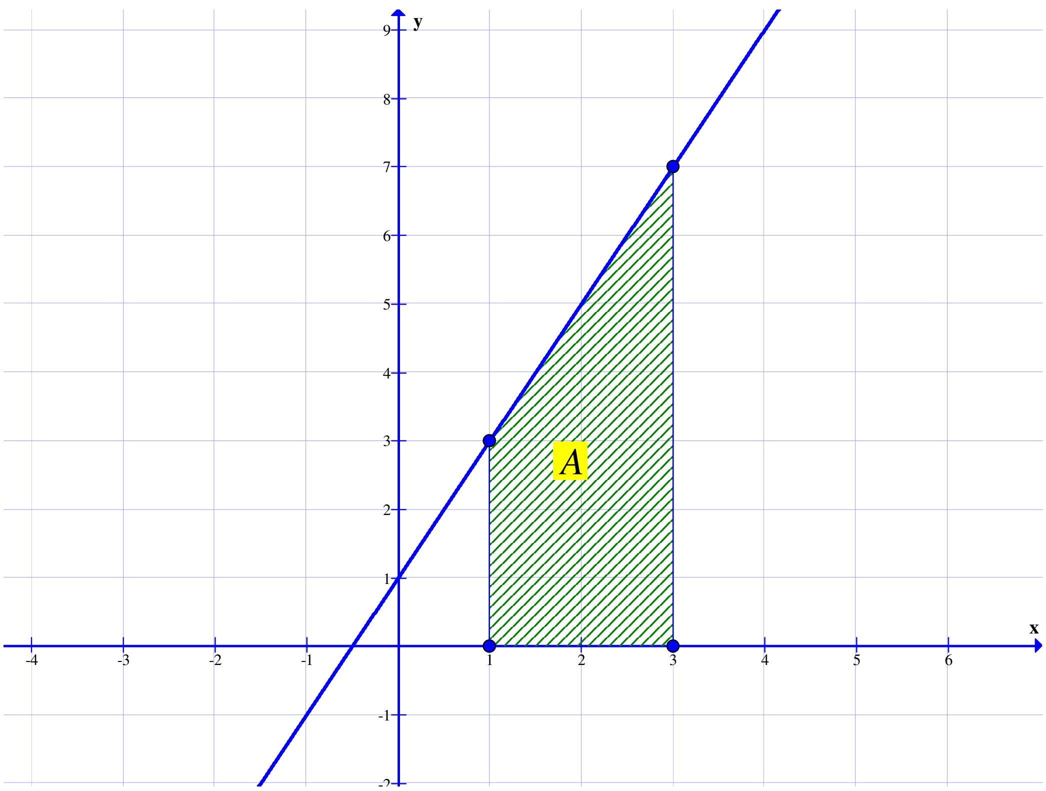
۳) اگر لازم باشد برای تعیین محل تلاقی نمودار با محور x ها مقدار y را برابر صفر قرار دهید و معادله ی بدست آمده را حل کنید.

تمرین: اگر $f(x)=۲x+۱$ باشد،مقدار $\int_{۱}^{۳} f(x)dx$ را بدست آورید.

حل :

$f(x)=۲x+۱$

x	۱	۳
y	۳	۷



ناحیه A ذوزنقه است. بالای محور طول ها است پس انتگرال معین مثبت است.

$A=\frac{۱}{۲}(۳+۷)(۲)=۱۰$ مساحت ذوزنقه

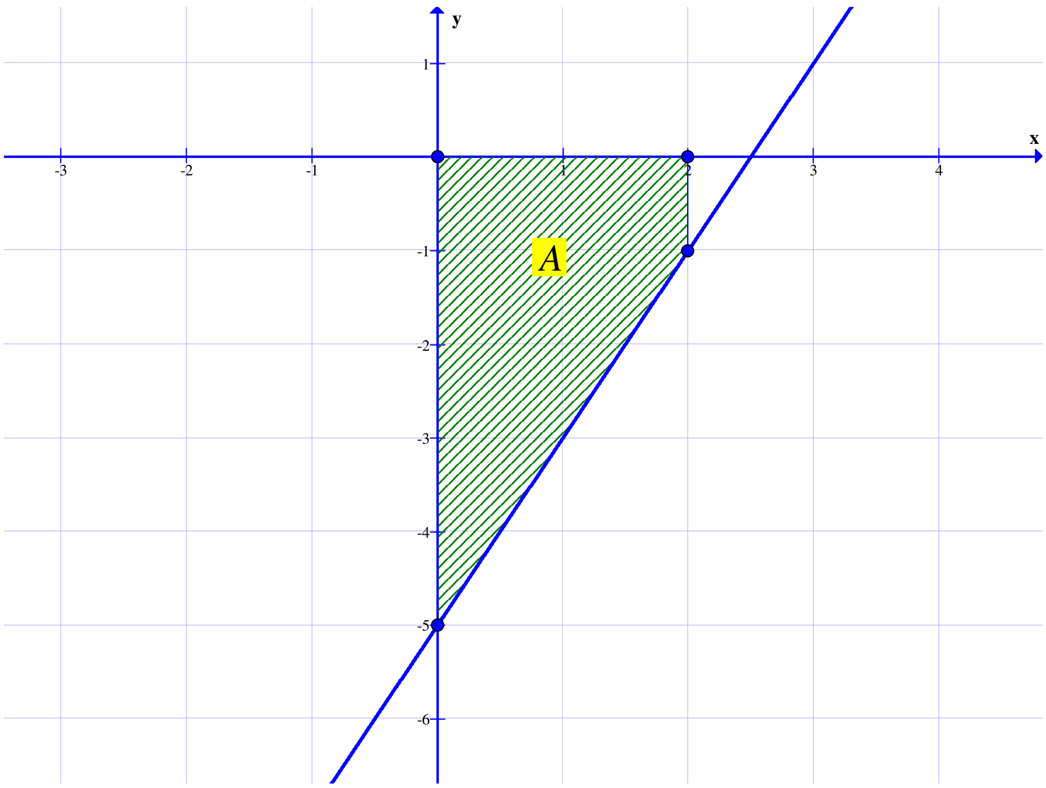
$\int_{۱}^{۳} f(x)dx=A=۱۰$

تمرین: اگر $g(x)=۲x-۵$ باشد،مقدار $\int_{۰}^{۲} g(x)dx$ را بدست آورید.

حل :

$g(x)=۲x-۵$

x	۰	۲
y	-۵	-۱



ناحیه A ذوزنقه است و پایین محور طول ها است پس انتگرال معین منفی است.

$A=\frac{۱}{۲}(۱+۵)(۲)=۶$ مساحت ذوزنقه

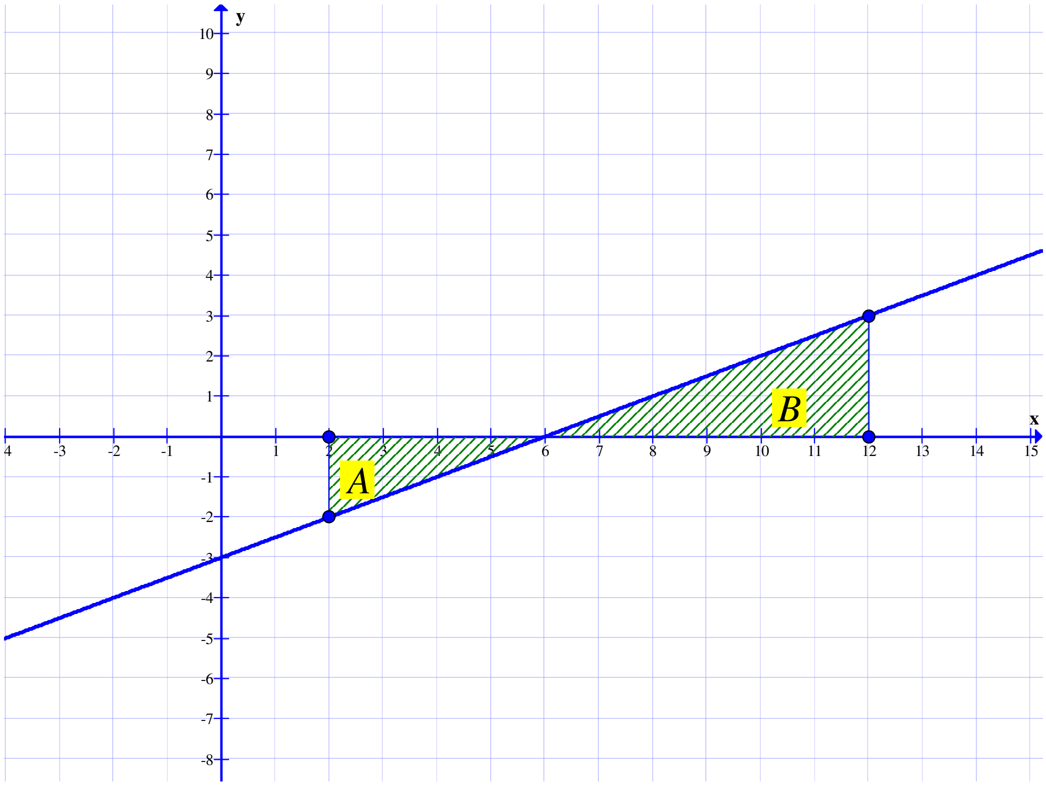
$\int_{۰}^{۲} g(x)dx=-A=-۶$

تمرین: حاصل $\int_{۲}^{۱۲}(\frac{x}{۲}-۳)dx$ را بدست آورید.

حل :

$f(x)=\frac{x}{۲}-۳$

x	۲	۱۲
y	-۲	۳



ناحیه های B و A مثلث قائم الزاویه هستند. ناحیه ی A پایین و ناحیه ی B بالای محور طول ها است.

$A=\frac{۱}{۲}(۴)(۲)=۴$ مساحت مثلث قائم الزاویه

$B=\frac{۱}{۲}(۶)(۳)=۹$ مساحت مثلث قائم الزاویه

$$\int_{۲}^{۱۲}(\frac{x}{۲}-۳)dx=-A+B=-۴+۹=۵$$

***

تمرین برای حل : انتگرال های زیر را بدست آورید.

۱) $\int_{0}^{5}(|x-3|-1)dx$

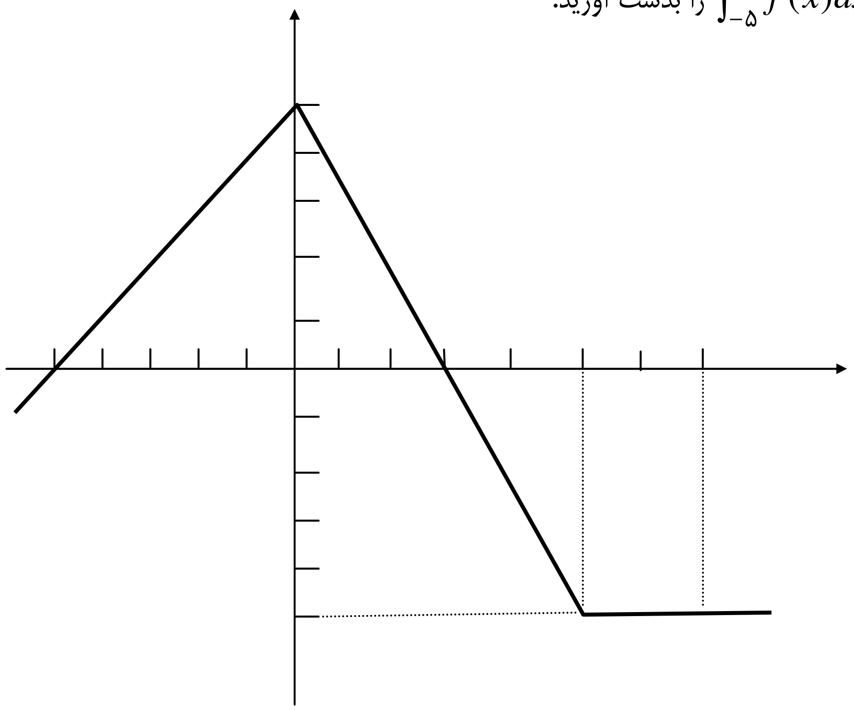
۲) $\int_{-8}^{3}(\frac{|x-2|}{2}-3)dx$

۳) $\int_{-3}^{3}([x]+1)dx$

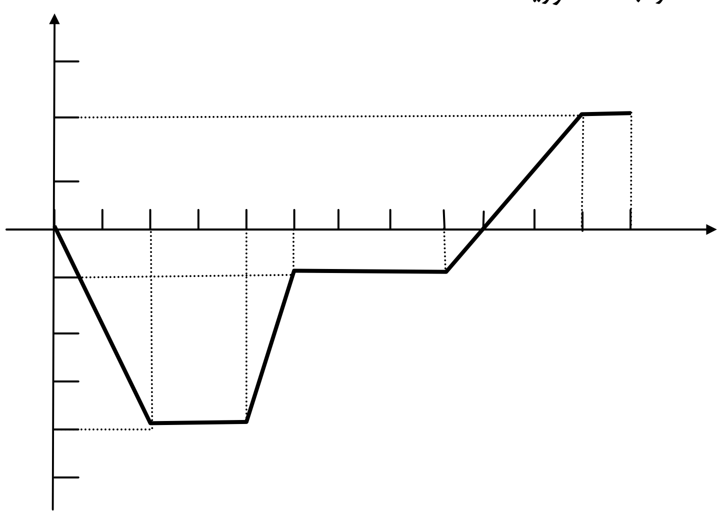
۴) $\int_{-3}^{3}|[x]|\,dx$

۵) $\int_{-2}^{3}||x-1|-2|\,dx$

تمرین: با توجه به شکل زیر $\int_{-5}^{7} f(x)dx$ را بدست آورید.



تمرین: با توجه به شکل زیر انتگرال های داده شده را بدست آورید.



الف) $\int_{0}^{2} f(x)dx$

ب) $\int_{2}^{11} f(x)dx$

ج) $\int_{0}^{12} f(x)dx$

***

نتیجه : با توجه به تعریف انتگرال معین، بدیهی است که برای هر تابع مانند f داریم:

$$\int_a^a f(x)dx = ۰$$

***

توجه: روش های محاسبه در تمرین های فوق وقتی ممکن است که تابع خطی باشد. حال اگر تابع غیر خطی باشد، باید از قضیه ی دوم اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال برای محاسبه ی انتگرال معین استفاده نمود. اما در ابتدا مساحت را به عنوان حد مجموع معرفی و تقریب نقصانی و تقریب اضافی مساحت زیر منحنی در یک بازه ی معین را تعریف می کنیم.

***

تقریب نقصانی و اضافی سطح زیر منحنی

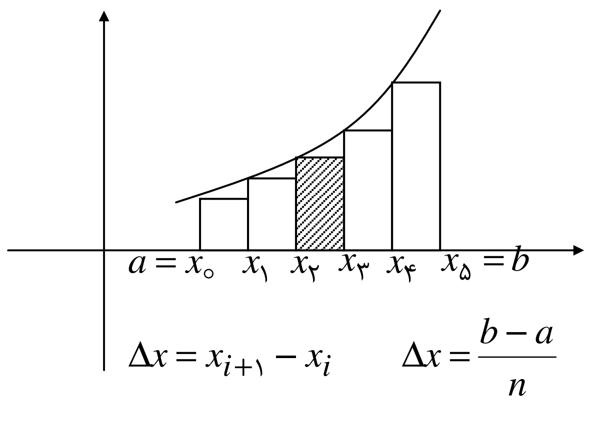
فرض کنیم که $y = f(x)$ تابعی پیوسته و نامنفی در بازه ی $[a,b]$ باشد. می خواهیم، مساحت ناحیه ی محدود به نمودار f و محور x ها و دو خط $x=a$ و $x=b$ را پیدا کنیم. این ناحیه را سطح زیر منحنی $y=f(x)$ از $x=a$ و $x=b$ می نامیم.

این سطح را می توان توسط تشکیل مستطیل های محاط در آن (تقریب نقصانی) و یا مستطیل های محیط بر آن (تقریب اضافی) پیدا نمود. بدیهی است که سطح زیر منحنی حدوداً با مجموع مساحت این مستطیل ها برابر است.

- ✓ تقریب نقصانی سطح در تابع صعودی

اگر تابع f در فاصله ی $[a,b]$ صعودی باشد. مقدار ε_i ابتدای فاصله های $[x_i, x_{i+۱}]$ می باشد. یعنی:

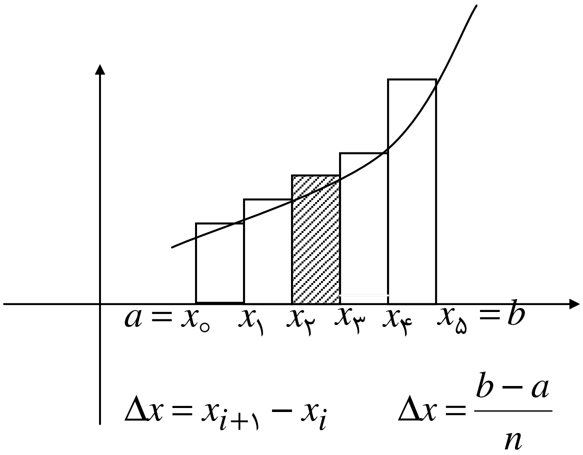
$$\sum_{i=۰}^{n-۱} f(\varepsilon_i)\Delta x$$ تقریب نقصانی مساحت



✓ تقریب اضافی سطح در تابع صعودی

اگر تابع f در فاصله ی $[a,b]$ صعودی باشد. مقدار ε_i انتهای فاصله های $[x_i , x_{i+1}]$ می باشد. یعنی:

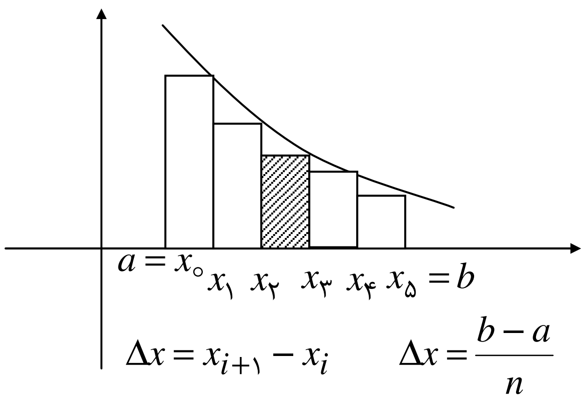
تقریب اضافی مساحت $\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x$



✓ تقریب نقصانی سطح در تابع نزولی

اگر تابع f در فاصله ی $[a,b]$ نزولی باشد. مقدار ε_i انتهای فاصله های $[x_i , x_{i+1}]$ می باشد. یعنی:

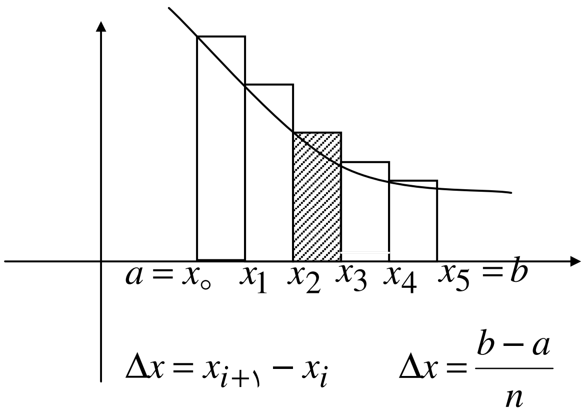
تقریب نقصانی مساحت $\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x$



✓ تقریب اضافی سطح در تابع نزولی

اگر تابع f در فاصله ی $[a,b]$ نزولی باشد. مقدار ε_i ابتدای فاصله های $[x_i , x_{i+1}]$ می باشد. یعنی:

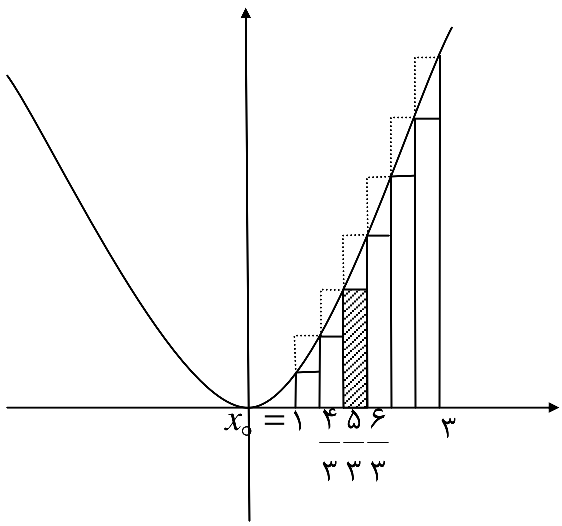
تقریب اضافی مساحت $\sum_{i=0}^{n-1} f(\varepsilon_i)\Delta x$



توجه : تساوی $L_n(f)=\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x$ را مجموع پایین ریمـان و تـساوی $U_n(f)=\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x$ را مجمـوع بالای ریمان می گویند.

تمرین: سطح بین منحنی $y=x^2$ و محور xها را از $x=1$ تا $x=3$ با تقریب نقصانی و اضـافی بـه ازای $n=6$ پیـدا کنید.

حل: در فاصله ی $[1,3]$ تابع $y=x^2$ صعودی است. لذا:



$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{3-1}{6}=\frac{1}{3}$$

$$x_0=1$$

$$x_1=x_0+\Delta x=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

$$x_2=x_1+\Delta x=\frac{4}{3}+\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$$

$$x_3=x_2+\Delta x=\frac{5}{3}+\frac{1}{3}=2$$

$$x_4=x_3+\Delta x=\frac{6}{3}+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$

$$x_5=x_4+\Delta x=\frac{7}{3}+\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$$

$$x_6=x_5+\Delta x=\frac{8}{3}+\frac{1}{3}=3$$

تقریب نقصانی مساحت

$$L_6(f)=\sum_{i=0}^{n-1} f(\varepsilon_i)\Delta x$$
$$=f(x_0)\Delta x+f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+f(x_3)\Delta x+f(x_4)\Delta x+f(x_5)\Delta x$$
$$=(\frac{3}{3})^2\times\frac{1}{3}+(\frac{4}{3})^2\times\frac{1}{3}+(\frac{5}{3})^2\times\frac{1}{3}+(\frac{6}{3})^2\times\frac{1}{3}+(\frac{7}{3})^2\times\frac{1}{3}+(\frac{8}{3})^2\times\frac{1}{3}$$
$$=[(\frac{3}{3})^2+(\frac{4}{3})^2+(\frac{5}{3})^2+(\frac{6}{3})^2+(\frac{7}{3})^2+(\frac{8}{3})^2]\times\frac{1}{3}$$
$$=[\frac{9}{9}+\frac{16}{9}+\frac{25}{9}+\frac{36}{9}+\frac{49}{9}+\frac{64}{9}]\times\frac{1}{3}=[9+16+25+36+49+64]\times\frac{1}{27}=\frac{199}{27}=7/37$$

تقریب اضافی مساحت

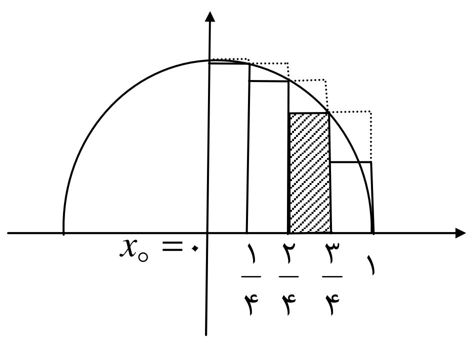
$$U_{۶}(f)=\sum_{i=۱}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x$$
$$=f(x_۱)\Delta x+f(x_۲)\Delta x+f(x_۳)\Delta x+f(x_۴)\Delta x+f(x_۵)\Delta x+f(x_۶)\Delta x$$
$$=(\frac{۴}{۳})^۲\times\frac{۱}{۳}+(\frac{۵}{۳})^۲\times\frac{۱}{۳}+(\frac{۶}{۳})^۲\times\frac{۱}{۳}+(\frac{۷}{۳})^۲\times\frac{۱}{۳}+(\frac{۸}{۳})^۲\times\frac{۱}{۳}+(\frac{۹}{۳})^۲\times\frac{۱}{۳}$$
$$=[(\frac{۴}{۳})^۲+(\frac{۵}{۳})^۲+(\frac{۶}{۳})^۲+(\frac{۷}{۳})^۲+(\frac{۸}{۳})^۲+(\frac{۹}{۳})^۲]\times\frac{۱}{۳}$$
$$=[\frac{۱۶}{۹}+\frac{۲۵}{۹}+\frac{۳۶}{۹}+\frac{۴۹}{۹}+\frac{۶۴}{۹}+\frac{۸۱}{۹}]\times\frac{۱}{۳}=[۱۶+۲۵+۳۶+۴۹+۶۴+۸۱]\times\frac{۱}{۲۷}=\frac{۲۷۱}{۲۷}=۱۰/۰۳$$

***

تمرین: مقدار تقریب نقصانی و اضافی مساحت زیر منحنی $y=\sqrt{۱-x^۲}$ را در فاصله ی $[۰,۱]$ بـرای $n=۴$ بدست آورید.

حل: در فاصله ی $[۰,۱]$ تابع $y=\sqrt{۱-x^۲}$ نزولی است. لذا:

$$x_۰=۰$$
$$x_۱=x_۰+\Delta x=۰+\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۴}$$
$$x_۲=x_۱+\Delta x=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}=\frac{۲}{۴}$$
$$x_۳=x_۲+\Delta x=\frac{۲}{۴}+\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}$$
$$x_۴=x_۳+\Delta x=\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۴}=۱$$



$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{۱-۰}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

تقریب نقصانی مساحت

$$U_{۴}(f)=\sum_{i=۱}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x$$
$$=[f(\frac{۱}{۴})+f(\frac{۲}{۴})+f(\frac{۳}{۴})+f(\frac{۴}{۴})]\times\frac{۱}{۴}=[(\frac{\sqrt{۱۵}}{۴})+(\frac{\sqrt{۱۲}}{۴})+(\frac{\sqrt{۷}}{۴})+(۰)]\times\frac{۱}{۴}=۰/۶۲$$

تقریب اضافی مساحت

$$L_۴(f)=\sum_{i=۰}^{n-۱} f(\varepsilon_i)\Delta x$$

$$=[f(۰)+f(\frac{۱}{۴})+f(\frac{۲}{۴})+f(\frac{۳}{۴})]\times\frac{۱}{۴}=[(۱)+(\frac{\sqrt{۱۵}}{۴})+(\frac{\sqrt{۱۲}}{۴})+(\frac{\sqrt{۷}}{۴})]\times\frac{۱}{۴}=۰/۸۷$$

تمرین برای حل :

۱ : مقدار تقریب نقصانی و اضافی مساحت زیر منحنی $y=\frac{۱}{x}$ را در فاصله ی $[۱,۲]$ برای $n=۶$ بدست آورید.

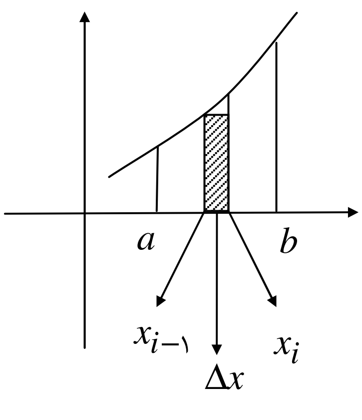
۲ : مقدار تقریب نقصانی و اضافی مساحت زیر منحنی $y=x^۳$ را در فاصله ی $[۰,۱]$ برای $n=۴$ بدست آورید.

نتیجه : اگر $y=f(x)$ تابعی پیوسته و نامنفی در بازه ی $[a,b]$ باشد. در این صورت بدیهی است که مقدار تقریب نقصانی مساحت زیر منحنی در فاصله ی $[a,b]$ کمتر از مقدار واقعی و مقدار تقریب اضافی مساحت زیر منحنی در این فاصله بیشتر از مقدار واقعی می باشند. یعنی :

تقریب اضافی > مساحت زیر منحنی > تقریب نقصانی

***

مجموع ریمان برای محاسبه ی سطح زیر منحنی



با توجه به مفهوم تقریب نقصانی و اضافی برای تابع پیوسته و نامنفی f، اگر تعداد مستطیل ها (یعنی n) در فاصله ی $[a,b]$ خیلی زیاد شوند،(یعنی $n\to+\infty$) تقریب نقصانی و اضافی مساحت به هم نزدیک می شوند. پس:

$$A=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x$$

که در تساوی فوق $f(\varepsilon_i)$ مینیمم مطلق یا ماکزیمم مطلق f در زیر بازه های $[x_{i-۱},x_i]$ است. این رابطه را حد مجموع ریمان برای محاسبه‌ی سطح زیر می نامند[۱].

[1] . اگر تابع f در بازه ی $[a,b]$ پیوسته نباشد ولی برای هر یک از زیر بازه ها مقدار ماکزیمم و مقدار مینیمم مطلق وجود داشته باشند، باز هم می توان مجموع بالا و مجموع پایین ریمان را تعریف نمود.

تمرین: مساحت ناحیه ی محدود به منحنی $y=x^{۲}$ و محور x ها و خط $x=۳$ را با اختیار مستطیل های محاطی بیابید. (تقریب نقصانی ریمان)

حل:

$x_{\circ}=۰$

$x_{۱}=\Delta x$

$x_{۲}=۲\Delta x$

$x_{۳}=۳\Delta x$

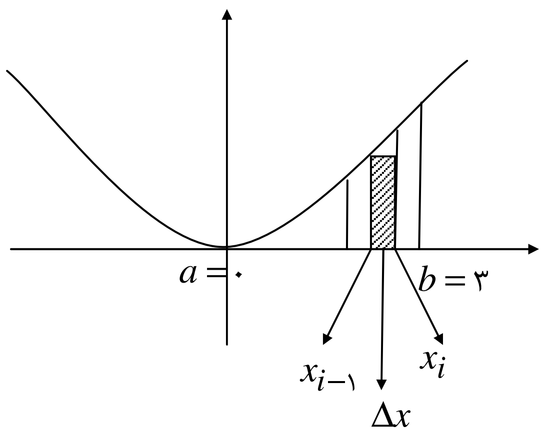
....

$x_i=i\Delta x$

....

$x_{n-۱}=(n-۱)\Delta x$

$x_n=n\Delta x=n\times\frac{۳}{n}=۳$



$f(x)=x^{۲}$

$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{۳-۰}{n}=\frac{۳}{n}$

چون تابع f در بازه ی $[۰,۳]$ صعودی است و مینیمم مطلق f بر زیر بازه ی $[x_{i-۱},x_i]$ مساوی $f(x_{i-۱})$ است، بنابراین:

$$A=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n}f(x_{i-۱})\Delta x$$

و چون $x_{i-۱}=(i-۱)\Delta x$ و $f(x)=x^{۲}$ پس $f(x_{i-۱})=[(i-۱)\Delta x]^{۲}$. حال مراحل زیر را برای محاسبه ی حد مجموع ریمان را انجام می دهیم.

مرحله ی اول: محاسبه ی مجموع ریمان

$$\sum_{i=۱}^{n}f(x_{i-۱})\Delta x=\sum_{i=۱}^{n}[(i-۱)\Delta x]^{۲}\Delta x=\sum_{i=۱}^{n}[(i-۱)^{۲}\Delta x^{۲}]\Delta x=\sum_{i=۱}^{n}(i-۱)^{۲}\Delta x^{۳}$$

$$=\sum_{i=۱}^{n}(i-۱)^{۲}(\frac{۳}{n})^{۳}=\sum_{i=۱}^{n}(i-۱)^{۲}(\frac{۲۷}{n^{۳}})=\frac{۲۷}{n^{۳}}\times\sum_{i=۱}^{n}(i-۱)^{۲}=\frac{۲۷}{n^{۳}}\times\sum_{i=۱}^{n}(i^{۲}-۲i+۱)$$

$$=\frac{۲۷}{n^{۳}}\times[\sum_{i=۱}^{n}i^{۲}-۲\sum_{i=۱}^{n}i+\sum_{i=۱}^{n}۱]=\frac{۲۷}{n^{۳}}\times[\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}-۲\times\frac{n(n+۱)}{۲}+n]$$

$$=\frac{۲۷}{n^۳}\times(\frac{۲n^۳+۳n^۲+n-۶n^۲-۶n+۶n}{۶})=\frac{۹}{۲}\times(\frac{۲n^۳-۳n^۲+n}{n^۳})=\frac{۹}{۲}\times(\frac{۲n^۲-۳n+۱}{n^۲})$$

مرحله ی دوم: محاسبه ی حد مجموع

$$A=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n}f(x_{i-۱})\Delta x=\lim_{n\to+\infty}[\frac{۹}{۲}\times(\frac{۲n^۲-۳n+۱}{n^۲})]=\lim_{n\to+\infty}[\frac{۹}{۲}\times\frac{۲n^۲}{n^۲}]=\frac{۹}{۲}\times\frac{۲}{۱}=۹$$

بنابراین مساحت ناحیه ی مساوی ۹ واحد مربع است.

تمرین: مساحت ناحیه ی محدود به منحنی $y=x^۲$ و محور x ها و خط $x=۳$ را با اختیار مستطیل های محیطی بیابید.(تقریب اضافی ریمان)

حل: با توجه به تمرین قبل واضح است که ماکزیمم مطلق f بر زیر بازه ی $[x_{i-۱},x_i]$ مساوی $f(x_i)$ است،بنابراین:

$$A=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n}f(x_i)\Delta x$$

و چون $x_i=i\Delta x$ و $f(x)=x^۲$ پس $f(x_i)=[i\Delta x]^۲$ حال مراحل زیر را برای محاسبه ی حد مجموع ریمان را انجام می دهیم.

مرحله ی اول: محاسبه ی مجموع ریمان

$$\sum_{i=۱}^{n}f(x_i)\Delta x=\sum_{i=۱}^{n}[i\Delta x]^۲\Delta x=\sum_{i=۱}^{n}[i^۲\Delta x^۲]\Delta x=\sum_{i=۱}^{n}i^۲\Delta x^۳=\sum_{i=۱}^{n}i^۲(\frac{۳}{n})^۳$$

$$=\sum_{i=۱}^{n}i^۲(\frac{۲۷}{n^۳})=\frac{۲۷}{n^۳}\times\sum_{i=۱}^{n}i^۲=\frac{۲۷}{n^۳}\times\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}=\frac{۹}{۲}\times(\frac{۲n^۲+۳n+۱}{n^۲})$$

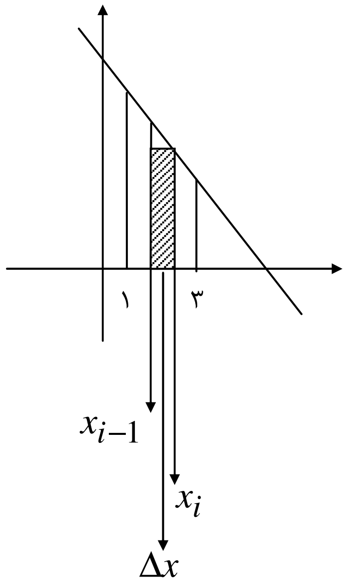
مرحله ی دوم: محاسبه ی حد مجموع

$$A=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n}f(x_i)\Delta x=\lim_{n\to+\infty}[\frac{۹}{۲}\times(\frac{۲n^۲+۳n+۱}{n^۲})]=\lim_{n\to+\infty}[\frac{۹}{۲}\times\frac{۲n^۲}{n^۲}]=\frac{۹}{۲}\times\frac{۲}{۱}=۹$$

بنابراین مساحت ناحیه ی مساوی ۹ واحد مربع است.

تمرین: مساحت ذوزنقه ی محدود به خط $۲x + y = ۸$ و محور xها و خطوط $x = ۱$ و $x = ۳$ را بیابید. مسئله را با مستطیل های محاطی و با تقریب نقصانی ریمان حل کنید.

حل:
$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{۳-۱}{n} = \frac{۲}{n}$$



$x_۰ = ۱$

$x_۱ = ۱ + \Delta x$

$x_۲ = ۱ + ۲\Delta x$

$x_۳ = ۱ + ۳\Delta x$

....

$x_i = ۱ + i\Delta x$

....

$x_{n-۱} = ۱ + (n-۱)\Delta x$

$x_n = ۱ + n\Delta x = ۱ + n \times \frac{۲}{n} = ۳$

تابع $y = -۲x + ۸$ در فاصله ی $[۱,۳]$ نزولی است، پس می نیمم مطلق f بر بازه ی iام $[x_{i-۱}, x_i]$ مساوی $f(x_i)$ است.پس:

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=۱}^{n} f(x_i)\Delta x$$

و چون $x_i = ۱ + i\Delta x$ و $f(x) = -۲x + ۸$ پس

$$f(x_i) = -۲x_i + ۸ = -۲(۱ + i\Delta x) + ۸ = -۲i\Delta x + ۶$$

حال مراحل زیر را برای محاسبه ی حد مجموع ریمان را انجام می دهیم.

مرحله ی اول: محاسبه ی مجموع ریمان

$$\sum_{i=۱}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=۱}^{n}(-۲i\Delta x + ۶)\Delta x = \sum_{i=۱}^{n}(-۲i\Delta^۲ x + ۶\Delta x) = \sum_{i=۱}^{n}[-۲i\Delta^۲ x] + \sum_{i=۱}^{n} ۶\Delta x$$

$$= \sum_{i=۱}^{n}[-۲i(\frac{۲}{n})^۲] + \sum_{i=۱}^{n} ۶(\frac{۲}{n}) = \sum_{i=۱}^{n} -۲i(\frac{۴}{n^۲}) + \sum_{i=۱}^{n}\frac{۱۲}{n} = -\frac{۸}{n^۲}\sum_{i=۱}^{n} i + \frac{۱۲}{n}\sum_{i=۱}^{n} ۱$$

$$= -\frac{۸}{n^۲} \times \frac{n(n+۱)}{۲} + \frac{۱۲}{n} \times n = -\frac{۴(n^۲ + n)}{n^۲} + ۱۲ = \frac{-۴n^۲ - ۴n + ۱۲n^۲}{n^۲} = \frac{-۴n + ۸n^۲}{n^۲}$$

مرحله ی دوم: محاسبه ی حد مجموع

$$A=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n} f(x_i)\Delta x=\lim_{n\to+\infty}[\frac{-۴n+۸n^۲}{n^۲}]=\lim_{n\to+\infty}[\frac{۸n^۲}{n^۲}]=۸$$

بنابراین مساحت ناحیه ی مساوی ۸ واحد مربع است.

توجه: به کمک دستور مساحت ذوزنقه نیز می توان به این نتیجه نیز دست یافت.

$f(x)=-۲x+۸$

طول قاعده ی بزرگ $f(۱)=-۲(۱)+۸=۶$

طول قاعده ی کوچک $f(۳)=-۲(۳)+۸=۲$

طول ارتفاع $۳-۱=۲$

$$S=\frac{۱}{۲}(a+b)h=\frac{۱}{۲}(۶+۲)۲=۸$$

تمرین: مساحت زیر خط $y=mx$ را در فاصله ی $[a,b]$ برای $m>۰$ را تعیین کنید.

حل:

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}$$

$$\begin{aligned}
x_۰&=a\\
x_۱&=a+۱\Delta x\\
x_۲&=a+۲\Delta x\\
x_۳&=a+۳\Delta x\\
&\dots\dots\dots\\
x_i&=a+i\Delta x=a+\frac{b-a}{n}\times i\\
&\dots\dots\dots\dots\\
x_n&=a+n\Delta x=a+\frac{b-a}{n}\times n=b
\end{aligned}$$

تابع $y=mx$ در فاصله ی $[a,b]$ صعودی است، پس می نیمم مطلق f بر بازه ی iام $[x_{i-۱},x_i]$ مساوی $f(x_i)$ است.پس:

$$A=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n} f(x_i)\Delta x$$

و چون $x_i = a + \frac{b-a}{n} i$ و $y = mx$ پس

$$f(x_i) = mx_i = m(a + \frac{b-a}{n} i)$$

حال مراحل زیر را برای محاسبه ی حد مجموع ریمان را انجام می دهیم.

مرحله ی اول: محاسبه ی مجموع ریمان

$$\sum_{i=۱}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=۱}^{n} [m(a + \frac{b-a}{n} i)]\Delta x = \sum_{i=۱}^{n} [m(a + \frac{b-a}{n} i)](\frac{b-a}{n})$$

$$= \sum_{i=۱}^{n} [ma(\frac{b-a}{n}) + m(\frac{b-a}{n})^۲ i)] = \sum_{i=۱}^{n} [ma(\frac{b-a}{n})] + \sum_{i=۱}^{n} [m(\frac{b-a}{n})^۲ i)]$$

$$= ma(\frac{b-a}{n})n + m(\frac{b-a}{n})^۲ \sum_{i=۱}^{n} i = ma(b-a) + m(\frac{b-a}{n})^۲ (\frac{n(n+۱)}{۲})$$

$$= ma(b-a) + m\frac{(b-a)^۲}{n}(\frac{n+۱}{۲}) = ma(b-a) + \frac{m(b-a)^۲ (n+۱)}{۲n}$$

$$= ma(b-a) + \frac{m(b-a)^۲ (n+۱)}{۲n}$$

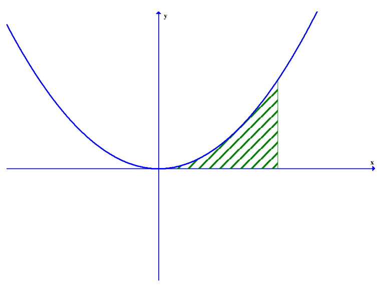
مرحله ی دوم: محاسبه ی حد مجموع

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=۱}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n \to +\infty} [ma(b-a) + \frac{m(b-a)^۲ (n+۱)}{۲n}] = ma(b-a) + \frac{m(b-a)^۲}{۲}$$

$$= \frac{۲ma(b-a)}{۲} + \frac{m(b-a)^۲}{۲} = m(\frac{۲ab - ۲a^۲ + b^۲ - ۲ab + a^۲}{۲}) = m(\frac{b^۲ - a^۲}{۲})$$

تمرین:مساحت ناحیه ای را که محدود به سهمی $y = x^۲$ و خطوط $y = ۰$ و $x = ۰$ و $x = b > ۰$ می باشد. را به دست آورید.

حل :



$$f(x) = x^۲ \quad \text{و} \quad \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{b-۰}{n} = \frac{b}{n}$$

$$x_0 = 0, x_1 = \Delta x, x_2 = 2\Delta x, x_3 = 3\Delta x, \ldots, x_i = i\Delta x, \ldots, x_n = n\Delta x = n \times \frac{b}{n} = b$$

با توجه به نمودار تابع واضح است که ماکزیمم مطلق f بر زیر بازه ی $[x_{i-1}, x_i]$ مساوی $f(x_i)$ است، بنابراین:

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

و چون $x_i = i\Delta x$ و $f(x) = x^2$ پس $f(x_i) = (i\Delta x)^2$ حال مراحل زیر را برای محاسبه ی حد مجموع ریمان را انجام می دهیم.

مرحله ی اول: محاسبه ی مجموع ریمان

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} (i\Delta x)^2 \Delta x = \sum_{i=1}^{n} (\frac{bi}{n})^2 \frac{b}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{b^3 i^2}{n^3} = \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{b^3}{n^3}(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6})$$

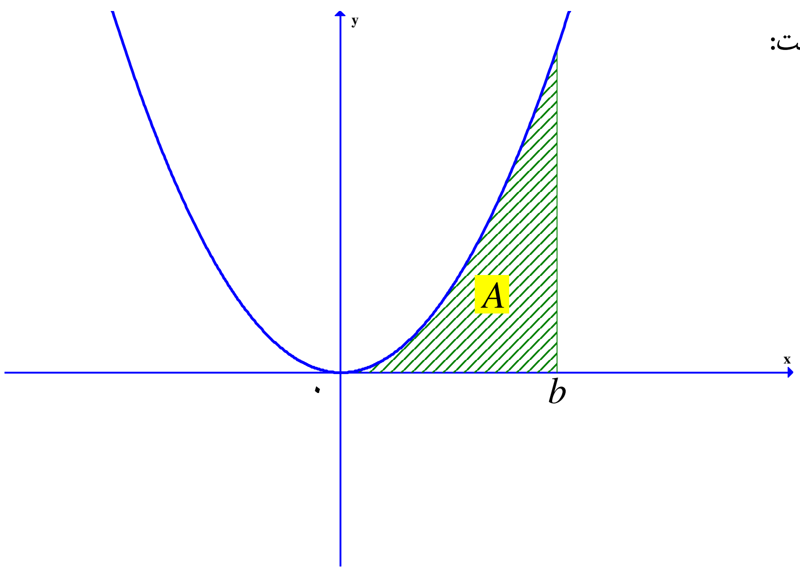
$$= \frac{b^3}{n^3}(\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}) = \frac{b^3}{6}(\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3})$$

مرحله ی دوم: محاسبه ی حد مجموع

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n \to +\infty} \frac{b^3}{6}(\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3}) = \lim_{n \to +\infty} \frac{b^3}{6}(\frac{2n^3}{n^3}) = \frac{b^3}{3}$$

بنابراین مساحت ناحیه ی مساوی $\frac{b^3}{3}$ واحد مربع است.

نکته ی مهم : واضح است که مساحت بدست آمده به مقدار b بستگی دارد.(تابعی از b است.) با مشتق گیری از این تابع نسبت به b می توان نوشت:



$$A(b)=\frac{b^{۳}}{۳}\to A'(b)=b^{۲}$$

یعنی مقدار b در تابع اصلی ($y=x^{۲}$) جایگزین شده است. این نتیجه را قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال مـی نامند. در ادامه با این قضیه بیشتر آشنا می شوید.

تمرین برای حل : مساحت ناحیه ی محدود به سهمی $y=x^{۲}$ و خطوط $x=۰$ و $x=۱$ و محور طول ها را به روش تقریب مساحت (حد مجموع ریمان) به دست آورید. (جواب $\frac{۱}{۳}$)

***

تعریف: تابع f در بازه ی $[a,b]$ را انتگرال پذیر گویند، هرگاه حد مجموع بالای ریمان و حد مجموع پایین ریمـان برابـر شوند. یعنی:

$$\lim_{n\to+\infty} L_n(f)=\lim_{n\to+\infty} U_n(f)$$

تمرین: تابع زیر در بازه ی $[\frac{i}{n},\frac{i+۱}{n}]$ برای $n\in N$ و $۰\le i\le n-۱$ را در نظر بگیرید.

$$f(x)=\begin{cases}۱ & x\in Q\\ ۰ & x\notin Q\end{cases}$$

الف) مقدار ماکزیمم و مینیمم مطلق این تابع در هر یک از این بازه ها را پیدا کنید.

ب) مجموع نقصانی ریمان($L_n(f)$)و مجموع اضافی ریمان ($U_n(f)$) را در فاصله ی $[۰,۱]$ بدست آورید.

ج) آیا تابع f در بازه ی $[۰,۱]$ انتگرال پذیر است؟چرا؟

حل:

الف) در بازه ی $[\frac{i}{n},\frac{i+۱}{n}]$ ماکزیمم مطلق f برابر یک است که به ازای x های گویا بدست می آید. همچـنـین در ایـن بازه مینیمم مطلق f برابر صفر است که به ازای x های اصم حاصل می شود.

ب)

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{۱-۰}{n}=\frac{۱}{n}$$

مجموع نقصانی ریمان $L_n(f)=\sum_{i=۱}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x=\sum_{i=۱}^{n}۰\times\frac{۱}{n}=۰$

مجموع اضافی ریمان $U_n(f)=\sum_{i=۱}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x=\sum_{i=۱}^{n}۱\times\frac{۱}{n}=\frac{n}{n}=۱$

حد مجموع نقصانی ریمان $\lim_{n\to+\infty} L_n(f)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x=\lim_{n\to+\infty} ۰=۰$

حد مجموع اضافی ریمان $\lim_{n\to+\infty} U_n(f)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x=\lim_{n\to+\infty} ۱=۱$

ج) تابع در این فاصله انتگرال پذیر نیست. زیرا تقریب نقصانی و اضافی ریمان در این فاصله برابر نیستند. یعنی:

$$\lim_{n\to+\infty} L_n(f)\neq\lim_{n\to+\infty} U_n(f)$$

نتیجه:

۱- اگر تابع f در بازه ی $[a,b]$ پیوسته باشد،آنگاه در این فاصله انتگرال پذیر است.

۲- اگر تابع f در بازه ی $[a,b]$ پیوسته نباشد،آنگاه در این فاصله ممکن است انتگرال پذیر و ممکن است انتگرال پذیر نباشد. لذا لزومی ندارد که تابع f پیوسته باشد تا انتگرال پذیر باشد.

تابع زیر در فاصله ی $[-۱,۱]$ پیوسته نیست ولی در این فاصله انتگرال پذیر است.

$$f(x)=\begin{cases} ۰ & x\neq ۰ \\ ۱ & x=۰ \end{cases}$$

در واقع ماکزیمم مطلق f برابر یک است که به ازای $x=۰$ بدست می آید. همچنین در این بازه مینیمم مطلق f برابر صفر است که به ازای $x\neq۰$ حاصل می شود. از طرفی

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{۱-(-۱)}{n}=\frac{۲}{n}$$

مجموع نقصانی ریمان $L_n(f)=\sum_{i=۱}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x=\sum_{i=۱}^{n}۰\times\frac{۲}{n}=۰$

مجموع اضافی ریمان $U_n(f)=\sum_{i=۱}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x=\sum_{i=۱}^{n}۱\times۰=۰$

$$\lim_{n\to+\infty} L_n(f)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x=\lim_{n\to+\infty} 0=0$$ حد مجموع نقصانی ریمان

$$\lim_{n\to+\infty} U_n(f)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x=\lim_{n\to+\infty} 0=0$$ حد مجموع اضافی ریمان

لذا تقریب نقصانی و اضافی ریمان در این فاصله برابر می باشند. یعنی:

$$\lim_{n\to+\infty} L_n(f)=\lim_{n\to+\infty} U_n(f)$$

***

تعریف: اگر f تابعی انتگرال پذیر در فاصله ی $[a,b]$ باشد در این صورت حد مجموع بالا یا پایین ریمان را انتگرال معین تابع f در فاصله ی $[a,b]$ می نامند. در واقع:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x=\int_a^b f(x)dx$$

بدیهی است که:

الف) $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

ب) اگر $f(a)$ وجود داشته باشد. $\int_a^a f(x)dx=0$

ج) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

د) $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$

هـ) $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

و) هرگاه توابع f و g در بازه ی $[a,b]$ نامنفی و انتگرال پذیر بوده و به ازای هر x از این بازه $f(x)\geq g(x)$ آنگاه

$$\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx$$

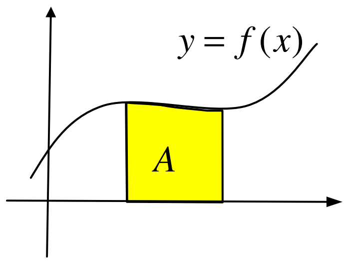
ز) در بازه ی $[a,b]$ همواره داریم:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b |f(x)|\,dx$$

نتیجه : اگر تابع f در فاصله ی $[a,b]$ پیوسته باشد و به ازای هر x در فاصله ی $[a,b]$ داشته باشیم:

$$f(x) \geq 0$$

در این صورت مساحت ناحیه محدود به منحنی تابع f و محور x ها و خطوط $x=a$ و $x=b$ برابر حد مجموع بالا یا پایین ریمان در این فاصله خواهد بود.



$$A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

تمرین: اگر f تابع انتگرال پذیر در بازه ی $[a,b]$ باشد، ثابت کنید که:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

حل:

$$\int_a^b kf(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} kf(\varepsilon_i)\Delta x$$

$$= \lim_{n\to+\infty} k\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x = k \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x = k\int_a^b f(x)dx$$

تمرین: اگر f و g دو تابع انتگرال پذیر در بازه ی $[a,b]$ باشند، ثابت کنید که:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

حل:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(\varepsilon_i)+g(\varepsilon_i)]\Delta x = \lim_{n\to+\infty} [\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x + \sum_{i=1}^{n} g(\varepsilon_i)\Delta x]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x + \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} g(\varepsilon_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

تمرین: ویژگی های زیر را به کمک حد مجموع ریمان ثابت کنید.

الف) $\int_a^b dx = b-a$

ب) $\int_a^b kdx = k(b-a)$

حل:

الف:

$$\int_a^b dx=\int_a^b ۱dx=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n}۱\Delta x=\lim_{n\to+\infty}n\Delta x=\lim_{n\to+\infty}n\times\frac{b-a}{n}=\lim_{n\to+\infty}(b-a)=b-a$$

ب)

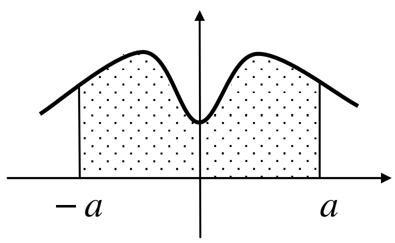
$$\int_a^b kdx=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n}k\Delta x=\lim_{n\to+\infty}nk\Delta x=\lim_{n\to+\infty}nk\times\frac{b-a}{n}=\lim_{n\to+\infty}k(b-a)=k(b-a)$$

***

انتگرال توابع زوج و فرد با حدود متقارن

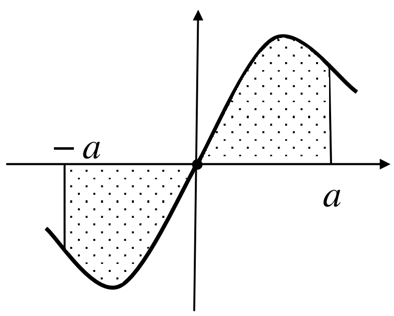
اگر تابع f در فاصله ی $[-a,a]$ پیوسته باشد و با توجه به خواص تقارنی توابع زوج و فرد می توان نوشت :

۱) اگر تابع f زوج باشد. داریم:



$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=۲\int_{۰}^{a}f(x)dx$$

۲) اگر تابع f فرد باشد. داریم:



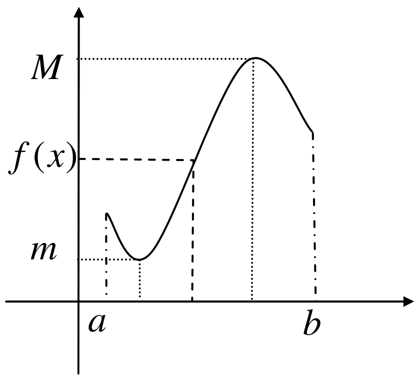
$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=۰$$

***

قضیه : (قضیه ی کرانداری در انتگرال معین) اگر تابع f در بازه ی $[a,b]$ پیوسته و m مقدار مینیمم مطلق و M مقدار ماکزیمم مطلق تابع در این بازه باشند. آنگاه :

$$m\le\frac{۱}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le M$$

اثبات: چون m مقدار مینیمم مطلق و M مقدار ماکزیمم مطلق تابع f در بازه ی $[a,b]$ می باشند، پس به ازای هر x از این فاصله داریم:



$$m \le f(x) \le M$$
$$\rightarrow \int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx$$
$$\rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$
$$\rightarrow m \le \frac{۱}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

تمرین: ثابت کنید که: $۳/۵ \le \int_{\frac{۱}{۲}}^{۴}(x^۳ - ۶x^۲ + ۹x + ۱)dx \le ۱۷/۵$ (تخمین مقدار انتگرال معین)

حل: تابع $f(x) = x^۳ - ۶x^۲ + ۹x + ۱$ را تعریف می کنیم. این تابع در تمام نقاط پیوسته است و لذا در فاصله ی $[\frac{۱}{۲},۴]$ پیوسته و انتگرال پذیر است. حال داریم:

$$f(x) = x^۳ - ۶x^۲ + ۹x + ۱ \rightarrow f'(x) = ۳x^۲ - ۱۲x + ۹$$
$$\xrightarrow{f'(x)=۰} ۳x^۲ - ۱۲x + ۹ = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = ۳ \end{cases}$$

$$f(۱) = (۱)^۳ - ۶(۱)^۲ + ۹(۱) + ۱ = ۵ \rightarrow A\Big|_{۵}^{۱} Max \rightarrow M = ۵$$

$$f(۳) = (۳)^۳ - ۶(۳)^۲ + ۹(۳) + ۱ = ۱ \rightarrow B\Big|_{۱}^{۳} Min \rightarrow m = ۱$$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \rightarrow ۱(۴ - \frac{۱}{۲}) \le \int_{\frac{۱}{۲}}^{۴}(x^۳ - ۶x^۲ + ۹x + ۱)dx \le ۵(۴ - \frac{۱}{۲})$$

$$\rightarrow ۳/۵ \le \int_{\frac{۱}{۲}}^{۴}(x^۳ - ۶x^۲ + ۹x + ۱)dx \le ۱۷/۵$$

تمرین: ثابت کنید که: $\frac{۱}{۹} \le \int_{۲}^{۵}\frac{۱}{x^۲ + ۲}dx \le \frac{۱}{۲}$

حل: تابع $f(x)=\dfrac{۱}{x^۲+۲}$ را تعریف می کنیم. این تابع در تمام نقاط پیوسته است(مخرج ریشه ندارد.) و لـذا در فاصـله ی $[۲,۵]$ پیوسته و انتگرال پذیر است. از طرفی این تابع در فاصله ی $[۲,۵]$ همواره نزولی است. حال داریم:

$$f(۲)=\frac{۱}{(۲)^۲+۲}=\frac{۱}{۶}\rightarrow A\left|\begin{matrix}۲\\ \frac{۱}{۶}\end{matrix}\right. Max\rightarrow M=\frac{۱}{۶}$$

$$f(۵)=\frac{۱}{(۵)^۲+۲}=\frac{۱}{۲۷}\rightarrow B\left|\begin{matrix}۵\\ \frac{۱}{۲۷}\end{matrix}\right. Min\rightarrow m=\frac{۱}{۲۷}$$

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)\rightarrow\frac{۱}{۲۷}(۵-۲)\le\int_۲^۵\frac{۱}{x^۲+۲}dx\le\frac{۱}{۶}(۵-۲)$$

$$\rightarrow\frac{۱}{۹}\le\int_۲^۵\frac{۱}{x^۲+۲}dx\le\frac{۱}{۲}$$

تمرین: ثابت کنید که: $\cdot\le\int_\cdot^۲\sin(\frac{\pi}{۲}x)dx\le ۲$

حل: تابع $f(x)=\sin(\frac{\pi}{۲}x)$ را تعریف می کنیم. این تابع در تمام نقاط پیوسته است و لذا در فاصله ی $[\cdot,۲]$ پیوسـته و انتگرال پذیر است. حال داریم:

$$f(x)=\sin(\frac{\pi}{۲}x)\rightarrow f'(x)=\frac{\pi}{۲}\cos(\frac{\pi}{۲}x)$$

$$\xrightarrow{f'(x)=\cdot}\frac{\pi}{۲}\cos(\frac{\pi}{۲}x)=\cdot\rightarrow\cos(\frac{\pi}{۲}x)=\cdot\rightarrow\frac{\pi}{۲}x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$$

$$\rightarrow x=۲k+۱\rightarrow\begin{cases}k=\cdot\rightarrow x=۱\\ k=۱\rightarrow x=۳\end{cases}$$

مقدار $x=۳$ خارج از فاصله ی $[\cdot,۲]$ لذا غیر قابل قبول است.

$$f(۱)=\sin(\frac{\pi}{۲}\times۱)=۱\rightarrow A\left|\begin{matrix}۱\\ ۱\end{matrix}\right. Max\rightarrow M=۱ \quad و \quad f(\cdot)=f(۲)=\cdot\rightarrow B\left|\begin{matrix}\cdot\\ \cdot\end{matrix}\right., C\left|\begin{matrix}۲\\ \cdot\end{matrix}\right. Min\rightarrow m=\cdot$$

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)\rightarrow\cdot(۲-\cdot)\le\int_\cdot^۲\sin(\frac{\pi}{۲}x)dx\le۱(۲-\cdot)$$

$$\rightarrow\cdot\le\int_\cdot^۲\sin(\frac{\pi}{۲}x)dx\le۲$$

قضیه : (قضیه ی مقدار میانگین برای انتگرال معین) هرگاه تابع f بر بازه ی $[a,b]$ پیوسته باشد، عددی مانند x در بازه ی $[a,b]$ وجود دارد بطوری که

$$A.V=\frac{۱}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

مقدار حاصل از تساوی فوق را مقدار میانگین یا متوسط f بر بازه ی $[a,b]$ می نامند و آنرا با $A.V$ یا $\bar{f}$ نمایش می دهند.این مطلب را ثابت کنید.

اثبات : اگر تابع f در بازه ی $[a,b]$ پیوسته و m مقدار مینیمم مطلق و M مقدار ماکزیمم مطلق تابع در این بازه باشند در این صورت داشتیم $m\le\frac{۱}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le M$

لذا بنابر قضیه ی مقدار میانی، وجود دارد عدد c عضو فاصله ی $[a,b]$ بطوری که

$$f(c)=\frac{۱}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

البته ممکن است عدد c یکتا نباشد.

نتیجه : اگر تابع f در بازه ی $[a,b]$ پیوسته باشد. در این صورت نقطه ای مانند c از این بازه ($a\le c\le b$) وجود دارد ، به طوری که

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(c)$$

***

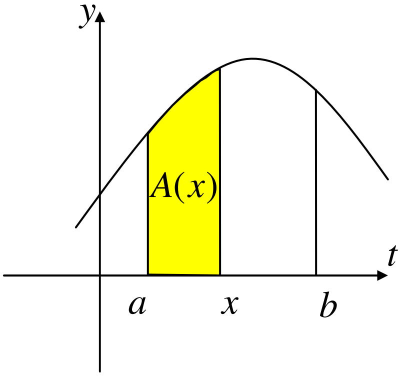
قضیه های اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

در ادامه دو قضیه ی مهم در مورد انتگرال را اشاره می کنیم. ، به کمک این دو قضیه ارتباط بین انتگرال معین و مفهوم پاد مشتق (تابع اولیه) قابل مشاهده است.

✓ قضیه ی اول اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

فرض کنید تابع f روی فاصله ی $[a,b]$ پیوسته و x عدد دلخواهی از فاصله ی $[a,b]$ باشد. اگر تابع $A(x)$ را به صورت زیر تعریف کنیم.

$$A(x)=\int_a^x f(t)dt$$



آنگاه داریم.

$$A'(x)=f(x)$$

که $A(x)$ را نیز **تابع مساحت** گویند.

اثبات : با استفاده از مفهوم مشتق داریم.

$$A'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{A(x+h)-A(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h}f(t)dt+\int_x^a f(t)dt}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h}f(t)dt}{h}\qquad (1)$$

مطابق قضیه ی مقدار میانگین در انتگرال برای وجود دارد $c\in(x,x+h)$، که :

$$\int_a^{x+h}f(t)dt=f(c)(x+h-x)=hf(c)$$

بنابراین با توجه به (۱) می توان نوشت :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h}f(t)dt}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{hf(c)}{h}=\lim_{h\to 0}f(c)\qquad (2)$$

با توجه به حدود $x<c<x+h$ و طبق قضیه ی فشردگی واضح است که :

$$\lim_{h\to 0}c=x$$

پس با توجه به (۲) می توان نوشت:

$$\lim_{h\to 0}f(c)=f(c)=f(x)$$

تمرین: اگر $f(t)=\frac{1}{1+t^2}$ تابع مساحت را در فاصله ی $1\le x\le 3$ تعریف کنید و سپس مشتق آن را بدست آورید.

حل:

$$A(x)=\int_a^x f(t)dt=\int_1^x\frac{1}{1+t^2}dt$$

$$A'(x)=f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

تمرین: فرض کنیم که $G(x)=\int_{۱}^{x}\frac{\sin ۲t}{۱+t^{۲}}dt$. در هر مورد مشتق تابع داده شده را پیدا کنید.

الف) $y=G(x)$

ب) $y=G'(x)$

ج) $y=x^{۲}G(x)$

د) $y=\frac{G(x)}{x^{۲}}$

هـ) $y=۳+\sqrt{G(x)}$

و) $y=G(x^{۳})$

ز) $y=G^{۴}(x)$

ح) $y=\sin G(x)$

تمرین: اگر $G(x)=\int_{۱}^{x}t^{۲}\sin ۲t dt$ باشد. $G''(\frac{\pi}{۴})$ را حساب کنید.

نکته ۱ : اگر $G(x)=\int_{a}^{u(x)}f(t)dt$ در این صورت $G'(x)=u'(x)\times f(u(x))$

تمرین: اگر $G(x)=\int_{۳}^{\sin x}t^{۲}dt$ مشتق تابع $G(x)$ را بدست آورید.

تمرین: اگر $G(x)=\int_{a}^{x^{۲}}\frac{۱}{t}dt$ مطلوبست محاسبه ی $G'(۲)$

تمرین : مشتق تابع روبرو را به دست آورید. $F(t)=\int_{\sqrt{t}}^{۱}\sqrt{۱+x^{۲}}dx$

نکته ۲ : اگر $G(x)=\int_{u(x)}^{v(x)}f(t)dt$ در این صورت می توان نوشت:

$$G(x)=\int_{u(x)}^{v(x)}f(t)dt\xrightarrow{u(x)\le a\le v(x)}G(x)=\int_{u(x)}^{a}f(t)dt+\int_{a}^{v(x)}f(t)dt$$

$$G(x)=-\int_{a}^{u(x)}f(t)dt+\int_{a}^{v(x)}f(t)dt=\int_{a}^{v(x)}f(t)dt-\int_{a}^{u(x)}f(t)dt$$

$$\Rightarrow G'(x)=v'(x)\times f(v(x))-u'(x)\times f(u(x))$$

تمرین: اگر $G(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\frac{۱}{۴-t^{۲}}dt$ مشتق تابع $G(x)$ را بدست آورید.

حل :

$$G'(x)=(-\sin x)\frac{۱}{۴-(\cos x)^{۲}}-(\cos x)\frac{۱}{۴-(\sin x)^{۲}}=\frac{-\sin x}{۴-\cos^{۲}x}-\frac{\cos x}{۴-\sin^{۲}x}$$

✓ قضیه ی دوم اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

فرض کنید تابع f روی فاصله ی $[a,b]$ پیوسته و $F(x)$ یک تابع اولیه برای آن باشد. یعنی:

$$F'(x)=f(x)$$

در این صورت :

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\big|_a^b=F(b)-F(a)$$

اثبات : چون $F'(x)=f(x)+c$ و لذا برای هر $x\in[a,b]$ داریم:

$$\int_a^x f(t)dt=F(x)+c$$

اگر $x=a$ پس $\int_a^a f(t)dt=F(a)+c$ یعنی $\cdot=F(a)-c$ در نتیجه $F(a)=c$

همچنین با فرض $x=b$ داریم:

$$\int_a^b f(t)dt=F(b)+c\xrightarrow{F(a)=c}\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$$

تمرین: ویژگی های زیر را به کمک قضیه ی دوم اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال ثابت کنید.

الف) $\int_a^b dx=b-a$ ب) $\int_a^b kdx=k(b-a)$ ج) $\int_a^a dx=\cdot$

حل:

الف) $\int_a^b dx=x\big|_a^b=b-a$

ب) $\int_a^b kdx=kx\big|_a^b=k(b-a)$

ج) $\int_a^a dx=x\big|_a^a=a\text{-}a=\cdot$

تمرین: حاصل انتگرال های زیر را حساب کنید.

۱) $\int_۱^۲(x^۲+۲x+۱)dx=$

۲) $\int_۱^۳(\frac{x+۱}{x})dx=$

۳) $\int_۰^۱\frac{۱}{۱+x^۲}dx=$

تمرین: مقدار انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx =$

۲) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx =$

۳) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{0} (\sin x + 2\cos x) dx =$

۴) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx =$

۵) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x.\cos x dx =$

تمرین: مقدار انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int_{-3}^{3} ([x]+2) dx =$

۲) $\int_{-2}^{2} |x| dx =$

۳) $\int_{-3}^{3} |x-2| dx =$

۴) $\int_{-1}^{2} (x+|x|)[x] dx =$

۵) $\int_{-3}^{2} |[x]| dx =$

۶) $\int_{3}^{5} x[x] dx =$

۷) $\int_{0}^{2} x^2 [x] dx =$

۸) $\int_{-1}^{2} [x]|x-1| dx =$

تمرین: اگر $f(x) = x^2$ باشد، مقدار متوسط f بر بازه ی $[1,3]$ را بیابید.

حل:

$$\int_{1}^{3} x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 |_1^3 = \frac{1}{3}(3)^3 - \frac{1}{3}(1)^3 = \frac{26}{3}$$

$$A.V = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{3-1}\int_1^3 x^2 dx = \frac{1}{2}\times\frac{26}{3} = \frac{13}{3}$$

تمرین: مقدار متوسط تابع $f(x) = \frac{6}{x^2}$ در بازه ی $[1,c]$ برابر یک است. مقدار c را پیدا کنید.

حل:

$$A.V = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{c-1}\int_1^c \frac{6}{x^2}dx = \frac{6}{c-1}\int_1^c x^{-2}dx = \frac{6}{c-1}(\frac{1}{-1}x^{-1})|_1^c$$

$$= -\frac{6}{c-1}\times\frac{1}{x}|_1^c = -\frac{6}{c-1}\times\frac{1}{c} + \frac{6}{c-1}\times\frac{1}{1} = \frac{6}{c-1}(-\frac{1}{c}+1) = \frac{6}{c-1}\times\frac{c-1}{c} = \frac{6}{c}$$

$$\begin{cases} A.V=\frac{۶}{c} \\ A.V=۱ \end{cases} \to \frac{۶}{c}=۱ \to c=۶$$

تمرین : اگر مقدار متوسط تابع $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x}}$ در بازه ی $[۱,a]$ برابر $\frac{۲}{a-۱}$ باشد. مقدار a را حساب کنید.

تمرین: ثابت کنید که برای هر a و b

$$\int_a^b x^۳ dx=\frac{b^۴-a^۴}{۴}$$

حل:

$$\int_a^b x^۳ dx=\frac{۱}{۴}x^۴ |_a^b=\frac{۱}{۴}b^۴-\frac{۱}{۴}a^۴=\frac{b^۴-a^۴}{۴}$$

تمرین: مقدار انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_۱^۴ x^۳[x]dx$$

حل:

$$\int_۱^۴ x^۳[x]dx=\int_۱^۲ x^۳[x]dx+\int_۲^۳ x^۳[x]dx+\int_۳^۴ x^۳[x]dx$$

$$=\int_۱^۲ x^۳\times ۱dx+\int_۲^۳ x^۳\times ۲dx+\int_۳^۴ x^۳\times ۳dx$$

$$=\frac{۱}{۴}x^۴ |_۱^۲+\frac{۲}{۴}x^۴ |_۲^۳+\frac{۳}{۴}x^۴ |_۳^۴=\frac{۱}{۴}(۱۶-۱)+\frac{۱}{۲}(۸۱-۱۶)+\frac{۳}{۴}(۶۴-۸۱)=\frac{۱۵}{۴}+\frac{۶۵}{۲}+\frac{۵۲۵}{۲}=\frac{۳۳۵}{۲}$$

تمرین: مساحت زیر خط $y=mx$ را در فاصله ی $[a,b]$ برای $m>۰$ را تعیین کنید.

حل:

$$\int_a^b mxdx=\frac{m}{۲}x^۲ |_a^b=\frac{m}{۲}(b^۲-a^۲)$$

تمرین: مقدار $\lim_{x\to ۰}\frac{\int_۰^x \tan ۲t dt}{x.\sin x}$ را تعیین کنید.

حل:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\int_۰^x \tan ۲t dt}{x.\sin x}=\frac{\int_۰^۰ \tan ۲t dt}{۰\times\sin ۰}\overset{\frac{۰}{۰}}{\underset{Hop}{=}}\lim_{x\to ۰}\frac{\tan ۲x}{\sin x + x.\cos x}=\frac{\tan ۲(۰)}{\sin ۰+۰\times\cos ۰}$$

$$\overset{\frac{۰}{۰}}{\underset{Hop}{=}}\lim_{x\to ۰}\frac{۲(۱+\tan^۲ ۲x)}{\cos x+\cos x - x.\sin x}=\frac{۲[۱+\tan^۲ ۲(۰)]}{\cos ۰+\cos ۰-۰\times\sin ۰}=\frac{۲(۱+۰)}{۱+۱-۰}=\frac{۲}{۲}=۱$$

تمرین: مقدار $\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\int_{\sin x}^{\cos x}\frac{dt}{۱-t^۲}}{x-\frac{\pi}{۴}}$ را تعیین کنید.

تمرین: با استفاده از خواص توابع زوج و فرد انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_{-۲}^{۲}(۳|x|+۱)dx$

ب) $\int_{-۳}^{۳}(x+\sin x)dx$

ج) $\int_{-۱}^{۱}(۵x^۳-|x|-۳\sin^۵ x)dx$

تمرین : انتگرال $\int_{-\frac{\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۳}}\frac{۱+\sin x}{\cos^۲ x}dx$ را محاسبه کنید.

حل :

$$\int_{-\frac{\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۳}}\frac{۱+\sin x}{\cos^۲ x}dx=\int_{-\frac{\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۳}}\underbrace{\frac{۱}{\cos^۲ x}}_{\text{زوج}}dx+\int_{-\frac{\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۳}}\underbrace{\frac{\sin x}{\cos^۲ x}}_{\text{فرد}}dx=۲\int_۰^{\frac{\pi}{۳}}(۱+\tan^۲ x)dx+۰$$

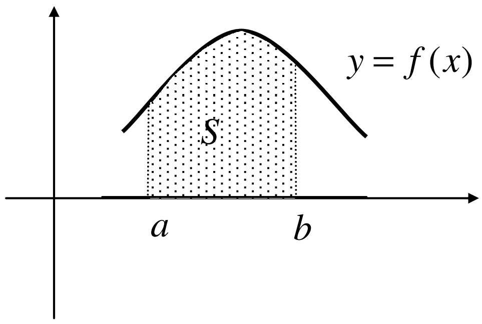
$$=۲\tan x\Big|_۰^{\frac{\pi}{۳}}=۲\tan(\frac{\pi}{۳})-۲\tan(۰)=۲\sqrt{۳}-۰=۲\sqrt{۳}$$

***

کاربرد هایی برای انتگرال

در اینجا در پی آن هستیم که بطور خیلی مختصر دو کاربرد انتگرال در محاسبه ی مساحت زیر منحنـی و همچنـین حجـم جسم دوار را توضیح دهیم.

محاسبه ی مساحت زیر منحنی



فرض کنید که تابع f در بـازه ی $[a,b]$ تعریـف شـده و پیوسـته باشد. مساحت محدود به منحنـی $y=f(x)$ و محـور x هـا و خطوط $x=a$ و $x=b$ طبق تعریف انتگرال معین را می توان به صورت زیر تعیین کرد.

$$S=\left|\int_a^b f(x)dx\right|=\left|F(x)\Big|_a^b\right|=|F(b)-F(a)|$$

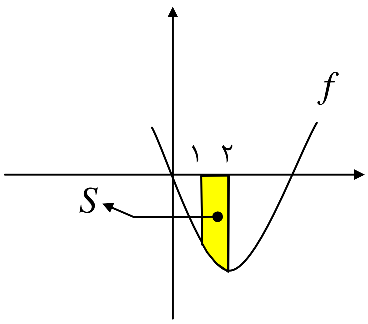
تذکر: علامت قدر مطلق به این دلیل گنجانده شده است که مساحت همواره یک عدد حقیقی غیر منفی است.

تمرین: نمودار تابع $y=x^۲-۴x$ را رسم کنید و پس سطح محصور بین این تـابع و محـور طولهـا و دو خـط $x=۱$ و $x=۲$ را محاسبه کنید.

حل:

$$x=\frac{-b}{۲a}=-\frac{-۴}{۲(۱)}=۲$$

x	۰	۲	۴
y	۰	-۴	۰



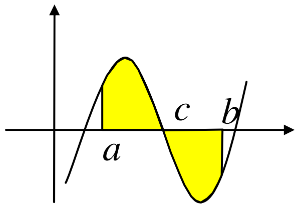
$$\int_۱^۲(x^۲-۴x)dx=(\frac{۱}{۳}x^۳-\frac{۴}{۲}x^۲)\Big|_۱^۲=[\frac{۱}{۳}(۸)-\frac{۴}{۲}(۴)]-[\frac{۱}{۳}(۱)-\frac{۴}{۲}(۱)]$$
$$=\frac{۸}{۳}-۸-\frac{۱}{۳}+۲=-\frac{۱۱}{۳}$$

$\therefore S = \left|\int_1^2 (x^2 - 4x)dx\right| = \left|-\frac{11}{3}\right| = \frac{11}{3}$ واحد سطح

تمرین: مساحت ناحیه ی محصور بین نمودار تابع $y = -x^2 + 4x + 1$ و محور های مختصات و خط $x = 3$ را بیابید.

یادآوری: برای تعیین محل تلاقی تابع با محور طولها کافی است ریشه های معادله ی $f(x) = 0$ را بیابید.

تذکر: اگر نمودار تابع f محور طولها رادر یک نقطه از فاصلـه ی $[a,b]$ قطـع کنـد.



برای محاسبه ی سطح زیر منحنی به ترتیب زیر عمل می کنیم.

$$S = S_1 + S_2 = \left|\int_a^c f(x)dx\right| + \left|\int_c^b f(x)dx\right|$$

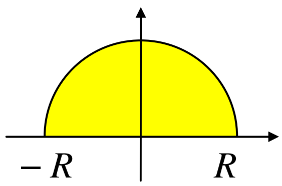
تمرین: مساحت محصور بین نمودار تابع $y = x^3 - x$ و محل طولها و محل برخـورد نمـودار تـابع بـا محـور طولهـا را بیابید.

تمرین: مساحت ناحیه ی محصور بین تابع $y = \sin x$ و محور طولها را در فاصله ی $[0, \frac{3\pi}{2}]$ بیابید.

تمرین: محاسبه ی مساحت دایره را به کمک انتگرال معین ثابت کنید.

حل: گیریم که دایره به شعاع R و به مرکز مبدأ مختصات باشد. پس معادله ی آن می شود:

$$x^2 + y^2 = R^2$$



واضـح اسـت کـه مـساحت ایـن دایـره دو برابـر سـطح محـصور بـین تـابع $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ و محور طولها بدست می آید.

$$S = 2\int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{R^2 - R^2\sin^2\theta}.R\cos\theta.d\theta$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{R^2(1-\sin^2\theta)}.R\cos\theta.d\theta = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{R^2\cos^2\theta}.R\cos\theta.d\theta$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2\cos^2\theta.d\theta = 2R^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta.d\theta = 2R^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)d\theta$$

$$=2R^2(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2R^2[\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin 2(\frac{\pi}{2})]-2R^2[-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin 2(-\frac{\pi}{2})]$$

$$=2R^2\frac{\pi}{2}+0+2R^2\frac{\pi}{2}-0=2R^2\frac{\pi}{2}=\pi R^2$$

توجه:

$$x=R\sin\theta\rightarrow dx=R\cos\theta.d\theta$$

$$\begin{cases} x=R\rightarrow\sin\theta=1\rightarrow\theta=\frac{\pi}{2} \\ x=-R\rightarrow\sin\theta=-1\rightarrow\theta=-\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

تمرین: مساحت دایره به معادله ی $x^2+y^2=9$ را به کمک انتگرال معین تعیین کنید.

تمرین: محاسبه ی مساحت بیضی را به کمک انتگرال معین ثابت کنید.

حل: گیریم که بیضی از نوع افقی و به مرکز مبدأ مختصات . پس معادله ی آن می شود:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

واضح است که مساحت این بیضی دو برابر سطح محصور بین تابع $f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ و محور طولها بدست می آید.

$$S=2\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{-a}^{a}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}dx=2\times\frac{b}{a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}.a\cos\theta.d\theta$$

$$=2\times\frac{b}{a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}.a\cos\theta.d\theta=2\times\frac{b}{a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos^2\theta}.a\cos\theta.d\theta$$

$$=2\frac{b}{a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a^2\cos^2\theta.d\theta=2\times\frac{b}{a}\times a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta.d\theta=2ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)d\theta$$

$$= 2ab(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2ab[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin 2(\frac{\pi}{2})] - 2ab[-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin 2(-\frac{\pi}{2})]$$

$$= 2ab\frac{\pi}{2} + 0 + 2ab\frac{\pi}{2} - 0 = 2ba\frac{\pi}{2} = \pi ab$$

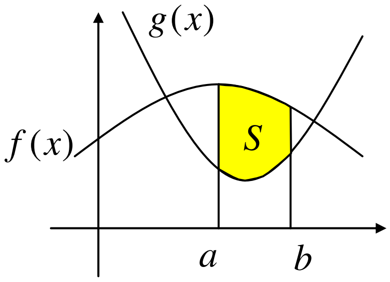
توجه:

$$x = a\sin\theta \rightarrow dx = a\cos\theta.d\theta$$

$$\begin{cases} x = a \rightarrow \sin\theta = 1 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \\ x = -a \rightarrow \sin\theta = -1 \rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

تمرین: مساحت دایره به معادله ی $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ را به کمک انتگرال معین تعیین کنید.

تذکر: اگر برای دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در فاصله ی $[a,b]$ داشته باشیم $f(x) \geq g(x)$. برای محاسبه ی سطح محصور بین دو منحنی $f(x)$ و $g(x)$ و خطوط $x = a$ و $x = b$ می توان رابطه ی زیر را بکار برد.

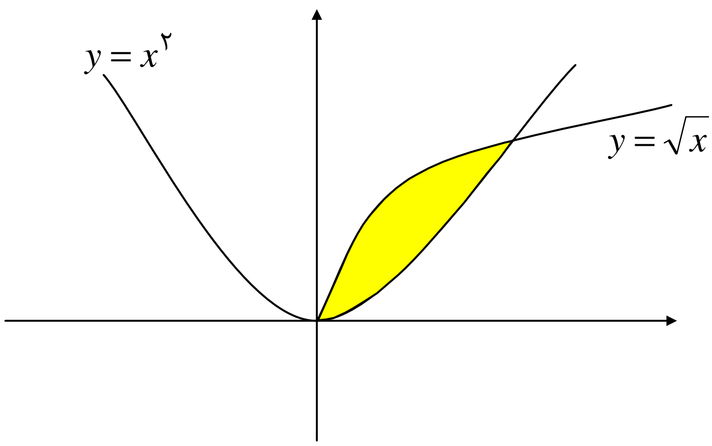


$$\boxed{S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx}$$

تمرین: مساحت ناحیه ی محصور بین منحنی های زیر را محاسبه کنید.

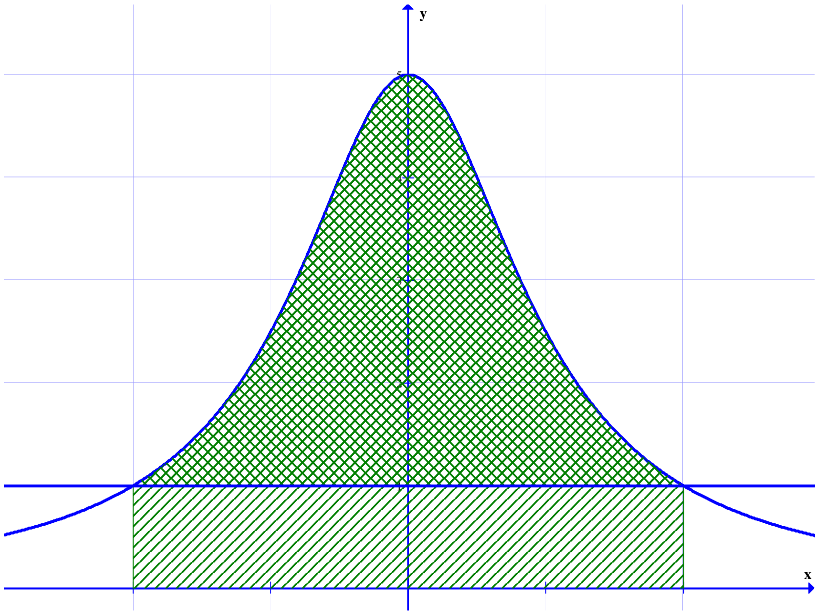
$$y = x^2 - 4x + 3 \quad و \quad y = -x^2 + 2x + 3$$

تمرین: با توجه به نمودار زیر مساحت ناحیه ی هاشور خورده را بیابید.



تمرین : مساحت ناحیه‌ی بالای خط $y=۱$ و تحت نمودار تابع $y=\frac{۲}{x^{۲}+۱}$ را بدست آورید.

حل :



$$y=\frac{۲}{x^{۲}+۱}\xrightarrow{y=۱}\frac{۲}{x^{۲}+۱}=۱\rightarrow x^{۲}+۱=۲\rightarrow x=\pm ۱$$

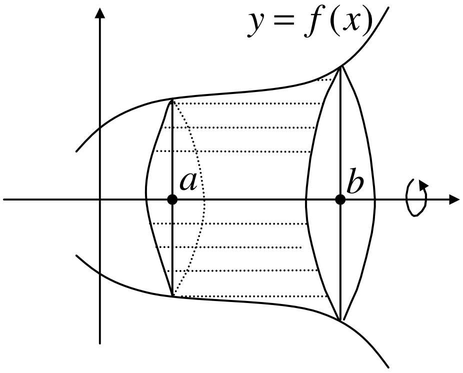
مساحت مورد نظر را در فاصله ی $[-۱,۱]$ محاسبه می کنیم. برای این کار ابتدا مساحت زیر منحنی تابع $y=\frac{۱}{x^{۲}+۱}$ در فاصله ی $[-۱,۱]$ را تعیین و سپس مساحت زیر خط $y=۱$ در همین فاصله را از آن کم می کنیم.

$$A=\int_{-۱}^{۱}\frac{۲}{x^{۲}+۱}dx-\int_{-۱}^{۱}۱dx=۲\tan^{-۱}x\Big|_{-۱}^{۱}-x\Big|_{-۱}^{۱}=۲(\tan^{-۱}۱-\tan^{-۱}(-۱))-(۱-(-۱))$$

$$=۲\tan^{-۱}۱+۲\tan^{-۱}۱-۲=۴\tan^{-۱}۱-۲=۴(\frac{\pi}{۴})-۲=\pi-۲$$

***

محاسبه ی حجم جسم دوار



فرض کنیم که تابع $y=f(x)$ تابعی پیوسته در بازه ی $[a,b]$ باشد. اگر سطح محصور بین منحنی $y=f(x)$ و خطوط $x=a$ و $x=b$ را حول محور طولها دوران دهیم، یک جسم دوار حاصل می شود.

حجم جسم دوار در فاصله ی $[a,b]$ به صورت زیر محاسبه می شود.

$$V=\pi\int_a^b f^{۲}(x)dx$$

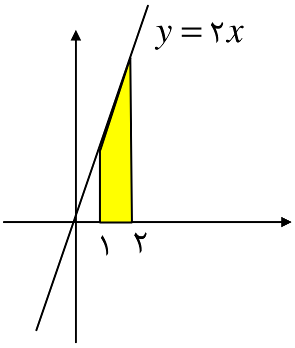
تمرین:

اولاً: نمودار تابع $y=۲x$ را رسم کنید.

ثانیاً:حجم جسم حادث از دوران سطح محصور بین این تابع و محور طولها و دو خط $x=۱$ و $x=۲$ را محاسبه کنید.

حل:

x	۰	۲
y	۰	۴



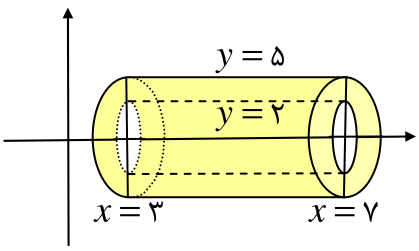
$$V=\pi\int_a^b f^{۲}(x)dx=\pi\int_۱^۲ ۴x^۲dx=\pi\times\frac{۴}{۳}x^۳\Big|_۱^۲=\frac{۴}{۳}\pi(۴-۱)^۳=۳۶\pi$$

واحد حجم

تمرین: سطح محصور بین منحنی نمایش تابع $y=\sqrt{x-۲}$ محور طولها و دو خط $x=۲$ و $x=۴$ را دوران می دهیم. حجم جسم حادث از دوران نمودار تابع فوق حول محور طولها را محاسبه کنید.

تمرین:حجم جسم حادث از دوران خط $y=۴$ حول محور طولها و محصور بین دو خط $x=۲$ و $x=۵$ را بدست آورید.

تمرین: با توجه به شکل مقابل حجم ناحیه ی محصور بین دو استوانه را محاسبه کنید.



تمرین: حجم استوانه را به کمک انتگرال معین ثابت کنید.

حل: کافی است حجم جسم حادث از دوران خط $y = k$ حول محور طولها از $x = a$ تا $x = b$ را تعیین کنیم.

واضح است که شعاع قاعده ی استوانه برابر k و ارتفاع آن برابر $b - a$ است.

$$f(x) = k$$
$$R = k$$
$$h = b - a$$

$$V = \pi\int_a^b f^۲(x)dx = \pi\int_۱^۲ k^۲ dx = \pi \times k^۲ x |_a^b = \pi \times k^۲(b-a) = \pi R^۲ h$$

تمرین: حجم منشور را به کمک انتگرال معین ثابت کنید.

حل:کافی است حجم جسم حادث از دوران خط $y = kx$ حول محور طولها از $x = ۰$ تا $x = a$ را تعیین کنیم.

واضح است که شعاع قاعده ی استوانه برابر ka و ارتفاع آن برابر $a - ۰ = a$ است.

$$f(x) = kx$$
$$R = ka$$
$$h = a$$

$$V = \pi\int_a^b f^۲(x)dx = \pi\int_۰^a k^۲x^۲dx = \frac{۱}{۳}\pi \times k^۲x^۳ |_۰^a = \frac{۱}{۳}\pi \times k^۲(a-۰)^۳$$
$$= \frac{۱}{۳}\pi \times k^۲ a \times a^۲ = \frac{۱}{۳}\pi \times (k^۲ \times a^۲) \times a = \frac{۱}{۳}\pi R^۲ h$$

تمرین: حجم حادث از دوران دایره ای به معادله ی $x^۲ + y^۲ = ۹$ به دور محور طولها را بدست آورید.

تمرین: حجم کره را به کمک انتگرال معین ثابت کنید.

حل:کافی است حجم جسم حادث از دوران دایره ی $x^۲ + y^۲ = R^۲$ حول محور طولها از $x = -R$ تا $x = R$ را تعیین کنیم.

$$x^۲ + y^۲ = R^۲ \to f^۲(x) = R^۲ - x^۲$$

$$V = \pi\int_a^b f^۲(x)dx = \pi\int_{-R}^R (R^۲ - x^۲)dx = \pi \times (R^۲x - \frac{۱}{۳}x^۳) |_{-R}^R$$

$$= \pi \times [R^۲ \times R - \frac{۱}{۳}R^۳] - \pi \times [R^۲ \times (-R) - \frac{۱}{۳}(-R)^۳]$$

$$=\pi R^{3}-\frac{1}{3}\pi R^{3}+\pi R^{3}-\frac{1}{3}\pi R^{3}=\pi R^{3}-\frac{1}{3}\pi R^{3}+\pi R^{3}-\frac{1}{3}\pi R^{3}=\frac{4}{3}\pi R^{3}$$

تمرین: حجم حادث از دوران بیضی به معادله ی $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ به دور محور طولها را بدست آورید.

تمرین: حجم بیضی گون را به کمک انتگرال معین ثابت کنید.

حل:کافی است حجم جسم حادث از دوران بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ حول محور طولهـا از $x=-a$ تـا $x=a$ را تعیـین کنیم.

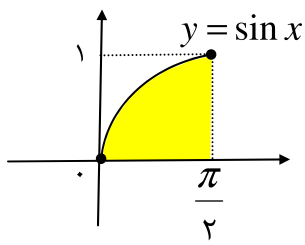
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\rightarrow f^{2}(x)=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2$$

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx=\pi\int_{-a}^{a}(b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2)dx=$$

$$=\pi\times(b^2x-\frac{1}{3}\times\frac{b^2}{a^2}x^3)\Big|_{-a}^{a}=\pi\times(b^2a-\frac{1}{3}\times\frac{b^2}{a^2}a^3)-\pi\times(-b^2a+\frac{1}{3}\times\frac{b^2}{a^2}a^3)$$

$$=\pi b^2a-\frac{1}{3}\times\pi b^2a+\pi b^2a-\frac{1}{3}\pi b^2a=\frac{4}{3}\pi b^2a$$

تمرین: حجم حادث از دوران سطح هاشور خورده در شکل مقابل حول محور x ها را بدست آورید.



***

موفق باشید.

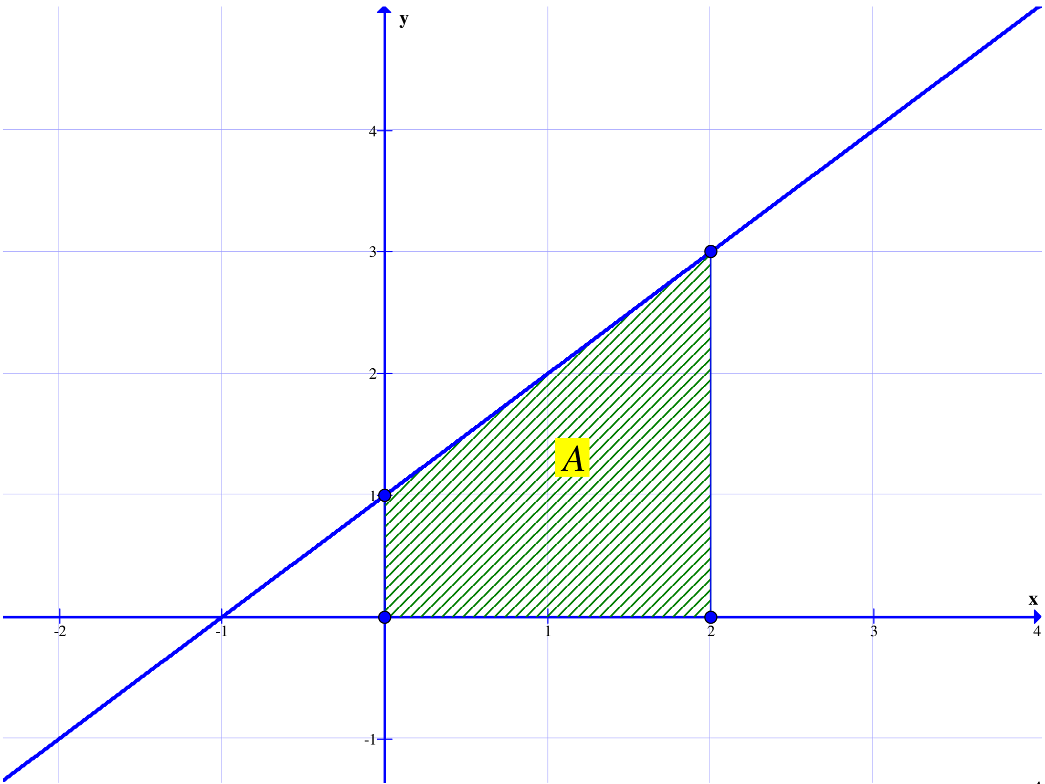
حل تمرین های مهم

۱ : (مثال ص ۲۲۵) مساحت ناحیه ای را بیابید که تحت خط مستقیم به معادله ی $y = x + ۱$ بوده و محدود به محور طولها و خطوط $x = ۰$ و $x = ۲$ می باشد.

✓ حل به روش محاسبه ی سطح

$f(x) = x + ۱$

x	۰	۲
y	۱	۳



ناحیه A ذوزنقه است. و بالای محور طول ها است.

مساحت ذوزنقه $A = \frac{۱}{۲}(۱ + ۳)(۲) = ۴$

$S = \int_{۰}^{۲} f(x)dx = A = ۴$

✓ حل به روش ریمانی

$f(x) = x + ۱$

$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{۲ - ۰}{n} = \frac{۲}{n}$

$$x_0=0, x_1=\Delta x, x_2=2\Delta x, x_3=3\Delta x,\dots, x_i=i\Delta x,\dots, x_n=n\Delta x=n\times\frac{2}{n}=2$$

با توجه به نمودار تابع واضح است که ماکزیمم مطلق f بر زیر بازه ی $[x_{i-1},x_i]$ مساوی $f(x_i)$ است، بنابراین:

$$A=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x$$

و چون $x_i=i\Delta x$ و $f(x)=x+1$ پس $f(x_i)=i\Delta x+1$ حال مراحل زیر را برای محاسبه ی حد مجموع ریمان را انجام می دهیم.

مرحله ی اول: محاسبه ی مجموع ریمان

$$\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{n}(i\Delta x+1)\Delta x=\sum_{i=1}^{n}(\frac{2i}{n}+1)\frac{2}{n}=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{2i}{n}+1)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{2i}{n}+\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}1$$

$$=\frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}1=\frac{4}{n^2}(\frac{n(n+1)}{2})+\frac{2}{n}(n)=\frac{4n^2+4n}{2n^2}+2=\frac{8n^2+4n}{2n^2}$$

مرحله ی دوم: محاسبه ی حد مجموع

$$A=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x=\lim_{n\to+\infty}\frac{8n^2+4n}{2n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{8n^2}{2n^2}=4$$

بنابراین مساحت ناحیه ی مساوی ۴ واحد مربع است.

✓ حل به روش انتگرال

$$A=\int_0^2(x+1)dx=(\frac{1}{2}x^2+x)\Big|_0^2=(\frac{1}{2}(2)^2+2)-(\frac{1}{2}(0)^2+2)=2+2=4$$

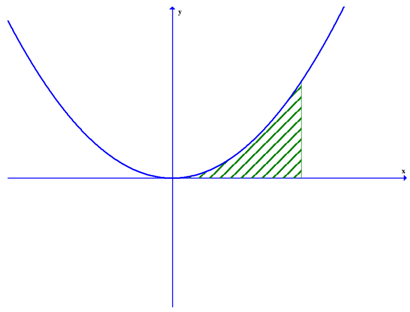
***

۲ : (مثال ص ۲۲۶) مساحت ناحیه ای را که محدود به سهمی $y=x^2$ و خطوط $y=0$ و $x=0$ و $x=b>0$ می باشد، را به دست آورید.

حل :

$$f(x)=x^2 \quad و \quad \Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{b-0}{n}=\frac{b}{n}$$

$$x_0=0, x_1=\Delta x, x_2=2\Delta x, x_3=3\Delta x,\dots, x_i=i\Delta x,\dots, x_n=n\Delta x=n\times\frac{b}{n}=b$$



با توجه به نمودار تابع واضح است که ماکزیمم مطلق f بر زیر بازه ی $[x_{i-1},x_i]$ مساوی $f(x_i)$ است، بنابراین:

$$A=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

و چون $x_i=i\Delta x$ و $f(x)=x^2$ پس $f(x_i)=(i\Delta x)^2$ حال مراحل زیر را برای محاسبه ی حد مجموع ریمان را انجام می دهیم.

مرحله ی اول: محاسبه ی مجموع ریمان

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{n}(i\Delta x)^2\Delta x=\sum_{i=1}^{n}(\frac{bi}{n})^2\frac{b}{n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{b^3i^2}{n^3}=\frac{b^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{b^3}{n^3}(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6})$$
$$=\frac{b^3}{n^3}(\frac{2n^3+3n^2+n}{6})=\frac{b^3}{6}(\frac{2n^3+3n^2+n}{n^3})$$

مرحله ی دوم: محاسبه ی حد مجموع

$$A=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\lim_{n\to+\infty}\frac{b^3}{6}(\frac{2n^3+3n^2+n}{n^3})=\lim_{n\to+\infty}\frac{b^3}{6}(\frac{2n^3}{n^3})=\frac{b^3}{3}$$

بنابراین مساحت ناحیه ی مساوی $\frac{b^3}{3}$ واحد مربع است.

نکته ی مهم : واضح است که مساحت بدست آمده به مقدار b بستگی دارد.(تابعی از b است.) با مشتق گیری از این تابع نسبت به b می توان نوشت:

$$A(b)=\frac{b^3}{3}\to A'(b)=b^2$$

یعنی مقدار b در تابع اصلی ($y=x^{۲}$) جایگزین شده است. این نتیجه را قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال مـی نامند.

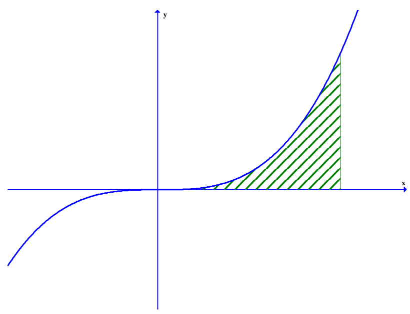
***

۳ : (تمـرین در کـلاس ص ۲۲۷) مـساحت ناحیـه ای را کـه محـدود بـه سـهمی $y=x^{۳}$ و خطـوط $y=۰$ و $x=۰$ و $x=b>۰$ می باشد. را به دست آورید.

حل :

$$f(x)=x^{۳} \quad \text{و} \quad \Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{b-۰}{n}=\frac{b}{n}$$

$$x_{۰}=۰, x_{۱}=\Delta x, x_{۲}=۲\Delta x, x_{۳}=۳\Delta x,\ldots, x_i=i\Delta x,\ldots, x_n=n\Delta x=n\times\frac{b}{n}=b$$



با توجه به صعودی بودن تابع، واضح است که ماکزیمم مطلق f بر زیر بازه ی $[x_{i-۱},x_i]$ مساوی $f(x_i)$ است، بنابراین:

$$A=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n}f(x_i)\Delta x$$

و چون $x_i=i\Delta x$ و $f(x)=x^{۳}$ پس $f(x_i)=(i\Delta x)^{۲}$ حال مراحل زیر را برای محاسـبه ی حـد مجمـوع ریمـان را انجام می دهیم.

مرحله ی اول: محاسبه ی مجموع ریمان

$$\sum_{i=۱}^{n}f(x_i)\Delta x=\sum_{i=۱}^{n}(i\Delta x)^{۳}\Delta x=\sum_{i=۱}^{n}(\frac{bi}{n})^{۳}\frac{b}{n}=\sum_{i=۱}^{n}\frac{b^{۴}i^{۳}}{n^{۴}}=\frac{b^{۴}}{n^{۴}}\sum_{i=۱}^{n}i^{۳}=\frac{b^{۴}}{n^{۴}}(\frac{n^{۲}(n+۱)^{۲}}{۴})$$
$$=\frac{b^{۴}}{۴}(\frac{n^{۴}+۲n^{۳}+n^{۲}}{n^{۴}})$$

مرحله ی دوم: محاسبه ی حد مجموع

$$A=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n}f(x_i)\Delta x=\lim_{n\to+\infty}\frac{b^۴}{۴}(\frac{n^۴+۲n^۳+n^۲}{n^۴})=\lim_{n\to+\infty}\frac{b^۴}{۴}(\frac{n^۴}{n^۴})=\frac{b^۴}{۴}$$

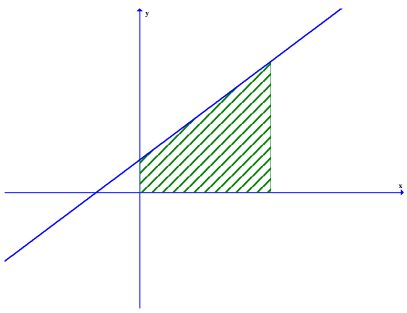
بنابراین مساحت ناحیه ی مساوی $\frac{b^۴}{۴}$ واحد مربع است.

۴ : (مثال ص ۲۲۸) مساحت ناحیه ای را بیابید که تحت خط مستقیم به معادله ی $y=x+۱$ بوده و محدود بـه محـور طولها و خطوط $x=۰$ و $x=b>۰$ می باشد.

حل :

$$f(x)=x+۱ \quad \text{و} \quad \Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{b-۰}{n}=\frac{b}{n}$$

$$x_۰=۰,x_۱=\Delta x,x_۲=۲\Delta x,x_۳=۳\Delta x,...,x_i=i\Delta x,...,x_n=n\Delta x=n\times\frac{b}{n}=b$$



با توجه به صعودی بودن تابع، واضح است که ماکزیمم مطلق f بر زیر بازه ی $[x_{i-۱},x_i]$ مساوی $f(x_i)$ است، بنابراین:

$$A=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n}f(x_i)\Delta x$$

و چون $x_i=i\Delta x$ و $f(x)=x+۱$ پس $f(x_i)=i\Delta x+۱$ حال مراحل زیر را برای محاسبه ی حد مجمـوع ریمـان را انجام می دهیم.

مرحله ی اول: محاسبه ی مجموع ریمان

$$\sum_{i=۱}^{n}f(x_i)\Delta x=\sum_{i=۱}^{n}(i\Delta x+۱)\Delta x=\sum_{i=۱}^{n}(\frac{bi}{n}+۱)\frac{b}{n}=\frac{b}{n}\sum_{i=۱}^{n}(\frac{bi}{n}+۱)=\frac{b}{n}\sum_{i=۱}^{n}\frac{bi}{n}+\frac{b}{n}\sum_{i=۱}^{n}۱$$

$$=\frac{b^۲}{n^۲}\sum_{i=۱}^{n}i+\frac{b}{n}\sum_{i=۱}^{n}۱=\frac{b^۲}{n^۲}(\frac{n(n+۱)}{۲})+\frac{b}{n}(n)=\frac{b^۲}{۲}(\frac{n^۲+n}{n^۲})+b$$

مرحله ی دوم: محاسبه ی حد مجموع

$$A=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x=\lim_{n\to+\infty}\frac{b^2}{2}\left(\frac{n^2+n}{n^2}\right)+b=\lim_{n\to+\infty}\frac{b^2}{2}\left(\frac{n^2}{n^2}\right)+b=\frac{b^2}{2}+b$$

بنابراین مساحت ناحیه ی مساوی $\frac{b^2}{2}+b$ واحد مربع است.

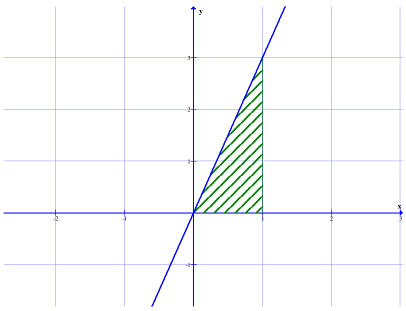
***

۴ : (مسئله ی ۱ ص ۲۲۹) مساحت ناحیه ای را بیابید که تحت نمودار خط به معادله ی $y=3x$ بوده و محدود به محور طولها و خطوط $x=0$ و $x=1$ می باشد.

حل :

$$f(x)=3x \quad \text{و} \quad \Delta x=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}$$

$$x_0=0, x_1=\Delta x, x_2=2\Delta x, x_3=3\Delta x,\ldots,x_i=i\Delta x,\ldots,x_n=n\Delta x=n\times\frac{1}{n}=1$$



با توجه به صعودی بودن تابع، واضح است که ماکزیمم مطلق f بر زیر بازه ی $[x_{i-1},x_i]$ مساوی $f(x_i)$ است، بنابراین:

$$A=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x$$

و چون $x_i=i\Delta x$ و $f(x)=3x$ پس $f(x_i)=3i\Delta x$ حال مراحل زیر را برای محاسبه ی حد مجموع ریمان را انجام می دهیم.

مرحله ی اول: محاسبه ی مجموع ریمان

$$\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{n}3(i\Delta x)\Delta x=\sum_{i=1}^{n}3\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}=\frac{3}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i)=\frac{3}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{n^2+n}{n^2}\right)$$

مرحله ی دوم: محاسبه ی حد مجموع

$$A=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{2}\left(\frac{n^2+n}{n^2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{2}\left(\frac{n^2}{n^2}\right)=\frac{3}{2}$$

بنابراین مساحت ناحیه ی مساوی $\frac{3}{2}$ واحد مربع است.

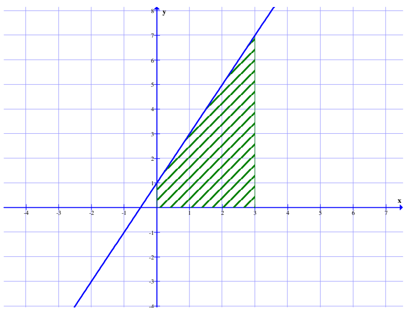
***

۴ : (مسئله ی ۲ ص ۲۲۹) مساحت ناحیه ای را بیابید که تحت نمودار خط به معادله ی $y=2x+1$ بوده و محدود به محور طولها و خطوط $x=0$ و $x=3$ می باشد.

حل :

$$f(x)=2x+1 \quad \text{و} \quad \Delta x=\frac{3-0}{n}=\frac{3}{n}$$

$$x_0=0,x_1=\Delta x,x_2=2\Delta x,x_3=3\Delta x,\ldots,x_i=i\Delta x,\ldots,x_n=n\Delta x=n\times\frac{3}{n}=3$$



با توجه به صعودی بودن تابع، واضح است که ماکزیمم مطلق f بر زیر بازه ی $[x_{i-1},x_i]$ مساوی $f(x_i)$ است، بنابراین:

$$A=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

و چون $x_i=i\Delta x$ و $f(x)=2x+1$ پس $f(x_i)=2i\Delta x+1$ حال مراحل زیر را برای محاسبه ی حد مجموع ریمان را انجام می دهیم.

مرحله ی اول: محاسبه ی مجموع ریمان

$$\sum_{i=۱}^{n} f(x_i)\Delta x=\sum_{i=۱}^{n}(۲(i\Delta x)+۱)\Delta x=\sum_{i=۱}^{n}(۲(\frac{۳i}{n})+۱)\frac{۳}{n}=\frac{۳}{n}\sum_{i=۱}^{n}(\frac{۶i}{n}+۱)=\frac{۳}{n}(\sum_{i=۱}^{n}\frac{۶i}{n}+\sum_{i=۱}^{n}۱)$$

$$=\frac{۳}{n}(\frac{۶}{n}\sum_{i=۱}^{n}i+\sum_{i=۱}^{n}۱)=\frac{۳}{n}(\frac{۶}{n}\times\frac{n(n+۱)}{۲}+n)=\frac{۳}{n}(۳n+۳+n)=\frac{۳}{n}(۴n+۳)$$

مرحله ی دوم: محاسبه ی حد مجموع

$$A=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n} f(x_i)\Delta x=\lim_{n\to+\infty}\frac{۳}{n}(۴n+۳)=\lim_{n\to+\infty}\frac{۳}{n}(۴n)=۱۲$$

بنابراین مساحت ناحیه ی مساوی ۱۲ واحد مربع است.

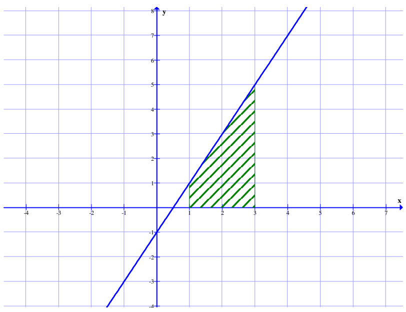
***

۵ : (مسئله ی ۳ ص ۲۲۹) مساحت ناحیه ای را بیابید که تحت نمودار خط به معادله ی $y=۲x-۱$ بوده و محدود به محور طولها و خطوط $x=۱$ و $x=۳$ می باشد.

حل :

$f(x)=۲x-۱$ و $\Delta x=\frac{۳-۱}{n}=\frac{۲}{n}$

$$x_۰=۱, x_۱=۱+\Delta x, x_۲=۱+۲\Delta x,\dots,x_i=۱+i\Delta x,\dots,x_n=۱+n\Delta x=۱+n\times\frac{۲}{n}=۳$$



با توجه به صعودی بودن تابع، واضح است که ماکزیمم مطلق f بر زیر بازه ی $[x_{i-۱},x_i]$ مساوی $f(x_i)$ است، بنابراین:

$$A=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n} f(x_i)\Delta x$$

و چون $x_i=۱+i\Delta x$ و $f(x)=۲x-۱$ پس $f(x_i)=۲(۱+i\Delta x)-۱=۱+۲i\Delta x$ حال مراحل زیر را برای محاسبه ی حد مجموع ریمان را انجام می دهیم.

مرحله ی اول: محاسبه ی مجموع ریمان

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}(1+2i\Delta x)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}(1+\frac{4i}{n})\frac{2}{n} = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(1+\frac{4i}{n}) = \frac{2}{n}(\sum_{i=1}^{n}1+\sum_{i=1}^{n}\frac{4i}{n})$$

$$= \frac{2}{n}(\sum_{i=1}^{n}1+\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}i) = \frac{2}{n}(n+\frac{4}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}) = \frac{2}{n}(n+2n+2) = \frac{2}{n}(3n+2)$$

مرحله ی دوم: محاسبه ی حد مجموع

$$A = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n}(3n+2) = \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n}(3n) = 6$$

بنابراین مساحت ناحیه ی مساوی ۶ واحد مربع است.

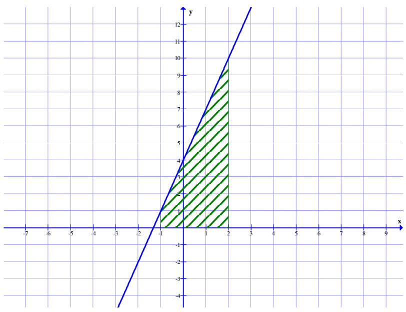
***

۶ : (مسئله ی ۴ ص ۲۲۹) مساحت ناحیه ای را بیابید که تحت نمودار خط به معادله ی $y = 3x+4$ بوده و محدود به محور طولها و خطوط $x=-1$ و $x=2$ می باشد.

حل :

$$f(x) = 3x+4 \quad \text{و} \quad \Delta x = \frac{2+1}{n} = \frac{3}{n}$$

$$x_0 = -1, x_1 = -1+\Delta x, x_2 = -1+2\Delta x, \ldots, x_i = -1+i\Delta x, \ldots, x_n = -1+n\Delta x = -1+n\times\frac{3}{n} = 2$$



با توجه به صعودی بودن تابع، واضح است که ماکزیمم مطلق f بر زیر بازه ی $[x_{i-1}, x_i]$ مساوی $f(x_i)$ است، بنابراین:

$$A = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

و چون $x_i=-۱+i\Delta x$ و $f(x)=۳x+۴$ پس $f(x_i)=۳(-۱+i\Delta x)+۴=۱+۳i\Delta x$ حال مراحل زیر را برای محاسبه ی حد مجموع ریمان را انجام می دهیم.

مرحله ی اول: محاسبه ی مجموع ریمان

$$\sum_{i=۱}^{n} f(x_i)\Delta x=\sum_{i=۱}^{n}(۱+۳i\Delta x)\Delta x=\sum_{i=۱}^{n}(۱+\frac{۹i}{n})\frac{۳}{n}=\frac{۳}{n}\sum_{i=۱}^{n}(۱+\frac{۹i}{n})=\frac{۳}{n}(\sum_{i=۱}^{n}۱+\sum_{i=۱}^{n}\frac{۹i}{n})$$
$$=\frac{۳}{n}(\sum_{i=۱}^{n}۱+\frac{۹}{n}\sum_{i=۱}^{n}i)=\frac{۳}{n}(n+\frac{۹}{n}\times\frac{n(n+۱)}{۲})=\frac{۳}{n}(\frac{۱۱n+۹}{۲})=\frac{۳۳n+۲۷}{۲n}$$

مرحله ی دوم: محاسبه ی حد مجموع

$$A=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n} f(x_i)\Delta x=\lim_{n\to+\infty}\frac{۳۳n+۲۷}{۲n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{۳۳n}{۲n}=\frac{۳۳}{۲}$$

بنابراین مساحت ناحیه ی مساوی $\frac{۳۳}{۲}$ واحد مربع است.

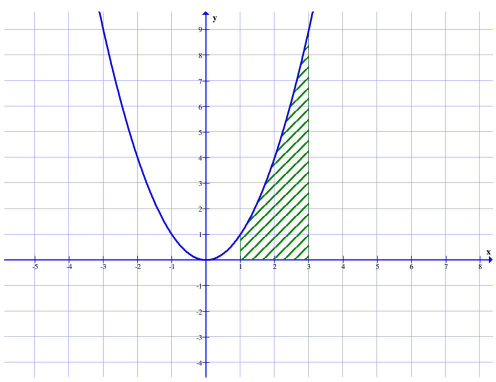
***

۷ : (مسئله ی ۵ ص ۲۳۰) مساحت ناحیه ای را بیابید که تحت نمودار تابع به معادله ی $y=x^۲$ بوده و محدود بـه محـور طولها و خطوط $x=۱$ و $x=۳$ می باشد.

حل :

$$f(x)=x^۲ \quad و \quad \Delta x=\frac{۳-۱}{n}=\frac{۲}{n}$$

$$x_۰=۱, x_۱=۱+\Delta x, x_۲=۱+۲\Delta x,\dots,x_i=۱+i\Delta x,\dots,x_n=۱+n\Delta x=۱+n\times\frac{۲}{n}=۳$$



و چون $x_i = ۱ + i\Delta x$ و $f(x) = x^۲$ پس $f(x_i) = (۱ + i\Delta x)^۲ = ۱ + ۲i\Delta x + i^۲\Delta^۲ x$

$$\sum_{i=۱}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=۱}^{n}(۱ + i\Delta x)^۲\Delta x = \sum_{i=۱}^{n}(۱ + ۲i\Delta x + i^۲\Delta^۲ x)^۲\Delta x$$

$$= \sum_{i=۱}^{n}(۱ + \frac{۴}{n}i + \frac{۴}{n^۲}i^۲)\frac{۲}{n} = \frac{۲}{n}(\sum_{i=۱}^{n}۱ + \frac{۴}{n}\sum_{i=۱}^{n}i + \frac{۴}{n^۲}\sum_{i=۱}^{n}i^۲)$$

$$= \frac{۲}{n}(n + \frac{۴}{n}(\frac{n(n+۱)}{۲}) + \frac{۴}{n^۲}(\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶})) = \frac{۲}{n}(n + ۲n + ۲ + \frac{۴n^۲ + ۶n + ۲}{۳n})$$

$$= \frac{۲}{n}(\frac{۱۳n^۲ + ۱۲n + ۲}{۳n})$$

$$A = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to+\infty} = \frac{۲}{n}(\frac{۱۳n^۲ + ۱۲n + ۲}{۳n}) = \lim_{n\to+\infty} = \frac{۲}{n}(\frac{۱۳n^۲}{۳n}) = \frac{۲۶}{۳}$$

بنابراین مساحت ناحیه ی مساوی $\frac{۲۶}{۳}$ واحد مربع است.

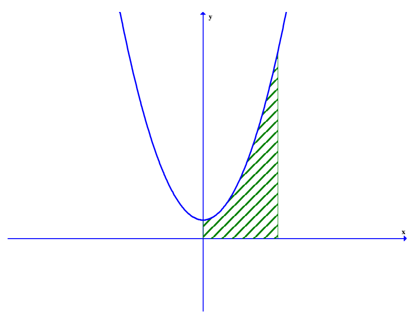
❋❋❋

۸ : (مسئله ی ۶ ص ۲۳۰) مساحت ناحیه ای را بیابید که تحت نمودار تابع به معادله ی $y = x^۲ + ۱$ بوده و محدود به محور طولها و خطوط $x = ۰$ و $x = a > ۰$ می باشد.

حل :

$$f(x) = x^۲ + ۱ \quad \text{و} \quad \Delta x = \frac{a - ۰}{n} = \frac{a}{n}$$

$$x_۰ = ۰, x_۱ = \Delta x, x_۲ = ۲\Delta x, x_۳ = ۳\Delta x, \ldots, x_i = i\Delta x, \ldots, x_n = n\Delta x = n \times \frac{a}{n} = a$$



و چون $x_i = i\Delta x$ و $f(x) = x^2 + 1$ پس $f(x_i) = (i\Delta x)^2 + 1$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}((i\Delta x)^2 + 1)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}((\frac{ai}{n})^2 + 1)\frac{a}{n} = \frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{a^2 i^2}{n^2} + 1) = \frac{a}{n}(\frac{a^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} 1)$$

$$= \frac{a}{n}(\frac{a^2}{n^2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n) = \frac{a}{n}(\frac{a^2(n+1)(2n+1)}{6n} + n) = \frac{a^3(2n^2 + 3n + 1)}{6n^2} + a$$

$$A = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to+\infty}\frac{a^3(2n^2 + 3n + 1)}{6n^2} + a = \lim_{n\to+\infty}\frac{a^3(2n^2)}{6n^2} + a = \frac{a^3}{3} + a$$

بنابراین مساحت ناحیه ی مساوی $\frac{a^3}{3} + a$ واحد مربع است.

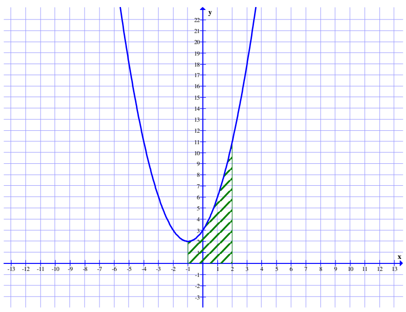
***

۹ : (مسئله ی ۷ ص ۲۳۰) مساحت ناحیه ای را بیابید که تحت نمودار تابع به معادله ی $y = x^2 + 2x + 3$ بوده و محدود به محور طولها و خطوط $x = -1$ و $x = 2$ می باشد.

حل :

$$f(x) = (x+1)^2 + 2 \quad \text{و} \quad \Delta x = \frac{2+1}{n} = \frac{3}{n}$$

$$x_0 = -1, x_1 = -1 + \Delta x, x_2 = -1 + 2\Delta x, \ldots, x_i = -1 + i\Delta x, \ldots, x_n = -1 + n\Delta x = -1 + n \times \frac{3}{n} = 2$$



و چون $x_i = -1 + i\Delta x$ و $f(x) = (x+1)^2 + 2$ پس $f(x_i) = (-1 + i\Delta x + 1)^2 + 2 = i^2\Delta x^2 + 2$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}((i\Delta x)^2 + 2)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}(i^2\Delta x^2 + 2)\Delta x = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{9}{n^2} i^2 + 2)$$

$$=\frac{۳}{n}(\frac{۹}{n^۲}\sum_{i=۱}^{n}i^۲+۲\sum_{i=۱}^{n}۱)=\frac{۳}{n}(\frac{۹}{n^۲}\times\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}+۲n)$$

$$=\frac{۳}{n}(\frac{۳}{n}\times\frac{(n+۱)(۲n+۱)}{۲}+۲n)=\frac{۳}{n}(\frac{۶n^۲+۹n+۳+۴n^۲}{۲n})=\frac{۳}{n}(\frac{۱۰n^۲+۹n+۳}{۲n})$$

$$A=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n}f(x_i)\Delta x=\lim_{n\to+\infty}\frac{۳}{n}(\frac{۱۰n^۲+۹n+۳}{۲n})=\lim_{n\to+\infty}\frac{۳}{n}(\frac{۱۰n^۲}{۲n})=۱۵$$

بنابراین مساحت ناحیه ی مساوی ۱۵ واحد مربع است.

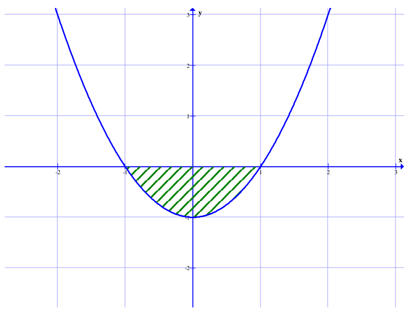
***

۱۰ : (مسئله ی ۸ ص ۲۳۰) مساحت ناحیه ای را بیابید که بالای نمودار تابع به معادله ی $y=x^۲-۱$ بوده و محدود بـه محور طولها می باشد.

حل : ابتدا محل تقاطع نمودار تابع با محور طولها را تعیین می کنیم.

$$y=x^۲-۱\xrightarrow{y=۰}x=\pm۱$$

پس مساحت مورد نظر از $x=-۱$ تا $x=۱$ می باشد.



$$f(x)=x^۲-۱ \quad \text{و} \quad \Delta x=\frac{۱+۱}{n}=\frac{۲}{n}$$

$$x_۰=-۱, x_۱=-۱+\Delta x, x_۲=-۱+۲\Delta x,\dots,x_i=-۱+i\Delta x,\dots,x_n=-۱+n\Delta x=-۱+n\times\frac{۲}{n}=۱$$

و چون $x_i=-۱+i\Delta x$ و $f(x)=x^۲-۱$ پس $f(x_i)=(-۱+i\Delta x)^۲-۱=-۲i\Delta x+i^۲\Delta x^۲$

$$\sum_{i=۱}^{n}f(x_i)\Delta x=\sum_{i=۱}^{n}((-۱+i\Delta x)^۲-۱)\Delta x=\sum_{i=۱}^{n}(-۲i\Delta x+i^۲\Delta x^۲)\Delta x=\frac{۲}{n}\sum_{i=۱}^{n}(\frac{-۴}{n}i+\frac{۴}{n^۲}i^۲)$$

$$=\frac{2}{n}\left(\frac{-4}{n}\sum_{i=1}^{n} i+\frac{4}{n^{2}}\sum_{i=1}^{n} i^{2}\right)=\frac{2}{n}\left(\frac{-4}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}+\frac{4}{n^{2}}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

$$=\frac{2}{n}\left(-2(n+1)+\frac{2(2n^{2}+3n+1)}{3n}\right)=\frac{2}{n}\left(\frac{-2n^{2}+2}{3n}\right)$$

$$A=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n}\left(\frac{-2n^{2}+2}{3n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n}\left(\frac{-2n^{2}}{3n}\right)=\frac{-4}{3}$$

بنابراین مساحت ناحیه ی مساوی $\frac{4}{3}$ واحد مربع است.

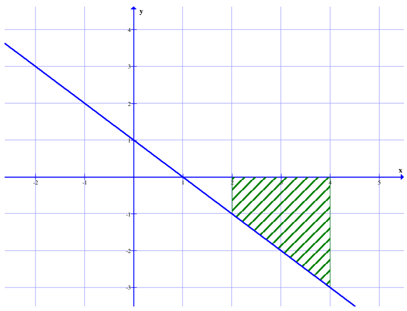
***

۱۱ : (مسئله ی ۹ ص ۲۳۰) مساحت ناحیه ای را بیابید که بالای نمودار تابع به معادله ی $y=1-x$ بوده و محدود به محور طولها خطوط $x=2$ و $x=4$ می باشد.

حل:

$$f(x)=1-x \quad \text{و} \quad \Delta x=\frac{4-2}{n}=\frac{2}{n}$$

$$x_0=2, x_1=2+\Delta x, x_2=2+2\Delta x,\ldots, x_i=2+i\Delta x,\ldots, x_n=2+n\Delta x=2+n\times\frac{2}{n}=4$$



و چون $x_i=2+i\Delta x$ و $f(x)=1-x$ پس $f(x_i)=1-(2+i\Delta x)=-1-i\Delta x$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{n}(-1-i\Delta x)\Delta x=\sum_{i=1}^{n}\left(-1-\frac{2}{n}i\right)\frac{2}{n}=\frac{2}{n}\left(-\sum_{i=1}^{n}1-\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} i\right)$$

$$=\frac{2}{n}\left(-n-\frac{2}{n}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\right)=\frac{2}{n}(-n-n-1)=\frac{2}{n}(-2n-1)$$

$$A=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n}(-2n-1)=\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n}(-2n)=-4$$

بنابراین مساحت ناحیه ی مساوی ۴ واحد مربع است.

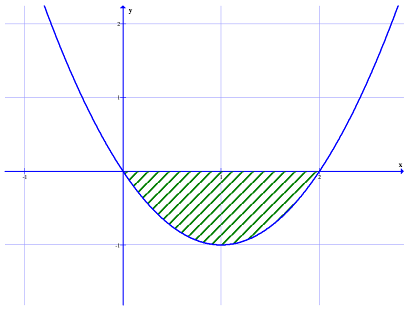
***

۱۲ : (مسئله ی ۱۰ ص ۲۳۰) مساحت ناحیه ای را بیابید که بالای نمودار تابع به معادله ی $y=x^{۲}-۲x$ بوده و محدود به محور طولها می باشد.

حل : ابتدا محل تقاطع نمودار تابع با محور طولها را تعیین می کنیم.

$$y=x^{۲}-۲x \xrightarrow{y=۰} x=۰ \quad , \quad x=۲$$

پس مساحت مورد نظر از $x=۰$ تا $x=۲$ می باشد.



$$f(x)=x^{۲}-۲x \quad \text{و} \quad \Delta x=\frac{۲-۰}{n}=\frac{۲}{n}$$

$$x_{۰}=۰, x_{۱}=\Delta x, x_{۲}=۲\Delta x, \ldots, x_{i}=i\Delta x, \ldots, x_{n}=n\Delta x=n\times\frac{۲}{n}=۲$$

و چون $x_i=i\Delta x$ و $f(x)=x^{۲}-۲x$ پس $f(x_i)=(i\Delta x)^{۲}-۲(i\Delta x)=i^{۲}\Delta x^{۲}-۲i\Delta x$

$$\sum_{i=۱}^{n} f(x_i)\Delta x=\sum_{i=۱}^{n}((i\Delta x)^{۲}-۲(i\Delta x))\Delta x=\sum_{i=۱}^{n}(i^{۲}\Delta x^{۲}-۲i\Delta x)\Delta x=\frac{۲}{n}\sum_{i=۱}^{n}(\frac{۴}{n^{۲}}i^{۲}-\frac{۴}{n}i)$$

$$=\frac{۲}{n}(\frac{۴}{n^{۲}}\sum_{i=۱}^{n}i^{۲}-\frac{۴}{n}\sum_{i=۱}^{n}i)=\frac{۲}{n}(\frac{۴}{n^{۲}}\times\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}-\frac{۴}{n}\times\frac{n(n+۱)}{۲})$$

$$=\frac{۲}{n}(\frac{۲(۲n^{۲}+۳n+۱)}{۳n}-۲(n+۱))=\frac{۲}{n}(\frac{-۲n^{۲}+۲}{۳n})$$

$$A=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n}f(x_i)\Delta x=\lim_{n\to+\infty}\frac{۲}{n}(\frac{-۲n^{۲}+۲}{۳n})=\lim_{n\to+\infty}\frac{۲}{n}(\frac{-۲n^{۲}}{۳n})=\frac{-۴}{۳}$$

بنابراین مساحت ناحیه ی مساوی $\frac{۴}{۳}$ واحد مربع است.

۱۳ : (مسئله ی ۱۳ ص ۲۳۰) مساحت ناحیه ای را بیابید که تحت نمودار تابع به معادله ی $y=\frac{۱}{x}$ بوده و محدود به محور طولها و دو خط $x=a>۰$ و $x=b>a$ می باشد.

حل : به روش انتگرال گیری

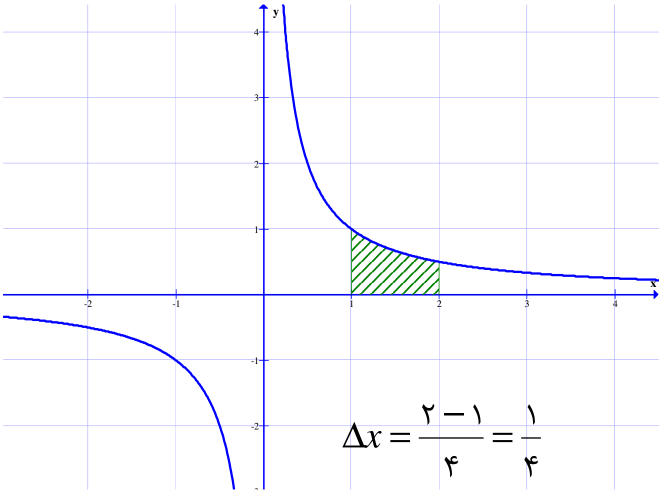
$$A=\int_a^b \frac{۱}{x}dx=L_n\,|x|\Big|_a^b=L_n\,|b|-L_n\,|a|=L_n b-L_n a=L_n\frac{b}{a}$$

***

۱۴ : (مثال ص ۲۳۳) مجموع های پایین و بالا را برای تابع $y=\frac{۱}{x}$ بر بازه ی $[۱,۲]$ با افراز منظم مستطیلی با ۴ بـازه ی جزء به دست آورید.

حل: در فاصله ی $[۱,۲]$ تابع داده شده نزولی است. لذا:

$$x_۰=۱$$
$$x_۱=۱+\Delta x=۱+\frac{۱}{۴}=\frac{۵}{۴}$$
$$x_۲=۱+۲\Delta x=۱+\frac{۲}{۴}=\frac{۶}{۴}$$
$$x_۳=۱+۳\Delta x=۱+\frac{۳}{۴}=\frac{۷}{۴}$$
$$x_۴=۱+۴\Delta x=۱+\frac{۴}{۴}=۲$$



$$\Delta x=\frac{۲-۱}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

مجموع پایین (تقریب نقصانی مساحت)

$$L_۴(f)=\sum_{i=۱}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x=f(x_۱)\Delta x+f(x_۲)\Delta x+f(x_۳)\Delta x+f(x_۴)\Delta x$$
$$=(\frac{۴}{۵})\times\frac{۱}{۴}+(\frac{۴}{۶})\times\frac{۱}{۴}+(\frac{۴}{۷})\times\frac{۱}{۴}+(\frac{۱}{۲})\times\frac{۱}{۴}=(\frac{۴}{۵}+\frac{۴}{۶}+\frac{۴}{۷}+\frac{۱}{۲})\times\frac{۱}{۴}\approx ۰/۶۳۴۵$$

مجموع بالا (تقریب اضافی مساحت)

$$U_۴(f)=\sum_{i=۰}^{n-۱} f(\varepsilon_i)\Delta x=+f(x_۰)\Delta x+f(x_۱)\Delta x+f(x_۲)\Delta x+f(x_۳)\Delta x$$

$$= (۱)\times\frac{۱}{۴} + (\frac{۴}{۵})\times\frac{۱}{۴} + (\frac{۴}{۶})\times\frac{۱}{۴} + (\frac{۴}{۷})\times\frac{۱}{۴} = (۱ + \frac{۴}{۵} + \frac{۴}{۶} + \frac{۴}{۷})\times\frac{۱}{۴} \approx ۰/۷۵۹۵$$

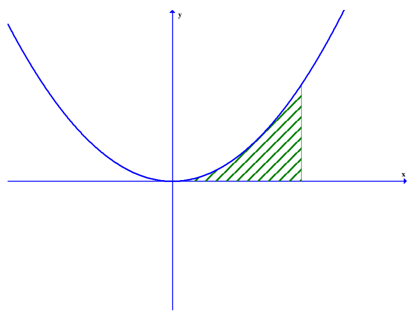
***

۱۵ : (مثال ص ۲۳۵) ثابت کنید که تابع $y = x^۲$ بر بازه ی $[۰,a]$ انتگرال پذیر است و سپس مقدار $\int_۰^a x^۲ dx$ را به دست آورید.

حل : ابتدا مساحت ناحیه ای را که محدود به سهمی $y = x^۲$ و خطوط $y = ۰$ و $x = ۰$ و $x = a > ۰$ را به دست آوریم .

$f(x) = x^۲$ و $\Delta x = \frac{a-۰}{n} = \frac{a}{n}$

$$x_۰ = ۰, x_۱ = \Delta x, x_۲ = ۲\Delta x, x_۳ = ۳\Delta x, \dots, x_i = i\Delta x, \dots, x_n = n\Delta x = n\times\frac{a}{n} = a$$



و چون $x_i = i\Delta x$ و $f(x) = x^۲$ پس $f(x_i) = (i\Delta x)^۲$

$$\sum_{i=۱}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=۱}^{n}(i\Delta x)^۲\Delta x = \sum_{i=۱}^{n}(\frac{ai}{n})^۲\frac{a}{n} = \sum_{i=۱}^{n}\frac{a^۳ i^۲}{n^۳} = \frac{a^۳}{n^۳}\sum_{i=۱}^{n} i^۲ = \frac{a^۳}{n^۳}(\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶})$$

$$= \frac{a^۳}{n^۳}(\frac{۲n^۳ + ۳n^۲ + n}{۶}) = \frac{a^۳}{۶}(\frac{۲n^۳ + ۳n^۲ + n}{n^۳})$$

$$A = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to+\infty}\frac{a^۳}{۶}(\frac{۲n^۳ + ۳n^۲ + n}{n^۳}) = \lim_{n\to+\infty}\frac{a^۳}{۶}(\frac{۲n^۳}{n^۳}) = \frac{a^۳}{۳}$$

لذا :

$$\lim_{n\to+\infty} L_n(f) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x = \frac{a^۳}{۳}$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n(f)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x=\frac{a^3}{3}$$

بنابراین :

$$\int_0^a x^2dx=\frac{a^3}{3}$$

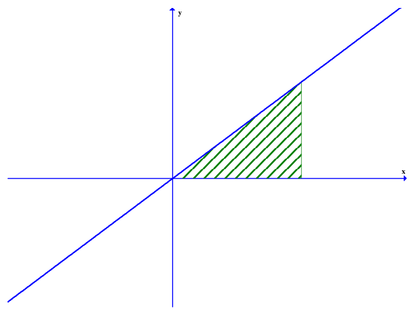
***

۱۶ : (تمرین در کلاس ۱ ص ۲۳۶) $\int_0^a xdx$ را محاسبه کنید.

حل : ابتدا مساحت ناحیه ای را که محدود به خط $y=x$ و خطوط $y=0$ و $x=0$ و $x=a>0$ را به دست آوریم .

$$f(x)=x \quad \text{و} \quad \Delta x=\frac{a-0}{n}=\frac{a}{n}$$

$$x_0=0, x_1=\Delta x, x_2=2\Delta x, x_3=3\Delta x,\dots,x_i=i\Delta x,\dots,x_n=n\Delta x=n\times\frac{a}{n}=a$$



و چون $x_i=i\Delta x$ و $f(x)=x$ پس $f(x_i)=i\Delta x$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{n}(i\Delta x)\Delta x=\sum_{i=1}^{n}(\frac{ai}{n})\frac{a}{n}=\frac{a^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i=\frac{a^2}{n^2}(\frac{n(n+1)}{2})=a^2(\frac{n^2+n}{2n^2})$$

$$A=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\lim_{n\to+\infty} a^2(\frac{n^2+n}{2n^2})=\lim_{n\to+\infty} a^2(\frac{n^2+n}{2n^2})=\frac{a^2}{2}$$

لذا :

$$\lim_{n\to+\infty} L_n(f)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x=\frac{a^2}{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n(f)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x=\frac{a^2}{2}$$

بنابراین :

$$\int_0^a x dx=\frac{a^2}{2}$$

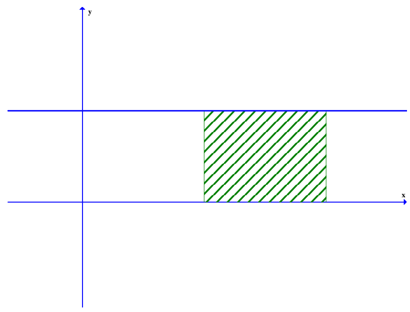
***

۱۷ : (تمرین در کلاس ۲ ص ۲۳۶) $\int_a^b dx$ را محاسبه کنید.

حل : ابتدا مساحت ناحیه ای را که محدود به خط $y=1$ و خطوط $y=0$ و $x=a$ و $x=b>a$ را به دست آوریم .

$$f(x)=1 \quad \text{و} \quad \Delta x=\frac{b-a}{n}$$

$$x_0=a, x_1=\Delta x, x_2=a+2\Delta x, \ldots, x_i=a+i\Delta x, \ldots, x_n=a+n\Delta x=a+n\times\frac{b-a}{n}=b$$



و چون $x_i=i\Delta x$ و $f(x)=1$ پس $f(x_i)=1$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{n}(1)\Delta x=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}1=\frac{b-a}{n}\times n=b-a$$

$$A=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\lim_{n\to+\infty} b-a=b-a$$

لذا :

$$\lim_{n\to+\infty} L_n(f)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x=b-a$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n(f)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x=b-a$$

بنابراین :

$$\int_a^b dx=b-a$$

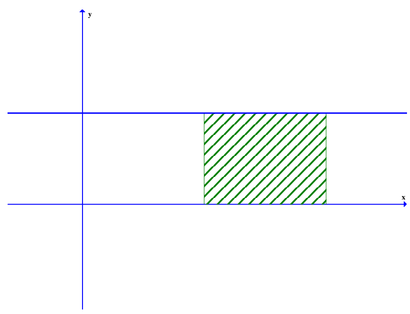
***

۱۸ : (تمرین در کلاس ۳ ص ۲۳۶) $\int_a^b cdx$ را محاسبه کنید.

حل : ابتدا مساحت ناحیه ای را که محدود به خط $y=c$ و خطوط $y=۰$ و $x=a$ و $x=b>a$ را به دست آوریم .

$$f(x)=c \quad \text{و} \quad \Delta x=\frac{b-a}{n}$$

$$x_۰=a, x_۱=\Delta x, x_۲=a+۲\Delta x,\ldots,x_i=a+i\Delta x,\ldots,x_n=a+n\Delta x=a+n\times\frac{b-a}{n}=b$$



و چون $x_i=a+i\Delta x$ و $f(x)=c$ پس $f(x_i)=c$

$$\sum_{i=۱}^{n} f(x_i)\Delta x=\sum_{i=۱}^{n}(c)\Delta x=\frac{b-a}{n}\sum_{i=۱}^{n}c=\frac{b-a}{n}\times cn=c(b-a)$$

$$A=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n} f(x_i)\Delta x=\lim_{n\to+\infty} c(b-a)=c(b-a)$$

لذا :

$$\lim_{n\to+\infty} L_n(f)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x=c(b-a)$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n(f)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x=c(b-a)$$

بنابراین :

$$\int_a^b c\,dx=c(b-a)$$

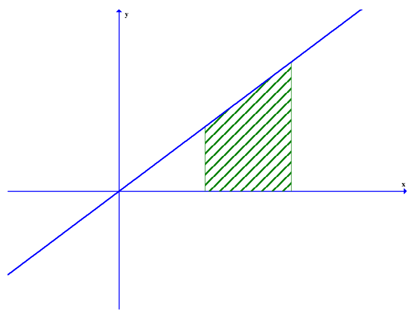
***

۱۹ : (مثال مشابه) $\int_a^b x\,dx$ را محاسبه کنید.

حل : ابتدا مساحت ناحیه ای را که محدود به خط $y=x$ و خطوط $y=۰$ و $x=a$ و $x=b>a$ را به دست آوریم .

$$f(x)=x \quad \text{و} \quad \Delta x=\frac{b-a}{n}$$

$$x_۰=a, x_۱=\Delta x, x_۲=a+۲\Delta x,\dots,x_i=a+i\Delta x,\dots,x_n=a+n\Delta x=a+n\times\frac{b-a}{n}=b$$



و چون $x_i=a+i\Delta x$ و $f(x)=x$ پس $f(x_i)=a+i\Delta x$

$$\sum_{i=۱}^{n} f(x_i)\Delta x=\sum_{i=۱}^{n}(a+i\Delta x)\Delta x=\frac{b-a}{n}\left(\sum_{i=۱}^{n} a+\frac{b-a}{n}\sum_{i=۱}^{n} i\right)=\frac{b-a}{n}\left(na+\frac{b-a}{n}\times\frac{n(n+۱)}{۲}\right)$$

$$=\frac{b-a}{n}\left(\frac{۲an^۲}{۲n}+\frac{(b-a)(n^۲+n)}{۲n}\right)=\frac{b-a}{n}\left(\frac{۲an^۲+bn^۲-an^۲+bn-an}{۲n}\right)$$

$$=\frac{b-a}{n}\left(\frac{an^۲+bn^۲+bn-an}{۲n}\right)$$

$$A=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n} f(x_i)\Delta x=\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\left(\frac{an^۲+bn^۲+bn-an}{۲n}\right)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\left(\frac{(a+b)n^۲}{۲n}\right)=\frac{b^۲-a^۲}{۲}$$

لذا :

$$\lim_{n\to+\infty} L_n(f)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x=\frac{b^2-a^2}{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n(f)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x=\frac{b^2-a^2}{2}$$

بنابراین :

$$\int_a^b xdx=\frac{b^2-a^2}{2}$$

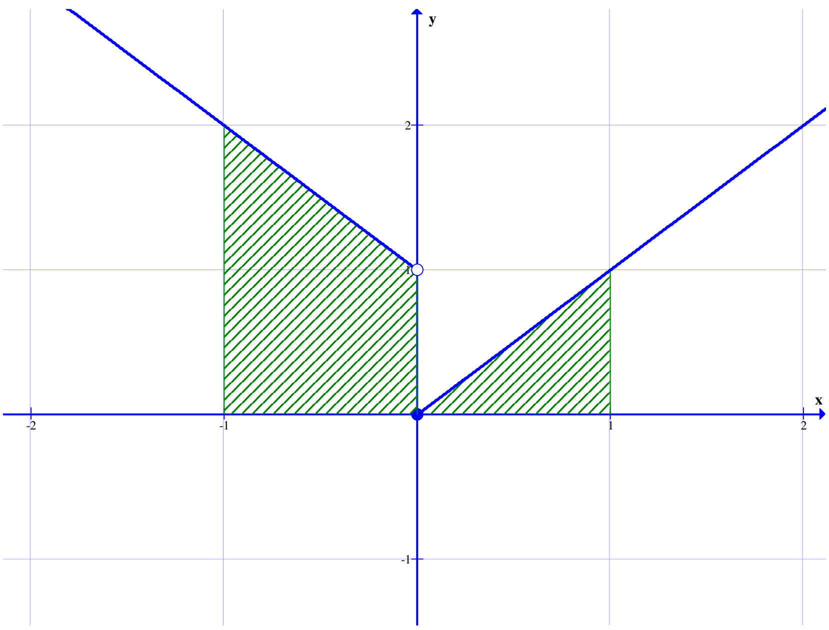
***

۲۰ : (تمرین در کلاس ص ۲۳۸) تابع f $\int_a^b xdx$ در بازه ی $[-1,1]$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$f(x)=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ 1-x & x<0 \end{cases}$$

ثابت کنید که $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ وجود دارد و مقدار آن را به دست آورید.(نمودار تابع را رسم کنید.)

حل :



با افراز به بازه های مساوی خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to+\infty} L_n(f)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x=۲$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n(f)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x=۲$$

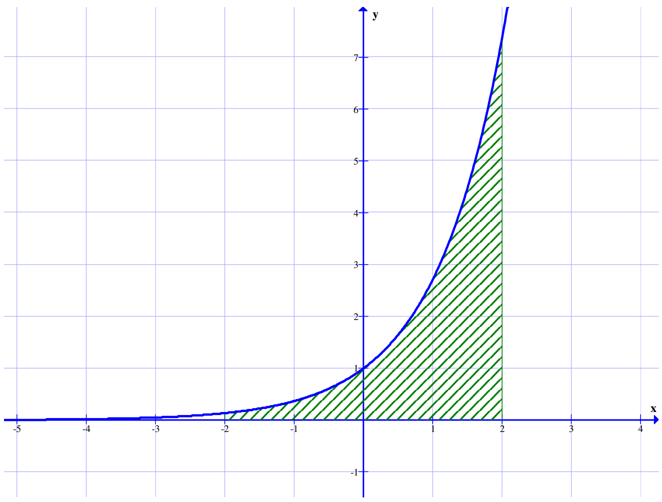
یعنی تابع داده شده، در بازه ی $[-۱,۱]$ انتگرال پذیر است و لذا

$$\int_{-۱}^{۱} f(x)dx=۲$$

***

۲۱ : (مسئله ی ۳ ص ۲۴۱) مجموع های پایین و بالا را برای تابع $y=e^x$ بر بازه ی $[-۲,۲]$ با افراز منظم مستطیلی با ۴ بازه ی جزء به دست آورید.

حل: در فاصله ی $[۱,۲]$ تابع داده شده صعودی است. لذا:



$$\Delta x=\frac{۲-۱}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

$$x_۰=-۲$$
$$x_۱=-۲+\Delta x=-۲+۱=-۱$$
$$x_۲=-۲+۲\Delta x=-۲+۲(۱)=۰$$
$$x_۳=-۲+۳\Delta x=-۲+۳(۱)=۱$$
$$x_۴=-۲+۴\Delta x=-۲+۴(۱)=۲$$

مجموع پایین (تقریب نقصانی مساحت)

$$L_۴(f)=\sum_{i=۰}^{n-۱} f(\varepsilon_i)\Delta x=f(x_۰)\Delta x+f(x_۱)\Delta x+f(x_۲)\Delta x+f(x_۳)\Delta x$$

$$=(e^{-۲})\times۱+(e^{-۱})\times۱+(e^{۰})\times۱+(e^{۱})\times۱=\frac{۱+e+e^۲+e^۳}{e^۲}$$

مجموع بالا (تقریب اضافی مساحت)

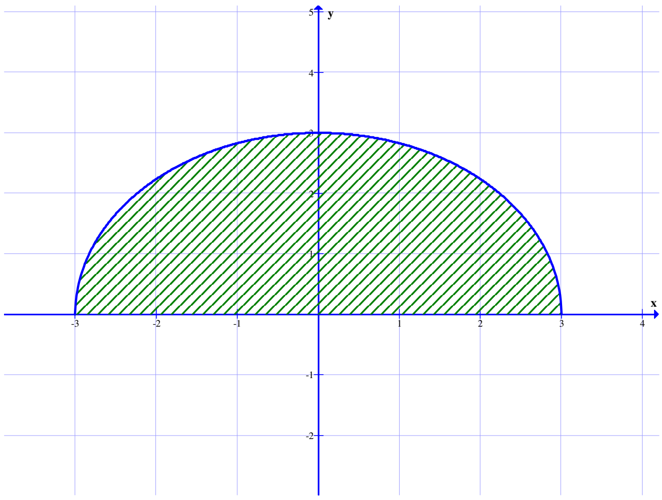
$$U_۴(f)=\sum_{i=۱}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x=+f(x_۱)\Delta x+f(x_۲)\Delta x+f(x_۳)\Delta x+f(x_۴)\Delta x$$

$$=(e^{-۱})\times ۱+(e^{۰})\times ۱+(e^{۱})\times ۱+(e^{۲})\times ۱=\frac{۱+e+e^{۲}+e^{۳}}{e}$$

***

۲۲ : (مسئله ی ۹ ص ۲۴۲) انتگرال $\int_{-۳}^{۳}\sqrt{۹-x^{۲}}\,dx$ را محاسبه کنید.

حل : نمودار تابع $f(x)=\sqrt{۹-x^{۲}}$ نیم دایره ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع صفر است. لذا



$$\int_{-۳}^{۳}\sqrt{۹-x^{۲}}\,dx=۲\int_{۰}^{۳}\sqrt{۹-x^{۲}}\,dx=۲\left(\frac{\pi(۹)}{۴}\right)=\frac{۹\pi}{۲}$$

***

۲۳ : (مسئله ی ۱۰ ص ۲۴۲) فرض کنیم f تابعی پیوسته و صعودی اکید بر $[a,b]$ باشد. ثابت کنید که :

$$U_n f-L_n f=\frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n}$$

حل : با توجه به صعودی بودن تابع واضح است که بر زیر بازه ی $[x_{i-۱},x_i]$ ، ماکزیمم مطلق f مساوی $f(x_i)$ و می نیمم مطلق f مساوی $f(x_{i-۱})$ است، بنابراین: یعنی $u_i=x_i$ و $l_i=x_{i-۱}$

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}$$

$$U_n f - L_n f = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n} f(x_i)\Delta x - \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n} f(x_{i-۱})\Delta x$$

$$= \Delta x(\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n} f(x_i) - \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n} f(x_{i-۱})) = \Delta x(\lim_{n\to+\infty}(\sum_{i=۱}^{n} f(x_i) - \sum_{i=۱}^{n} f(x_{i-۱}))$$

$$= \Delta x(\lim_{n\to+\infty}(f(x_n) - f(x_۰)) = \frac{b-a}{n}(\lim_{n\to+\infty}(f(b) - f(a))) = \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n}$$

***

۲۴ : (مثال ص ۲۴۳) انتگرال $\int_۰^۱ (x^۳ + ۴x^۲)dx$ را محاسبه کنید.

حل :

$$\int_۰^۱ (x^۳ + ۴x^۲)dx = (\frac{۱}{۴}x^۴ + \frac{۴}{۳}x^۳)\Big|_۰^۱$$

$$= (\frac{۱}{۴}(۱)^۴ + \frac{۴}{۳}(۱)^۳) - (\frac{۱}{۴}(۰)^۴ + \frac{۴}{۳}(۰)^۳) = \frac{۱}{۴} + \frac{۴}{۳} = \frac{۳+۱۶}{۱۲} = \frac{۱۹}{۱۲}$$

***

۲۵ : (مثال ص ۲۴۶) انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_{-۱}^{۲} (x^۲ - ۳x + ۲)dx$ ب) $\int_۰^a x^۲ dx$

حل :

$$\int_{-۱}^{۲} (x^۲ - ۳x + ۲)dx = (\frac{۱}{۳}x^۳ - \frac{۳}{۲}x^۲ + ۲x)\Big|_{-۱}^{۲}$$

$$= (\frac{۱}{۳}(۲)^۳ - \frac{۳}{۲}(۲)^۲ + ۲(۲)) - (\frac{۱}{۳}(-۱)^۳ - \frac{۳}{۲}(-۱)^۲ + ۲(-۱)) = \frac{۸}{۳} - ۶ + ۴ + \frac{۱}{۳} + \frac{۳}{۲} + ۲ = \frac{۹}{۲}$$

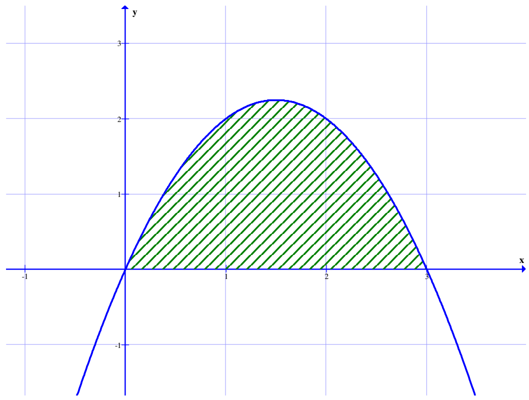
$$\int_۰^a x^۲ dx = (\frac{۱}{۳}x^۳)\Big|_۰^a = \frac{۱}{۳}(a)^۳ - \frac{۱}{۳}(۰)^۳ = \frac{۱}{۳}a^۳$$

***

حل تمرین های مهم

۲۶ : (مثال ص ۲۴۷) مساحت ناحیه ای از صفحه را بدست آورید که تحت نمودار تابع $y=۳x-x^۲$ بوده و در نقاط تقاطع با محور x ها به این محور محدود می باشد.

حل :

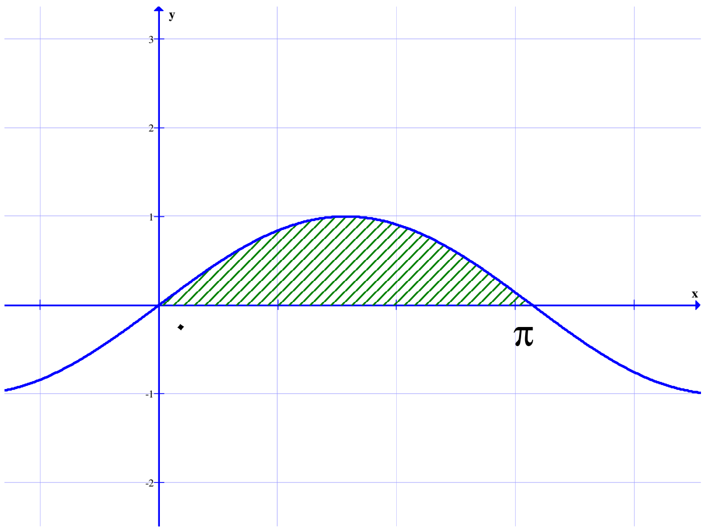


$$\int_{۰}^{۳}(۳x-x^۲)dx=(\frac{۳}{۲}x^۲-\frac{۱}{۳}x^۳)\Big|_{۰}^{۳}=(\frac{۳}{۲}(۳)^۲-\frac{۱}{۳}(۳)^۳)-(\frac{۳}{۲}(۰)^۲-\frac{۱}{۳}(۰)^۳)=\frac{۲۷}{۲}-۹=\frac{۹}{۲}$$

***

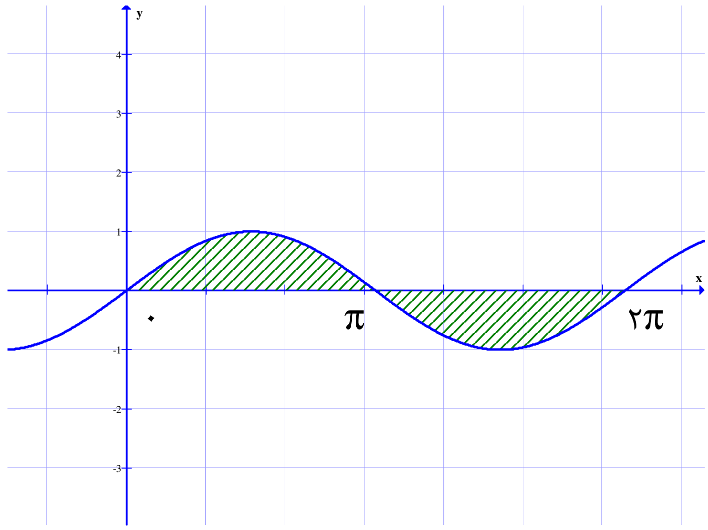
۲۷ : (تمرین در کلاس الف ص ۲۴۷) مساحت یک طاق تحت نمودار تابع $y=\sin x$ را محاسبه کنید.

حل :



$$\int_{۰}^{\pi}\sin x dx=-\cos x\Big|_{۰}^{\pi}=-\cos\pi-(-\cos ۰)=۱+۱=۲$$

۲۸ : (تمرین در کلاس ب ص ۲۴۷) مساحت ناحیه ی هاشور خورده محصور بین نمودار تابع $y = \sin x$ مطـابق شـکل زیر را محاسبه کنید.



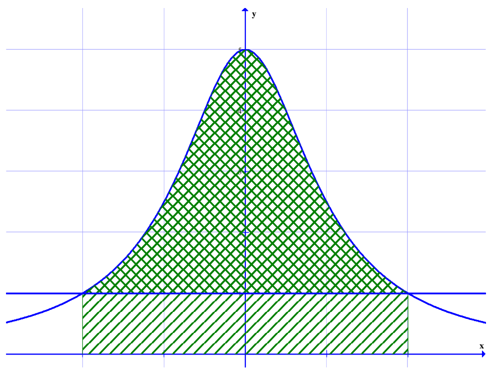
حل :

$$A = \int_{۰}^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{۲\pi} \sin x dx = (-\cos x)\Big|_{۰}^{\pi} + (-\cos x)\Big|_{\pi}^{۲\pi} = ۲ + ۲ = ۴$$

***

۲۹ : (تمرین در کلاس ج ص ۲۴۸) مساحت ناحیه‌ی بالای خط $y = ۱$ و تحت نمودار تابع $y = \frac{۵}{x^۲ + ۱}$ را بدست آورید.

حل :



$$y = \frac{۵}{x^۲ + ۱} \xrightarrow{y = ۱} \frac{۵}{x^۲ + ۱} = ۱ \rightarrow x^۲ + ۱ = ۵ \rightarrow x = \pm ۲$$

مساحت مورد نظر را در فاصله ی $[-۲,۲]$ محاسبه می کنیم. برای این کار ابتدا مساحت زیر منحنـی تـابع $y = \frac{۵}{x^۲ + ۱}$ در فاصله ی $[-۲,۲]$ را تعیین و سپس مساحت زیر خط $y = ۱$ در همین فاصله را از آن کم می کنیم.

$$A=\int_{-2}^{2}\frac{5}{x^{2}+1}dx-\int_{-2}^{2}1dx=5\tan^{-1}x\Big|_{-2}^{2}-x\Big|_{-2}^{2}=5(\tan^{-1}2-\tan^{-1}(-2))-(2-(-2))$$
$$=5\tan^{-1}2+5\tan^{-1}2-4=10\tan^{-1}2-4$$

***

۳۰ : (مثال ص ۲۴۸) مقدار میانگین تابع $y=e^{-x}+\cos x$ را بر بازه ی $[-\frac{\pi}{2},0]$ را بدست آورید.

حل :

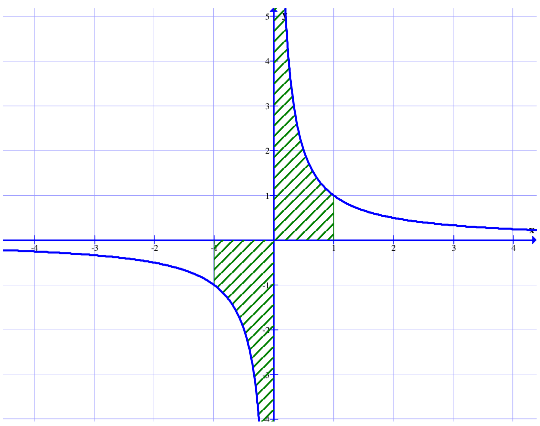
$$A.V=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f(x)dx=\frac{1}{0-(-\frac{\pi}{2})}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(e^{-x}+\cos x)dx=\frac{2}{\pi}(-e^{-x}+\sin x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}$$
$$=\frac{2}{\pi}(-e^{-(0)}+\sin(0))-\frac{2}{\pi}(-e^{-(-\frac{\pi}{2})}+\sin(-\frac{\pi}{2}))=\frac{2}{\pi}(-1+0)-\frac{2}{\pi}(-e^{\frac{\pi}{2}}-1)$$
$$=\frac{2}{\pi}(-1+0+e^{\frac{\pi}{2}}+1)=\frac{2}{\pi}e^{\frac{\pi}{2}}$$

***

۳۱ : (پاسخ یک پرسش مهم ص ۲۴۹) دانش آموزی تساوی زیر را در برگه ی امتحانی خود نوشته بود.

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx=L_n|x|\Big|_{-1}^{1}=L_n|1|-L_n|-1|=L_n1-L_n1=0-0=0$$

در مورد پاسخ این دانش آموز بحث کنید.



بحث : این تابع در نقطه ی $x=0$ ناپیوسته (در بازه‌ی $[-1,1]$، تعداد متناهی نقطه‌ی ناپیوستگی دارد) است، ولی کرانـدار نمی باشد. پس انتگرال پذیر نیست[1]. لذا پاسخ فوق نادرست است. بـه نمودار مقابل نیز توجه کنید.

در قضیه‌ی اساسی به شرط پیوستگی اشاره شده (شرط لازم و نه کافی) . پس نمی توان قضیه‌ی اساسی را بکار برد.

[1] . اگر تابع در فاصله ای مجانب قائم داشته باشد، در آن فاصله انتگرال پذیر نیست.

۳۲ : (مثال ص ۲۴۹) مشتق توابع زیر را به دست آورید.

الف) $F(x)=\int_x^{۳} e^{-t^{۲}}\,dt$ ب) $G(x)=x^{۲}\int_{-۴}^{۵x} e^{-t^{۲}}\,dt$

حل الف :

$$F(x)=\int_x^{۳} e^{-t^{۲}}\,dt=-\int_{۳}^{x} e^{-t^{۲}}\,dt \to F'(x)=-e^{-x^{۲}}$$

حل ب :

$$G'(x)=۲x\int_{-۴}^{۵x} e^{-t^{۲}}\,dt+x^{۲}(۵e^{-(۵x)^{۲}})=۲x\int_{-۴}^{۵x} e^{-t^{۲}}\,dt+۵x^{۲}e^{-۲۵x^{۲}})$$

***

۳۳ : (مسائل ص ۲۴۹) انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int_{۰}^{۲} x^{۳}\,dx$ ۴) $\int_{\frac{۱}{۲}}^{۱} \frac{dx}{x}$ ۷) $\int_{-\frac{\pi}{۴}}^{-\frac{\pi}{۶}} \cos x\,dx$

۲) $\int_{۰}^{۴} \sqrt{x}\,dx$ ۵) $\int_{-۲}^{-۱} (\frac{۱}{x^{۲}}-\frac{۱}{x^{۳}})dx$ ۸) $\int_{۰}^{\frac{۴\pi}{۳}} |\sin x|\,dx$

۳) $\int_{۰}^{۲\pi} (۱+\sin t)dt$ ۶) $\int_{۱}^{۲} (\frac{۲}{x^{۳}}-\frac{x^{۳}}{۲})dx$ ۹) $\int_{-\pi}^{\pi} e^{x}\,dx$

حل :

$$۱)\ \int_{۰}^{۲} x^{۳}\,dx=\frac{۱}{۴}x^{۴}\Big|_{۰}^{۲}=\frac{۱}{۴}(۲)^{۴}-\frac{۱}{۴}(۰)^{۴}=۴$$

$$۲)\ \int_{۰}^{۴} \sqrt{x}\,dx=\int_{۰}^{۴} x^{\frac{۱}{۲}}\,dx=\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}\Big|_{۰}^{۴}=\frac{۲}{۳}(۴)^{\frac{۳}{۲}}-\frac{۲}{۳}(۰)^{\frac{۳}{۲}}=\frac{۱۶}{۳}$$

$$۳)\ \int_{۰}^{۲\pi} (۱+\sin t)dt=(t-\cos t)\Big|_{۰}^{۲\pi}=(۲\pi-\cos ۲\pi)-(۰-\cos ۰)=۲\pi-۱+۱=۲\pi$$

$$۴)\ \int_{\frac{۱}{۲}}^{۱} \frac{dx}{x}=L_n x\Big|_{\frac{۱}{۲}}^{۱}=L_n(۱)-L_n(\frac{۱}{۲})=L_n(۱)-L_n(۱)+L_n(۲)=L_n(۲)$$

۵) $\int_{-۲}^{-۱}(\frac{۱}{x^۲}-\frac{۱}{x^۳})dx=\int_{-۲}^{-۱}(x^{-۲}-x^{-۳})dx=(\frac{۱}{-۱}x^{-۱}-\frac{۱}{-۲}x^{-۲})\Big|_{-۲}^{-۱}=(\frac{-۱}{x}+\frac{۱}{۲x^۲})\Big|_{-۲}^{-۱}$

$=(\frac{-۱}{-۱}+\frac{۱}{۲(-۱)^۲})-(\frac{-۱}{-۲}+\frac{۱}{۲(-۲)^۲})=۱+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۸}=\frac{۷}{۸}$

۶) $\int_{۱}^{۲}(\frac{۲}{x^۳}-\frac{x^۳}{۲})dx=\int_{۱}^{۲}(۲x^{-۳}-\frac{۱}{۲}x^۳)dx=(\frac{۲}{-۲}x^{-۲}-\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۴}x^۴))\Big|_{۱}^{۲}=(-\frac{۱}{x^۲}-\frac{۱}{۸}x^۴)\Big|_{۱}^{۲}$

$=(-\frac{۱}{(۲)^۲}-\frac{۱}{۸}(۲)^۴)-(-\frac{۱}{(۱)^۲}-\frac{۱}{۸}(۱)^۴)=(-\frac{۱}{۴}-۲)-(-۱-\frac{۱}{۸})=\frac{-۹}{۴}-\frac{۹}{۸}=\frac{-۹}{۸}$

۷) $\int_{-\frac{\pi}{۴}}^{-\frac{\pi}{۶}}\cos x dx=\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{۴}}^{-\frac{\pi}{۶}}=\sin(-\frac{\pi}{۶})-\sin(-\frac{\pi}{۴})=-\sin(\frac{\pi}{۶})+\sin(\frac{\pi}{۴})$

$=-\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{-۱+\sqrt{۲}}{۲}$

۸) $\int_{۰}^{\frac{۴\pi}{۳}}|\sin x|dx=\int_{۰}^{\pi}|\sin x|dx+\int_{\pi}^{\frac{۴\pi}{۳}}|\sin x|dx=\int_{۰}^{\pi}\sin xdx-\int_{\pi}^{\frac{۴\pi}{۳}}\sin xdx$

$=\int_{۰}^{\pi}\sin xdx-\int_{\pi}^{\frac{۴\pi}{۳}}\sin xdx=(-\cos x)\Big|_{۰}^{\pi}-(-\cos x)\Big|_{\pi}^{\frac{۴\pi}{۳}}$

$=-(\cos\pi-\cos ۰)+(\cos(\frac{۴\pi}{۳})-\cos\pi)=-(-۱-۱)+(-\frac{۱}{۲}+۱)=\frac{۵}{۲}$

توجه : فاصله ی $[۰,\pi]$ سینوس مثبت و در فاصله ی $[۰,\frac{۴\pi}{۳}]$ سینوس منفی است. همچنین

$\cos(\frac{۴\pi}{۳})=\cos(\pi+\frac{\pi}{۳})=-\cos(\frac{\pi}{۳})=-\frac{۱}{۲}$

۹) $\int_{-\pi}^{\pi}e^x dx=e^x\Big|_{-\pi}^{\pi}=e^{\pi}-e^{-\pi}$

***

۳۴ : (تمرین در کلاس ص۲۵۰) انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int (x^{۵} - ۳x + e^{۳x} - ۳)dx$ ب) $\int (\sin ۳x - \cos ۲x)dx$

حل الف :

$$\int (x^{۵} - ۳x + e^{۳x} - ۳)dx = \frac{۱}{۶}x^{۶} - \frac{۳}{۲}x^{۲} + \frac{۱}{۳}e^{۳x} - ۳x + c$$

حل ب :

$$\int (\sin ۳x - \cos ۲x)dx = -\frac{۱}{۳}\cos ۳x - \frac{۱}{۲}\sin ۲x + c$$

***

۳۵ : (مسئله ی الف ص۲۵۱) معنی انتگرال نامعین $\int f(x)dx$ را توضیح دهید.

حل : یعنی تعیین توابعی مانند $F(x) + c$ (توابع اولیه) به طوری که $F'(x) = f(x)$

***

۳۶ : (مسئله ی ب ص۲۵۱) کدام یک از گزینه های زیر درست و کدام نادرست است؟

۱) انتگرال نامعین یک عدد و انتگرال معین یک تابع است.

۲) انتگرال نامعین یک تابع و انتگرال معین یک عدد است.

۳) انتگرال معین و انتگرال نامعین فرقی با هم ندارند و تفاوت آنها فقط در یک عدد ثابت است.

۴) برای محاسبه ی انتگرال معین ، در بیشتر موارد ، از انتگرال نامعین استفاده می کنیم. مجوز این کار در قضیه ی اساسی آمده است.

حل :   ۱) نادرست   ۲) درست   ۳) نادرست   ۴) درست

***

۳۷ : (مسئله ی ج ص۲۵۱) فرض کنیم f تابعی انتگرال پذیر بر بازه ی $[a,b]$ باشد. میانگین آن یعنی

$$\bar{f} = \frac{۱}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

را تفسیر کنید.

حل : مقدار $\int_a^b f(x)dx$، برابر مساحت مستطیلی است که عرض آن $b-a$ و طول آن $\bar{f}$ می باشد.

***

۳۸ : (مسئله ی د ص۲۵۱) فرض کنیم تابع f بر بازه ی $[a,b]$ تعریف شده و جزء در تعدادی متناهی نقطه از این بازه در سایر نقاط آن پیوسته باشد. چنین تابعی را یک تابع قطعه ای پیوسته می نامند. آیا f بر بازه ی $[a,b]$ انتگرال پذیر است؟ در صورتی که جوابتان مثبت است، مقدار انتگرال f را توضیح دهید.

حل : بله ، فرض می کنیم تابع f بر بازه ی $[a,b]$ تعریف شده باشد و در نقاط $c_1 < c_2 < c_3 < \ldots < c_n$ ناپیوسته) و کراندار باشد. در این صورت :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x)dx + \ldots + \int_{c_n}^{b} f(x)dx$$

***

۳۹ : (مسئله ی ۲ ص۲۵۱) انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

$$1)\int_0^4 x\sqrt[3]{x}dx \qquad 3)\ \int_0^2 |\sqrt{x}-1|\,dx$$

$$2)\ \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x + \tan x)dx \qquad 4)\ \int_0^1 |3x-1|[3x]dx$$

حل :

$$1)\ \int_0^4 x\sqrt[3]{x}dx = \int_0^4 x^{\frac{4}{3}}dx = \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}\Big|_0^4 = \frac{3}{7}(4)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{7}(0)^{\frac{7}{3}} = \frac{3}{7}\sqrt[3]{4^7} = \frac{3}{7}\times 4^2 \times \sqrt[3]{4} = \frac{48}{7}\sqrt[3]{4}$$

$$2)\ \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x + \tan x)dx = (-\frac{1}{2}\cos 2x - L_n(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= (-\frac{1}{2}\cos 2(\frac{\pi}{3}) - L_n(\cos(\frac{\pi}{3})) - (-\frac{1}{2}\cos 2(0) - L_n(\cos(0))$$

$$= (-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}) - L_n(\frac{1}{2})) - (-\frac{1}{2}(1) - L_n(1)) = \frac{1}{4} - L_n(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} - 0 = \frac{3}{4} - L_n(\frac{1}{2})$$

$$= \frac{3}{4} - (L_n(1) - L_n(2)) = \frac{3}{4} - (0 - L_n(2)) = \frac{3}{4} + L_n 2$$

توجه :

$$\cos 2(\frac{\pi}{3}) = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\cos(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$$

۳) $\int_0^2 |\sqrt{x} - 1|\, dx = \int_0^1 |\sqrt{x} - 1|\, dx + \int_1^2 |\sqrt{x} - 1|\, dx = -\int_0^1 (\sqrt{x} - 1) dx + \int_1^2 (\sqrt{x} - 1) dx$

$$= -\int_0^1 (\sqrt{x} - 1) dx + \int_1^2 (\sqrt{x} - 1) dx = -\int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - 1) dx + \int_1^2 (x^{\frac{1}{2}} - 1) dx$$

$$= -(\frac{2}{3} x\sqrt{x} - x)\Big|_0^1 + (\frac{2}{3} x\sqrt{x} - x)\Big|_1^2$$

$$= -((\frac{2}{3}(1)\sqrt{1} - 1) - ((\frac{2}{3}(0)\sqrt{0} - 0))) + (\frac{2}{3}(2)\sqrt{2} - 2) - (\frac{2}{3}(1)\sqrt{1} - 1)$$

$$= -\frac{2}{3} + 1 + \frac{4}{3}\sqrt{2} - 2 - \frac{2}{3} + 1 = -\frac{4}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{2}$$

توجه: عبارت $\sqrt{x} - 1$ در فاصله ی $[0,1]$ منفی و در فاصله ی $[1,2]$ مثبت است.

۴) $\int_0^1 |3x - 1|[3x] dx = \int_0^{\frac{1}{3}} |3x - 1|[3x] dx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} |3x - 1|[3x] dx + \int_{\frac{2}{3}}^1 |3x - 1|[3x] dx$

$$= -\int_0^{\frac{1}{3}} (3x - 1)(0) dx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} (3x - 1)(1) dx + \int_{\frac{2}{3}}^1 (3x - 1)(2) dx$$

$$= 0 + (\frac{3}{2}x^2 - x)\Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} + 2(\frac{3}{2}x^2 - x)\Big|_{\frac{2}{3}}^{1}$$

$$= (\frac{3}{2}(\frac{2}{3})^2 - (\frac{2}{3})) - (\frac{3}{2}(\frac{1}{3})^2 - (\frac{1}{3})) + 2(\frac{3}{2}(1)^2 - (1)) - 2(\frac{3}{2}(\frac{2}{3})^2 - (\frac{2}{3}))$$

$$= (\frac{2}{3} - \frac{2}{3}) - (\frac{1}{6} - \frac{1}{3}) + 2(\frac{3}{2} - 1) - 2(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}) = \frac{7}{6}$$

***

۴۰ : (مسئله ی ۳ ص۲۵۲) انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

$$1)\int \sin 4x\cos 2x\,dx \qquad 3)\int \sqrt{(1-\sqrt{x})^2+4\sqrt{x}}\,dx$$

$$2)\int \frac{x^2+\sqrt{x}+1}{2x^2}dx \qquad 4)\int \frac{1+e^{2x}}{e^x}dx$$

حل :

$$1)\int \sin 4x\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\int (\sin(4x+2x)+\sin(4x-2x))dx=\frac{1}{2}\int (\sin 6x+\sin 2x)dx$$

$$=\frac{1}{2}(-\frac{1}{6}\cos 6x-\frac{1}{2}\cos 2x)+c=-\frac{1}{4}(\frac{1}{3}\cos 6x+\cos 2x)+c$$

توجه : $\sin\alpha.\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

$$2)\int \frac{x^2+\sqrt{x}+1}{2x^2}dx=\int (\frac{x^2}{2x^2}+\frac{\sqrt{x}}{2x^2}+\frac{1}{2x^2})dx=\frac{1}{2}\int (1+x^{-\frac{3}{2}}+x^{-2})dx$$

$$=\frac{1}{2}(x-2x^{-\frac{1}{2}}-x^{-1})+c=\frac{1}{2}(x-\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x})+c$$

$$3)\int \sqrt{(1-\sqrt{x})^2+4\sqrt{x}}\,dx=\int \sqrt{1-2\sqrt{x}+x+4\sqrt{x}}\,dx=\int \sqrt{1+2\sqrt{x}+x}\,dx$$

$$=\int \sqrt{(1+\sqrt{x})^2}\,dx=\int (1+\sqrt{x})dx=\int (1+x^{\frac{1}{2}})dx=x+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+c$$

$$4)\int \frac{1+e^{2x}}{e^x}dx=\int (\frac{1}{e^x}+\frac{e^{2x}}{e^x})dx=\int (e^{-x}+e^x)dx==-e^{-x}+e^x+c$$

***

۴۱ : (مسئله ی ۴ ص۲۵۲) مقدار میانگین تابع f با ضابطه ی $f(x)=\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$ را بر بازه ی $[0,\pi]$ حساب کنید.

حل :

$$\bar{f}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{\pi-0}\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{2\cos^2(\frac{x}{2})}dx$$

$$=\frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\pi}\sqrt{۲}\times|\cos(\frac{x}{۲})|\,dx=\frac{\sqrt{۲}}{\pi}\int_{۰}^{\pi}\cos(\frac{x}{۲})dx=\frac{\sqrt{۲}}{\pi}(۲\sin(\frac{x}{۲}))\Big|_{۰}^{\pi}=\frac{۲\sqrt{۲}}{\pi}(\sin(\frac{\pi}{۲}))-(\sin(\frac{۰}{۲}))$$

$$=\frac{۲\sqrt{۲}}{\pi}(۱-۰)=\frac{۲\sqrt{۲}}{\pi}$$

توجه : از بازه ی $۰<x<\pi$ نتیجه می شود که $۰<\frac{x}{۲}<\frac{\pi}{۲}$ (ربع اول) . لذا $\cos\frac{x}{۲}>۰$

***

۴۲ : (مسئله ی ۵ ص۲۵۲) انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int\frac{(x+۲)^۳}{x}dx$

ب) $\int\frac{x^۲+۱}{\sqrt{x}}dx$

حل الف :

$$\int\frac{(x+۲)^۳}{x}dx=\int\frac{x^۳+۶x^۲+۱۲x+۱}{x}dx=\int(\frac{x^۳}{x}+\frac{۶x^۲}{x}+\frac{۱۲x}{x}+\frac{۸}{x})dx$$

$$=\int(x^۲+۶x+۱۲+\frac{۸}{x})dx=\frac{۱}{۳}x^۳+۳x^۲+۱۲x+۸L_n|x|+c$$

حل ب :

$$\int\frac{x^۲+۱}{\sqrt{x}}dx=\int(\frac{x^۲}{\sqrt{x}}+\frac{۱}{\sqrt{x}})dx=\int(x^{\frac{۳}{۲}}+x^{-\frac{۱}{۲}})dx=\frac{۲}{۵}x^{\frac{۵}{۲}}+۲x^{\frac{۱}{۲}}+c=\frac{۲}{۵}\sqrt{x^۵}+۲\sqrt{x}+c$$

***

۴۳ : (مسئله ی ۶ ص۲۵۲) با مشتق گیری از طرف دوم تساوی زیر ، درستی آنها را محقق کنید.

الف) $\int\frac{۱}{\sqrt{a^۲-x^۲}}dx=\sin^{-۱}\frac{x}{a}+c$

ب) $\int\frac{۱}{a^۲+x^۲}dx=\frac{۱}{a}\tan^{-۱}\frac{x}{a}+c$

حل الف:

$$F(x)=\sin^{-۱}\frac{x}{a}+c$$

$$\rightarrow F'(x)=\frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}=\frac{1}{a}\times\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2}}}=\frac{1}{a}\times\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}=f(x)$$

حل ب :

$$F(x)=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+c$$

$$\rightarrow F'(x)=\frac{1}{a}\times\frac{\frac{1}{a}}{1+(\frac{x}{a})^2}=\frac{1}{a}\times\frac{\frac{1}{a}}{\frac{a^2+x^2}{a^2}}=\frac{1}{a}\times\frac{1}{a}\times\frac{a^2}{a^2+x^2}=\frac{1}{a^2+x^2}=f(x)$$

***

۴۴ : (مسئله ی ۷ ص۲۵۲) فرض کنیم که f و g انتگرال پذیر بوده و برای هر x از بـازه ی $[a,b]$ ، $f(x)\le g(x)$.

ثابت کنید $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$

حل :

$$f(x)\le g(x)\rightarrow g(x)-f(x)\ge 0\rightarrow\int_a^b(g(x)-f(x))dx\ge 0$$

$$\rightarrow\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)dx\ge 0\rightarrow\int_a^b g(x)dx\ge\int_a^b f(x)dx$$

***